ЛАНЬ®
• САНКТ–ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
• 2012 •

С. М. АПОЛЛОНСКИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электромагнитное поле

РЕКОМЕНДОВАНО
Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 140400 — «Техническая физика» и 220100 — «Системный анализ и управление»

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
2012

ББК 31.21я73
А 76

Аполлонский С. М.

А 76 Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 592 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1155-9

Пособие разработано на основании государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования и предназначено для студентов очной, заочной и очно-заочной форм обучения по направлениям подготовки «Техническая физика», «Системный анализ и управление», изучающих дисциплину «Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле».

Пособие может быть использовано студентами всех форм обучения по направлениям подготовки «Энергетическое машиностроение» и «Электроэнергетика и электротехника», сталкивающимися с необходимостью изучения электромагнитного поля, а также магистрами, аспирантами и инженерно-техническими работниками электротехнических направлений.

ББК 31.21я73

Рецензенты:
К. Р. МАЛАЯН — профессор кафедры «Безопасность жизнедеятельности» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ); *М. А. ШАКИРОВ* — доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретические основы электротехники» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ); *А. Н. ГОРСКИЙ* — доктор технических наук, профессор кафедры ТОЭ Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения (СПбГУПС); *Ю. П. КОСЬКИН* — заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор кафедры «Электромеханика и электромеханотроника» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (СПбГЭТУ).

Обложка
Н. А. ГОНЧАРОВА

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле» включает материал части 3. «Электромагнитное поле» курса «Теоретические основы электротехники», читаемый электротехническим и энергетическим специальностям вузов. Изучать его следует после освоения части 1 «Линейные электрические цепи» и части 2 «Переходные процессы в линейных электрических цепях. Нелинейные электрические цепи».

Пособие содержит материал, излагаемый автором в лекциях для студентов очной, заочной и очно-заочной форм обучения всех специальностей в Северо-Западном государственном заочном техническом университете.

Содержание учебного пособия соответствует государственным стандартам по высшему профессиональному образованию. При его разработке учитывались особенности получения высшего образования в условиях обучения без отрыва от трудовой деятельности. Все теоретические выкладки и практические расчеты производятся так, что студент может самостоятельно разобраться в их содержании и оценить полученный результат.

В пособии использованы традиционные материалы, излагаемые в аналогичных курсах, как то: методы моделирования и расчета электромагнитных полей в свободном пространстве и в ограниченных областях; распространение электромагнитных полей; энергия и механические проявления электромагнитного поля; поверхностные эффекты в электромагнитном поле; методы расчета электромагнитных полей. Кроме этого, уделено внимание вопросам электромагнитной совместимости технических средств и человека, оказавшегося в электроэнергетических системах, вопросам выбора защитных средств, в том числе экранирования.

При подготовке пособия использовались как известные фундаментальные учебники и книги, ссылки на которые приведены в каждой главе, так и публикации автора.

Учебное пособие состоит из 25 глав. Теоретический материал дополнен большим количеством примеров расчета. Этого может оказаться достаточно для решения большинства практических инженерных задач.

Материал разбит на три части. В первой части (11 глав) приведены методы расчета электромагнитных полей, которые обязательны для изучения. Во второй части (7 глав) рассмотрены типовые задачи по основным видам электромагнитного поля, позволяющие практически освоить теоретический материал, содержащийся в первой части. В третьей части (7 глав) приведен материал, который носит дополнительный характер. В зависимости от специальности и формы обучения некоторые из глав в третьей части можно изучать частично или исключать из рассмотрения совсем.

Более подробные разъяснения по объему учебного материала следует получить у преподавателя, ведущего занятия по данной дисциплине.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

f — частота ЭМП, Гц
t — время, ч
ω — круговая частота ЭМП, $с^{-1}$
$\vec{E}$ — вектор электрической напряженности ЭМП, В/м
$\vec{H}$ — вектор магнитной напряженности ЭМП, А/м
$\vec{B}$ — вектор магнитной индукции ЭМП, $В \cdot С/м^2$
$\vec{D}$ — вектор электрической индукции ЭМП, $А \cdot С/м^2$
$\phi_М$, $\phi_Э$ — магнитный и электрический потенциалы ЭМП, А, В
$\vec{j}$ — плотность тока, $А/м^2$
$\{x_1, x_2, x_3\}$ — криволинейная ортогональная система координат
ε — диэлектрическая проницаемость среды, А·с/В·м
$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ — диэлектрическая постоянная, А·с/В·м
μ — магнитная проницаемость среды, В·с/А·м
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ — магнитная проницаемость воздуха, В·с/А·м
γ — электрическая проводимость среды, Сим/м, Сим/см

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

АД — асинхронный двигатель
ВДТ — видеодисплейный терминал
ВОЗ — Всемирная организация здравоохранения
ГРЩ — главный распределительный щит
ИНЧ — инфранизкая частота
КНЧ — крайне низкая частота
ЛЭП — линия электропередачи
МГД — магнитогидродинамический
МДС — магнитодвижущая сила
МП — магнитное поле
МСП — магнитостатическое поле
ПДК — предельно допустимая концентрация
ПДУ — предельно допустимый уровень
ПМП — постоянное магнитное поле
ППЭ — плотность потока энергии
РЛС — радиолокационная станция

РТУ — радиотехническое устройство
РТС — радиотрансляционная станция
РЭС — радиоэлектронная система
СВЧ — сверхвысокая частота
СГ — синхронный генератор
СЗЗ — санитарно-защитная зона
СНЧ — сверхнизкая частота
ССС — станция спутниковой связи
ТОЭ — теоретические основы электротехники
УВЧ — ультравысокая частота
УДС — управление движением судов
УКВ — ультракороткая волна
ЦПУ — центральный пост управления
ЭВМ — электронно-вычислительная машина
ЭДС — электродвижущая сила
ЭЛТ — электронно-лучевая трубка
ЭМ — электрическая машина
ЭМИ — электромагнитное излучение
ЭМП — электромагнитное поле
ЭМС — электромагнитная совместимость
ЭМО — электромагнитная обстановка
ЭМЭ — электромагнитная экология
ЭО — электрооборудование
ЭП — электрическое поле
ЭСП — электростатическое поле
ЭЭС — электроэнергетическая система

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

1

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

1.1. ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ЭМП можно рассматривать как особое свойство материи. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: $\vec{E}$ — напряженностью электрического поля (ЭП); $\vec{D}$ — электрической индукцией; $\vec{H}$ — напряженностью магнитного поля (МП); $\vec{B}$ — магнитной индукцией. Определить ЭМП в некоторой области пространства — значит указать эти векторы в любой ее точке. Таким образом, ЭМП предстает как совокупность ЭП $(\vec{E}, \vec{D})$ и МП $(\vec{H}, \vec{B})$, находящихся во взаимной зависимости. Деление ЭМП на эти две составляющие относительно, оно зависит от условий наблюдения и возможно только при макроскопическом рассмотрении явлений. При движении заряженного тела в окружающем пространстве возникает ЭМП, и неподвижный наблюдатель обнаружит ЭП и МП по механическим силам, действующим на пробный заряд и магнитную стрелку. Однако наблюдатель с пробным зарядом и магнитной стрелкой, движущейся вместе с заряженным телом, не обнаружит отклонения магнитной стрелки, а отметит только воздействие на пробный заряд. Для такого наблюдателя существует только ЭП, а МП отсутствует.

При микроскопическом рассмотрении всегда обнаруживаются обе стороны ЭМП. Например, при рассмотрении неподвижного заряженного тела необходимо учесть также МП движущихся по своим орбитам электронов, из которых слагается общий заряд тела. Однако из-за хаотического расположения этих элементарных токов их МП чрезвычайно быстро убывает с увеличением расстояния от тела. При макроскопическом подходе вокруг неподвижного заряженного тела учитывается только ЭП.

Поскольку можно создать условия, при которых проявляется одна из составляющих ЭМП, возможно и раздельное изучение ЭП и МП. Это соответствует ряду практических задач, когда в электротехническом устройстве представляет интерес определение только одного из полей.

1.2. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1.2.1. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Напряженность ЭП — характеристика векторная, определяемая в каждой точке и величиной, и направлением. Если в ЭП поместить малый положительный заряд, который своим присутствием не вызовет заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда Q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim \frac{\vec{F}}{Q},$$
$$Q \to 0. \tag{1.1}$$

Таким образом, $\vec{E}$ — силовая характеристика ЭП, определяемая при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не исказил поля, существовавшего до его внесения. Отсюда следует, что сила $\vec{f}$, действующая на точечный заряд Q, внесенный в поле, будет равна

$$\vec{f} = Q\vec{E}, \tag{1.2}$$

где $\vec{E}$ — напряженность ЭП в точке расположения заряда, а напряженность численно равна силе, действующей на единичный заряд.

Если использовать закон Кулона, который определяет силу $\vec{f}$ взаимодействия двух точечных электрических зарядов Q_1 и Q_2, то сила, действующая по прямой x, соединяющей эти заряды, будет равна

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{x^2}, \tag{1.3}$$

где ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Тогда модуль напряженности $\vec{E}$ в поле точечного заряда можно определить в виде

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon x^2}. \tag{1.4}$$

Поскольку сила, действующая на электрический заряд со стороны ЭП, имеет вполне определенное направление, приходится говорить о направленности свойств этого поля. При этом за направление ЭП в данной точке пространства принимают направление вектора напряженности поля. Более наглядное представление о направленности ЭП можно получить, если, следуя предложению Фарадея, в пространстве наметить ряд линий так, чтобы векторы напряженности в той или иной точке поля были бы касательными к этим линиям (рис. 1.1). Их называют линиями

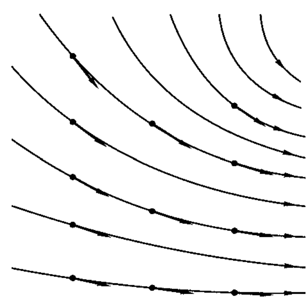


Рис. 1.1
Картина электрического поля

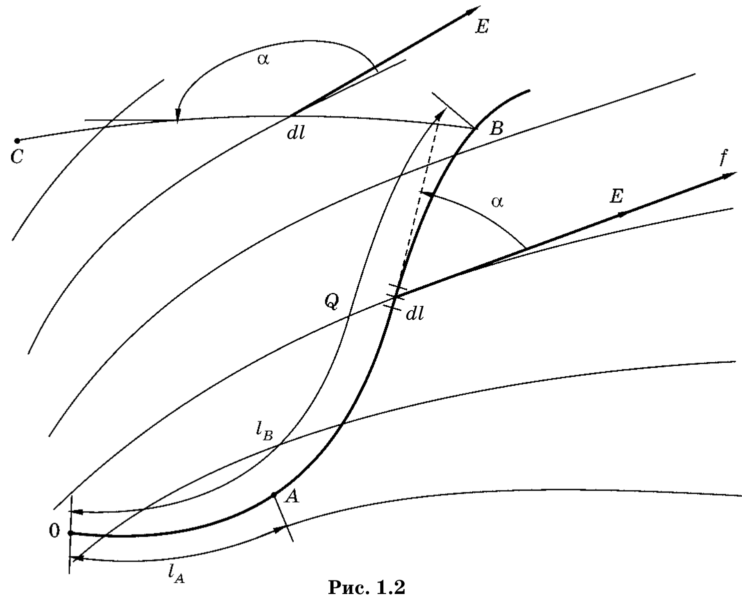


Рис. 1.2
Перемещение точечного заряда в электрическом поле

вектора напряженности ЭП, или, короче, электрическими линиями. Они всегда направлены от положительно заряженных тел к отрицательно заряженным. Совокупность электрических линий принято называть картиной ЭП.

Если ЭП создается n зарядами $(Q_i, i \in [1, n])$, то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из n зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E},$$

т. е. при расчете ЭП применим метод наложения.

Представим себе ЭП (рис. 1.2), в котором по некоторому пути от точки A до точки B под действием поля движется пробный точечный положительный заряд Q. Со стороны поля к заряду будет приложена сила f. Она направлена по касательной к линии движения и определяется формулой (1.2).

Работа A^* на пути от точки A до точки B определится линейным интегралом

$$A^* = \int_A^B QE\cos\alpha dl = Q\int_A^B E\cos\alpha dl,$$

где dl — элемент длины пути интегрирования; заряд Q вынесен за знак интеграла, так как в процессе движения величина заряда не меняется.

Таким образом, работа по перемещению заряда равна произведению заряда Q на линейный интеграл от напряженности поля вдоль пути движения заряда. Этот интеграл, определяющийся характеристиками поля по выбранному пути, получил название электрического напряжения между точками A и B, которое обозначается как указано ниже:

$$U_{AB} = \int_A^B E\cos\alpha dl. \tag{1.5}$$

Выражение (1.5) можно записать в векторной форме:

$$U_{AB} = \int\limits_A^B \vec{E}d\vec{l}. \tag{1.6}$$

Напряжение U_{AB} характеризует собой энергетические возможности поля в данной области пространства. Электрическое напряжение является скалярной величиной и в общем случае может приобретать как положительные, так и отрицательные значения.

Единицей электрического напряжения является вольт (В). Если напряжение между двумя точками поля 1 В, то при перемещении заряда в 1 Кл из одной точки в другую будет совершена работа в 1 Дж.

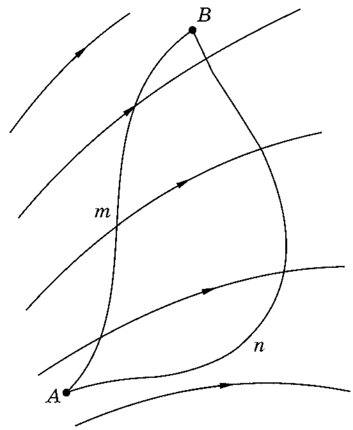


Рис. 1.3
Пути перемещения заряда в электрическом поле

Нетрудно показать, что электрическое напряжение между точками не зависит от пути его вычисления и определяется только положением начальной и конечной точек.

Для пояснения выберем две произвольные точки A и B в поле и рассмотрим два различных пути m и n между ними (рис. 1.3). Очевидно, что оба эти пути составляют замкнутый контур $AmBnA$, для которого справедливо условие — линейный интеграл вектора напряженности в электростатическом поле по любому замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint\limits_{AmBnA} \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Этот линейный интеграл вектора напряженности по замкнутому контуру можно разбить на два интеграла по двум его участкам:

$$\oint\limits_{AmBnA} \vec{E}d\vec{l} = \int\limits_{AmB} \vec{E}d\vec{l} + \int\limits_{BnA} \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Если изменить направление интегрирования во втором слагаемом на обратное, т. е. вычисляя линейный интеграл по пути n от A к B, получим

$$\int\limits_{AmB} \vec{E}d\vec{l} - \int\limits_{AnB} \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

А так как перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака интеграла, то

$$\int\limits_{AmB} \vec{E}d\vec{l} = \int\limits_{AnB} \vec{E}d\vec{l},$$

т. е. оба интеграла и представляемые ими напряжения U_{AB} между точками A и B, вычисленные по разным путям, равны друг другу. Это и является доказательством ранее высказанного тезиса.

1.2.2.
ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если в качестве конечной точки при определении напряжения условиться всегда брать фиксированную в пространстве точку P, которую назовем опорной точкой, то напряжение

$$U_{AP} = \int_A^P \vec{E}d\vec{l}$$

между произвольной точкой A и опорной точкой P будет являться функцией положения только точки A. В этом случае напряжение называют электрическим потенциалом точки A и обозначают буквой φ:

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E}d\vec{l} = \int_A^P E\cos\alpha dl.$$

По своей физической природе потенциал не отличается от напряжения и потому является также скалярной величиной и измеряется в вольтах.

Если поинтересоваться потенциалом самой точки P, то придем к выводу:

$$\varphi_P = \int_P^P \vec{E}d\vec{l},$$

что он равен нулю, так как определенный интеграл с одинаковыми нижним и верхним пределами обращается в нуль. Поэтому опорную точку нередко называют точкой нулевого потенциала.

В принципе, за опорную точку можно принять любую точку пространства. Однако в отдельных случаях ее рациональный выбор позволяет упростить расчет потенциалов остальных точек поля. В частности, в теоретических задачах, связанных с полем ограниченной системы заряженных тел, опорную точку часто располагают в бесконечности.

В практической электротехнике точку нулевого потенциала обычно связывают с поверхностью земли или основанием электромеханического устройства.

В заключение следует остановиться еще на некоторых важных понятиях в ЭП.

1. Если точка перемещается в ЭП таким образом, что приращение потенциала при перемещении равно нулю, то потенциал всех точек этой линии будет оставаться одним и тем же. Такие линии в ЭП называют линиями равного потенциала или эквипотенциальными линиями.

2. Если точка перемещается в ЭП по поверхности, проложенной всюду перпендикулярно электрическим линиям, то придем к понятию о поверхностях равного потенциала, или эквипотенциальных поверхностях.

3. Электрические заряды располагаются на проводящих телах в поверхностном слое, все точки которого обладают равным потенциалом. Внутри заряженного тела ЭП отсутствует.

4. ЭП, позволяющее ввести понятие потенциала как однозначной функции координат точки поля, принято называть потенциальным полем.

1.2.3.
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

1.2.3.1.
ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Рассчитаем потенциал в произвольной точке A поля точечного заряда Q (рис. 1.4), полагая, что точка P нулевого потенциала удалена в бесконечность:

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E}d\vec{l} = \int_A^P E\cos\alpha dl.$$

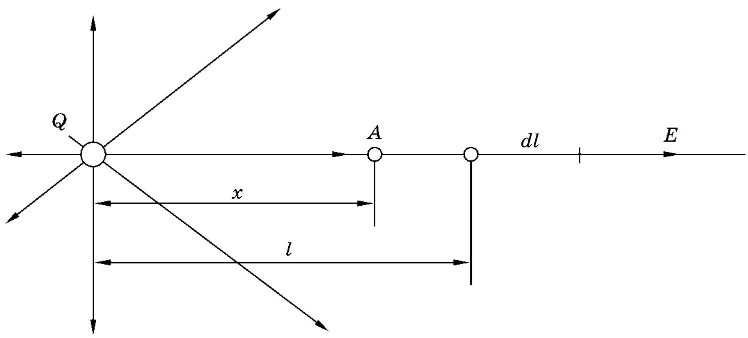


Рис. 1.4
Точечный заряд в электрическом поле

Проинтегрируем напряженность от точки A с координатой x до бесконечности непосредственно по электрической линии, проходящей через интересующую нас точку. Тогда угол α на всем пути интегрирования равен нулю, при этом $\cos\alpha = 1$. Поэтому, определяя положение произвольной точки на пути интегрирования расстоянием l до заряда и учитывая выражение для напряженности поля точечного заряда Q, для потенциала получим

$$\varphi_A = \int_x^\infty Edl = \int_x^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon l^2}dl = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon l}\Big|_x^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon x}.$$

Таким образом, потенциал в произвольной точке поля точечного заряда убывает по мере удаления от заряда обратно пропорционально расстоянию от точки до заряда, стремясь к нулю в бесконечности. При $x = 0$ потенциал обращается в бесконечность, однако этот результат следует рассматривать как математическую абстракцию, поскольку в действительности всякий заряд занимает определенный объем и точечных зарядов реально не существует.

1.2.3.2.
ПОТЕНЦИАЛ ЭП ДИПОЛЯ

Под диполем понимается система из двух зарядов Q_1 и Q_2, равных по величине и противоположных по знаку ($Q_1 = -Q_2 = Q$), размещающихся на некотором расстоянии d друг от друга. Потенциал ЭП, окружающего диполь (см. рис. 1.5), в произвольной точке A пространства можно найти наложением потенциалов от каждого из зарядов:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon x_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon x_2}$$

или

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}.$$

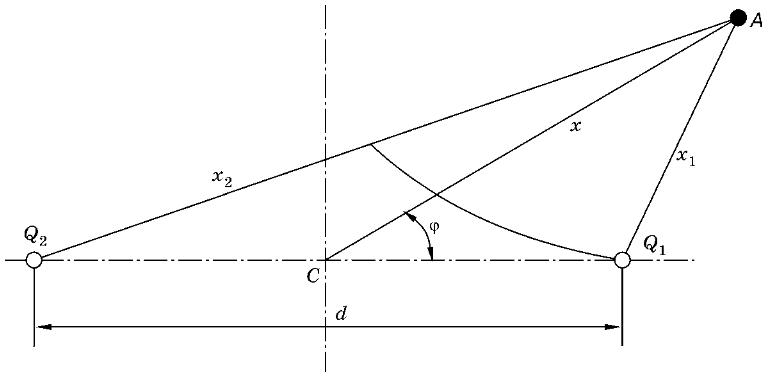


Рис. 1.5
Диполь в электрическом поле

Переходя к определению положения точки A полярными координатами x и φ относительно центра C диполя и его оси, придем к заключению, что при значительном удалении от диполя справедливы следующие приближенные равенства: $x_1 x_2 \approx x^2$, $x_2 - x_1 \approx d\cos\varphi$, откуда для потенциала имеем

$$\Phi_A = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon x^2}\cos\varphi.$$

Таким образом, потенциал поля диполя убывает при удалении от него с квадратом расстояния.

1.3. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И МАГНИТНЫЙ ПОТОК

1.3.1. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Согласно современным научным представлениям об электромагнитных явлениях, МП неразрывно связано с электрическим током: МП не может существовать без тока, и нельзя себе представить электрический ток без МП. Даже в случае, когда речь идет о МП постоянного магнита, мы связываем это поле с молекулярными токами в теле магнита.

Если в пространстве, где существует МП, поместить магнитную стрелку, то она стремится занять определенное положение, что свидетельствует о направленности свойств МП. Условились направлением МП в данной точке пространства считать направление, в котором устанавливается ось свободно подвешенной бесконечно малой магнитной стрелки, центр которой совмещен с этой точкой пространства. При этом из двух возможных направлений вдоль оси стрелки МП условно приписывают направление от южного конца стрелки к северному.

Более наглядное представление о направленности МП можно получить, если в пространстве провести ряд линий, по отношению к которым оси всех магнитных стрелок являлись бы касательными. Такие линии называются магнитными. Совокупность магнитных линий принято называть картиной МП. Для примера на рис. 1.6 приведены плоскостные картины МП постоянного магнита в форме параллелепипеда (рис. 1.6*а*), МП тока в прямом проводе круглого сечения (рис. 1.6*б*), МП соленоида (рис. 1.6*в*) и МП обмоток возбуждения электрической машины постоянного тока (рис. 1.6*г*).

Направление МП, созданного током, зависит от направления тока в проводах. Это направление принято определять по правилу правого винта. В электротехнике это правило применяют в двух вариантах в зависимости от того, идет ли речь о поле, созданном током в отрезке провода, или током, замыкающемся в витке, в частности протекающим по обмотке индуктивной катушки.

В первом случае, обращаясь к МП проводника с током (см. рис. 1.7), винт с правой нарезкой мысленно располагают так, чтобы его ось оказалась совмещенной с осью провода, по которому течет ток. Если вращать винт в направле-

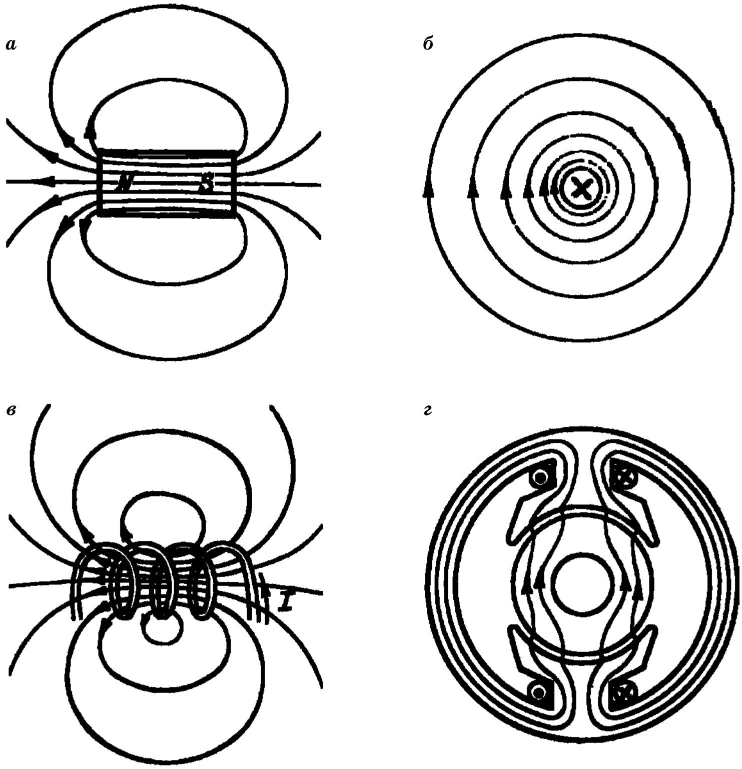


Рис. 1.6
Картины МП постоянного магнита

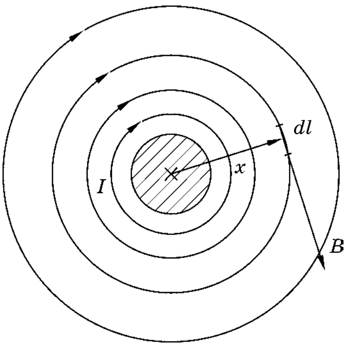


Рис. 1.7
Расположение магнитных линий у прямолинейного проводника с током

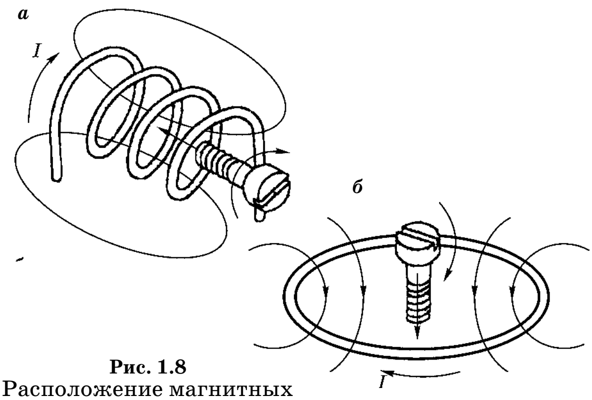


Рис. 1.8
Расположение магнитных линий у индукционной катушки

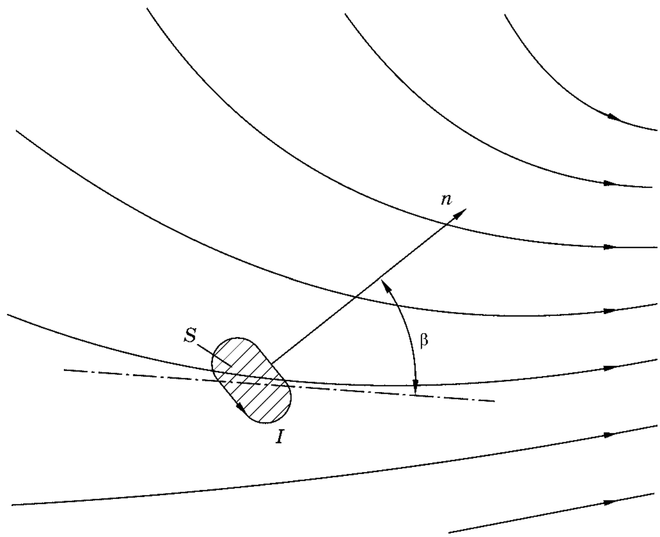


Рис. 1.9
Воздействие магнитного поля на плоский контур с током

нии магнитных линий, то направление его поступательного перемещения будет соответствовать направлению тока в проводе.

Во втором случае, когда МП образовано индуктивной катушкой (рис. 1.8*а*) или витком с током (рис. 1.8*б*), ось винта следует совместить с осью витка или катушки. Тогда при вращении винта в направлении движения тока в витке или по обмотке катушки поступательное перемещение винта укажет направление МП сквозь рассматриваемые виток или катушку.

Кроме направления, МП характеризуется еще и интенсивностью. Рассмотрим, для примера, воздействие МП на небольшой плоский контур с электрическим током. Такой контур будет стремиться занять в пространстве определенное положение, при котором нормаль к плоскости контура совпадает с направлением МП в одной из точек плоскости, ограниченной этим контуром. При выведении контура из указанного положения на него начинает действовать момент, стремящийся вернуть контур в первоначальное положение. Величина момента пропорциональна току I контура, его площади S и синусу угла β, составляемого нормалью к плоскости контура и направлением МП в одной из ее точек (рис. 1.9).

Таким образом, обозначая коэффициент пропорциональности буквой B, для момента m, действующего на отклоненный контур, можно написать:

$$m = BIS\sin\beta.$$

Если беспредельно уменьшать площадь контура, стягивая его в точку, придем к выражению для бесконечно малого момента dm, действующего на контур бесконечно малой площади ds:

$$dm = BI\sin\beta ds, \tag{1.7}$$

где угол β приобретает определенный смысл угла между нормалью к плоскости бесконечно малого контура и направлением МП в точке пространства, в которой расположен бесконечно малый контур.

В этих условиях коэффициент B принимают за характеристику интенсивности МП в данной точке пространства и называют индукцией МП.

Магнитную индукцию рассматривают как векторную величину, совмещая направление вектора магнитной индукции с направлением МП в данной точке пространства.

МП, характеризующееся в некоторой области пространства неизменным значением вектора магнитной индукции, называют равномерным МП. Магнитная индукция в международной системе (СИ) измеряется в единицах тесла (Тл). Магнитная индукция равномерного МП равна 1 Тл, если она воздействует на плоский электрический контур с площадью $S = 1$ м^2 и током $I = 1$ А, расположенный так, что магнитные линии лежат в плоскости контура ($\beta = 0{,}5\pi$, $\sin\beta = 1$), с моментом $m = 1$ Н·м.

Область пространства, с каждой точкой которого связан определенный вектор, принято называть полем данного вектора. Для наглядного представления векторного поля широко используют понятия линий и трубок данного вектора. При этом под линией вектора понимают линию, проведенную в поле так, что в любой ее точке вектор направлен по касательной линии. Трубкой вектора называют трубчатую область пространства, ограниченную совокупностью прилегающих друг к другу линий данного вектора, проведенных через замкнутый контур.

К упомянутому математическому представлению о векторном поле часто прибегают при описании различных физических полей. В частности, при описании МП обращаются к полю вектора магнитной индукции, определяя в нем линии и трубки вектора магнитной индукции.

1.3.2. МАГНИТНЫЙ ПОТОК

При исследовании магнитных явлений важную роль играет поток вектора магнитной индукции, или, сокращенно, магнитный поток.

Пусть в МП дана бесконечно малая поверхность ds (см. рис. 1.10), положение которой в пространстве определим относительно МП углом β между

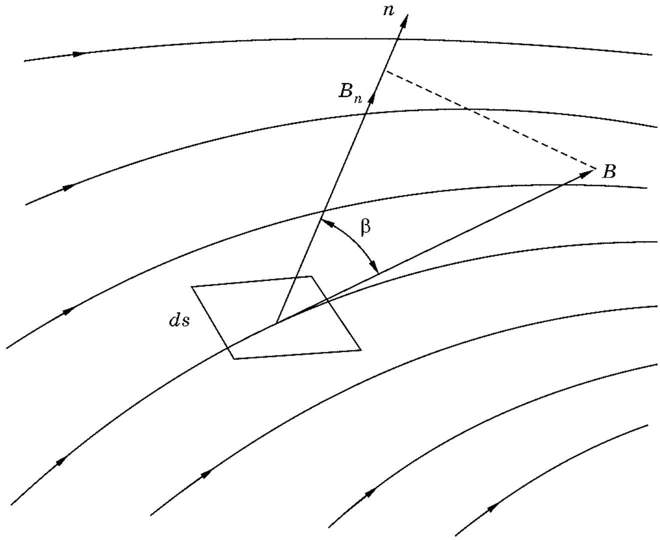


Рис. 1.10
Прохождение магнитного поля через малую поверхность

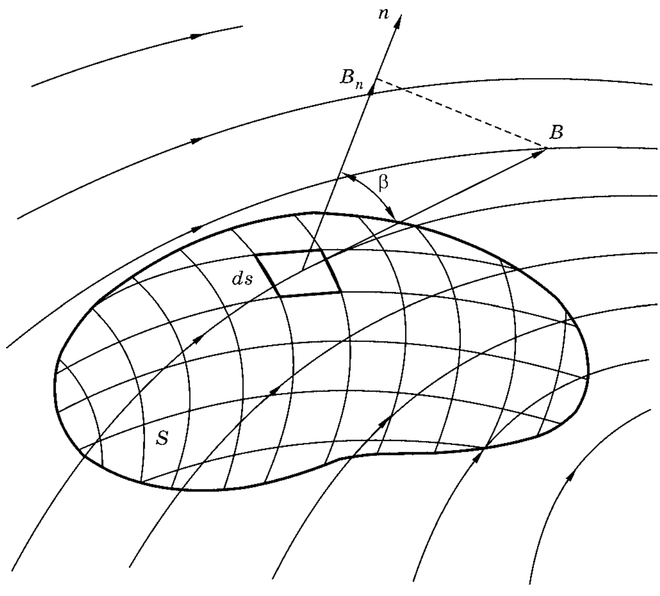


Рис. 1.11
Прохождение магнитного поля через элементы малой поверхности

нормалью к этой поверхности и вектором $\vec{B}$ магнитной индукции в центре этой поверхности. Спроектируем вектор магнитной индукции на направление нормали n к поверхности ds. Произведение этой проекции $B_n = B\cos\beta$ на площадь ds поверхности $d\Phi = B_n ds = B\cos\beta ds$ получило название магнитного потока сквозь бесконечно малую площадку ds.

Пользуясь известным из математики представлением о плоской поверхности в виде вектора, величина которого равна площади этой поверхности, а направление совпадает с направлением нормали к ней, и вспоминая о скалярном произведении двух векторов как произведении величин этих векторов на косинус угла между ними, можно магнитный поток записать в векторной форме: $d\Phi = \vec{B}d\vec{s}$.

Для представления магнитного потока сквозь поверхность S конечных размеров (рис. 1.11) разобьем эту поверхность на элементарные поверхности ds и определим бесконечно малые магнитные потоки $d\Phi$ сквозь каждую такую поверхность.

Магнитным потоком сквозь поверхность конечных размеров называют сумму потоков сквозь все составляющие ее элементарные поверхности, определяющуюся интегрированием бесконечно малых потоков в пределах всей поверхности:

$$\Phi = \int_S B\cos\beta ds. \tag{1.8}$$

Выражение (1.8) в векторной форме представится в виде

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{s}. \tag{1.9}$$

Интеграл в правых частях формул (1.8) и (1.9) читается как поток вектора магнитной индукции сквозь заданную поверхность.

Единица магнитного потока в международной системе (СИ) называется вебер (Вб). Магнитный поток, равный 1 Вб, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью в 1 м^2, достигается, если ее разместить в равномерном поле с магнитной индукцией 1 Тл перпендикулярно магнитным линиям.

Используя формулы (1.8), (1.9), магнитную индукцию B можно представить как величину, численно равную магнитному потоку, приходящемуся на единицу площади, расположенной перпендикулярно магнитным линиям:

$$B = \frac{d\Phi}{ds_n}. \tag{1.10}$$

Для частного же случая конечной плоскости, расположенной перпендикулярно магнитным линиям в равномерном МП, получаем выражение

$$B = \frac{\Phi}{S}. \tag{1.11}$$

1.3.3. РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОТОКА В КАТУШКЕ С КОЛЬЦЕВЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

Применим прием расчета магнитного потока по формулам (1.8), (1.9) к индуктивной катушке с кольцевым магнитопроводом, чертеж которой в двух проекциях показан на рис. 1.12. Магнитные линии поля в магнитопроводе представляют собой окружности с центром на оси кольца, поэтому вектор магнитной индукции в любой точке поперечного сечения перпендикулярен плоскости такого сечения, угол β между вектором магнитной индукции

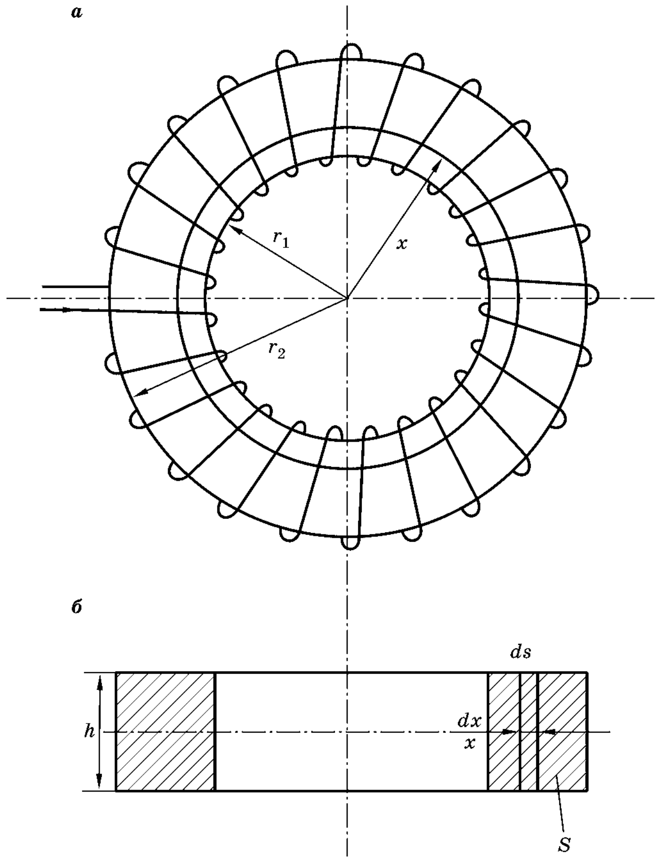


Рис. 1.12
Индуктивная катушка с кольцевым магнитопроводом

и нормалью к элементарной площадке ds всюду по поперечному сечению будет равен нулю, а $\cos\varphi = 1$. Выражение для магнитного потока в скалярной форме представится в упрощенном виде:

$$\Phi = \int_S B ds. \tag{1.12}$$

Интеграл по поверхности представляет собой двойной интеграл. В рассматриваемом примере магнитная индукция в магнитопроводе зависит только от расстояния x рассматриваемой точки от его оси и по высоте в поперечном сечении магнитопровода не меняется.

Магнитная индукция меняется только при изменении расстояния x от оси магнитопровода. Поэтому если сечение кольца разбить на элементарные площадки в форме бесконечно узких полосок шириной dx, вытянутых вдоль оси кольца и простирающихся на всю его высоту h (рис. 1.12*б*), то магнитная индукция в пределах одной такой площадки будет оставаться неизменной.

Площадь элементарной площадки в этом случае выразится в виде $ds = hdx$, а интеграл по поверхности превращается в простой интеграл

$$\Phi = \iint\limits_S B ds = \int\limits_x B h dx. \tag{1.13}$$

Магнитная индукция в любой точке поперечного сечения магнитопровода в функции ее расстояния от оси магнитопровода выразится в виде

$$B = \frac{\mu w I}{2\pi x}, \tag{1.14}$$

где μ — магнитная проницаемость материала магнитопровода; w — число витков обмотки; I — протекающий по обмотке электрический ток.

Подставляя выражение (1.14) под знак интеграла в (1.13), для магнитного потока в случае постоянства магнитной проницаемости получим

$$\Phi = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\mu w I}{2\pi x} h dx = \frac{\mu w I h}{2\pi} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu w I h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие источники энергии являются причиной появления ЭП?
2. Какими величинами можно оценить качественные и количественные характеристики ЭП?
3. Какие источники являются причиной появления МП?
4. Какими величинами можно оценить качественные и количественные характеристики МП?
5. Чем связаны МП и ЭП?
6. Что такое электрический потенциал и электрическое напряжение?
7. Что такое магнитный поток и магнитная индукция?
8. Как можно определить направление МП, индуктированного электрическим током?

2

ГЛАВА 2

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

2.1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ И МАГНИТНЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ

2.1.1. ЗАКОНЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Аналитическая связь между электрическими и магнитными векторами ЭМП сформулирована в виде двух законов: полного тока и Фарадея.

Поскольку всякий электрический ток обязательно сопровождается МП, то МП неизбежно связано с электрическим током. Связь между электрическим током и напряженностью МП устанавливается законом полного тока

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I, \qquad (2.1)$$

т. е. линейный интеграл вектора напряженности МП $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру $\vec{l}$ равен полному току I, проходящему сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнение (2.1) устанавливает одну из важнейших связей между электрической и магнитной сторонами электромагнитных явлений. Оно определяет МП, возникающее при движении электрически заряженных частиц и при изменении ЭП. Обобщенная формулировка первого уравнения, данная Максвеллом, представляется в виде

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}, \qquad (2.2)$$

где под $\vec{\delta}$ понимается плотность всех видов электрического тока:

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_{\text{пр}} + \vec{\delta}_{\text{см}} + \vec{\delta}_{\text{пер}}, \qquad (2.3)$$

включающая $\vec{\delta}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}$ — плотность тока проводимости (γ — удельная электрическая проводимость, $\vec{E}$ — электрическая напряженность); $\vec{\delta}_{\text{см}} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — плотность тока смещения; $\vec{\delta}_{\text{пер}} = \rho(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$ — плотность тока переноса (ρ — плот-

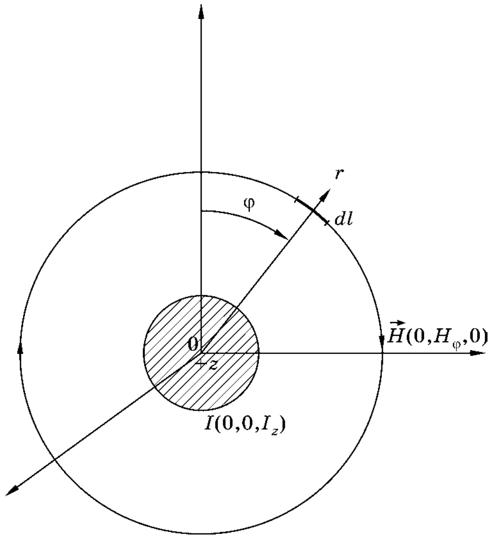


Рис. 2.1
Прямолинейный проводник с током

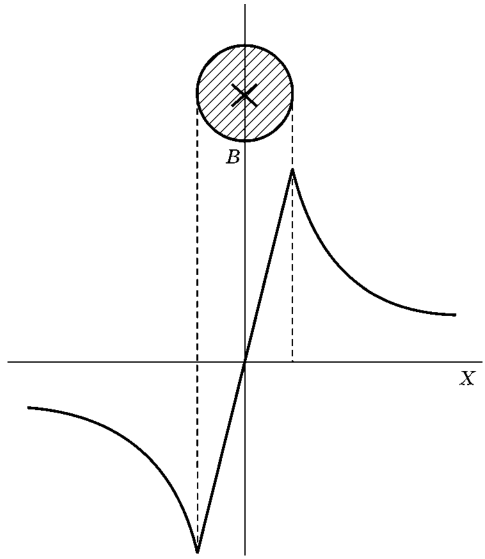


Рис. 2.2
Распределение магнитной напряженности у прямолинейного проводника с током

ность электрического заряда; $\vec{v}_+, \vec{v}_-$ — скорости переноса положительных и отрицательных зарядов), $\vec{S}$ — площадь сечения, через которое протекает суммарный ток.

Плотность тока смещения равна изменению электрической индукции во времени, при этом

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \tag{2.4}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Уравнение (2.3) называется первым уравнением Максвелла, записанным в интегральной форме.

П р и м е р 2.1. Возьмем прямолинейный проводник с током, как показано на рис. 2.1.

В круговой цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ ток $\vec{I}\{0, 0, I_z\}$ имеет лишь одну составляющую, направленную по оси z, она вызывает появление МП с напряженностью $\vec{H}\{0, H_\varphi, 0\}$, направленной по координате φ. Тогда, используя (2.1), получим

$$H_\varphi = \frac{I_z}{2\pi r}.$$

Распределение напряженности $H_\varphi = F(r)$ представлено на рис. 2.2.

При изменении магнитного тока во времени появляется ЭП. Эта связь установлена Фарадеем и сформулирована им в виде закона электромагнитной индукции для контура (см. рис. 2.3):

$$e_l = -\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

где e_l — электродвижущая сила (ЭДС) в контуре l, Ψ — потокосцепление.

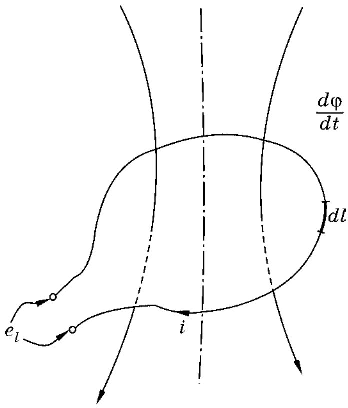


Рис. 2.3
Контур, пересекаемый магнитным потоком

Максвелл обобщил этот закон для любой среды. Согласно его формулировке, ЭДС, возникающая в контуре при изменении магнитного потока, проходящего сквозь поверхность, ограниченную контуром, равна взятой со знаком минус скорости изменения этого потока. Второй закон Максвелла в обобщенном виде представляется следующим образом:

$$\oint_l \vec{E} dl = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial w\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t}\int_S \vec{B} d\vec{s}, \qquad (2.5)$$

где w — число витков, Φ — магнитный поток одного витка, $\vec{B}$ — плотность магнитного потока ($\vec{B} = \mu\vec{H}$, μ — магнитная проницаемость среды).

Уравнения (2.2) и (2.5) являются основными уравнениями ЭМП, представленными в интегральной форме.

2.1.2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Исследуя ЭМП, необходимо определять в каждой точке пространства все величины, его характеризующие.

Поэтому мы не можем удовлетвориться интегральной формой уравнений и должны представить их в дифференциальной форме. Кроме того, решение интегральных уравнений связано, как правило, с большими аналитическими трудностями.

Выразим в дифференциальной форме первое уравнение Максвелла (2.2). Здесь линейный интеграл вектора напряженности МП, взятого по замкнутому контуру, может рассматриваться как мера электрического тока, проходящего сквозь поверхность $\vec{S}$, ограниченную этим контуром. Однако по величине этого интеграла нельзя судить о распределении тока по поверхности $\vec{S}$. Чтобы решить этот вопрос, необходимо воспользоваться этим же уравнением в дифференциальной форме. Допустим, что необходимо выяснить, проходит ли ток сквозь малую поверхность $\Delta\vec{S}$, на которой расположена точка A, и какова плотность тока в этой точке (рис. 2.4). Линейный интеграл вектора $\vec{H}$, взятый вдоль малого контура, ограничивающего поверхность $\Delta\vec{S}$, равен малому току Δi, проходящему сквозь эту поверхность:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \Delta i,$$

и может служить мерой тока. Величина Δi зависит от размеров поверхности $\Delta\vec{S}$.

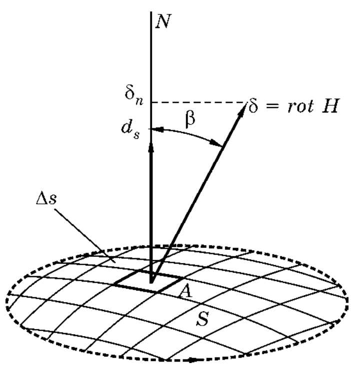


Рис. 2.4
Прохождение магнитного потока сквозь малую поверхность

Для получения вполне определенной величины Δi разделим левую и правую части равенства на $\Delta\vec{S}$ и найдем предел, к которому стремится отношение, когда $\Delta\vec{S} \to 0$, стягиваясь к точке A:

$$\lim \frac{\oint_l \vec{H} d\vec{l}}{\Delta\vec{S}} = \lim \frac{\Delta i}{\Delta\vec{S}}, \quad \Delta\vec{S} \to 0. \tag{2.6}$$

Величина, стоящая в левой части (2.6), представляет собой проекцию на направление нормали к поверхности S в точке A вектора, называемого вихрем или ротором вектора $\vec{H}$.

Вихрь вектора $\vec{H}$ обозначают $\operatorname{rot}\vec{H}$:

$$\operatorname{rot}_n \vec{H} = \lim \frac{\oint_l \vec{H} d\vec{l}}{\Delta\vec{S}} = \delta_n, \quad \Delta\vec{S} \to 0. \tag{2.7}$$

Если элемент поверхности расположить так, чтобы положительная нормаль к нему совпадала с направлением вектора плотности тока, то предел отношения $\Delta i / \Delta\vec{S}$ получит наибольшее значение, равное плотности тока в точке A, причем направление положительной нормали связано правилом правого винта с направлением обхода по контуру. Тогда первое уравнение Максвелла (2.2) в дифференциальной форме запишется в виде

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}. \tag{2.8}$$

Аналогичные действия можно выполнить со вторым уравнением Максвелла (2.5).

При этом, рассматривая поле в неподвижных средах, заменим полную производную по времени частной производной. Составим линейный интеграл вектора напряженности ЭП по малому контуру, ограничивающему малую поверхность $\Delta\vec{S}$ (рис. 2.5), разделим его на величину поверхности и найдем предел, к которому стремится полученное отношение, когда поверхность $\Delta\vec{S}$ стремится к нулю, стягиваясь в некоторой точке A поля.

При этом получаем проекцию на направление нормали к выбранному элементу поверхности в точке A вихря вектора $\vec{E}$:

$$\lim \frac{\oint_l \vec{E} d\vec{l}}{\Delta\vec{S}} = \operatorname{rot}_n \vec{E}, \quad \Delta\vec{S} \to 0. \tag{2.9}$$

В правой части уравнения (2.5) потокосцепление $\Delta\Psi$, проходящее сквозь поверхность $\Delta\vec{S}$, необходимо разделить на поверхность $\Delta\vec{S}$ и найти предел, к которому стремится это отношение, когда $\Delta\vec{S} \to 0$. При этом получается составляющая вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в точке A, нормальная к выбранному элементу поверхности:

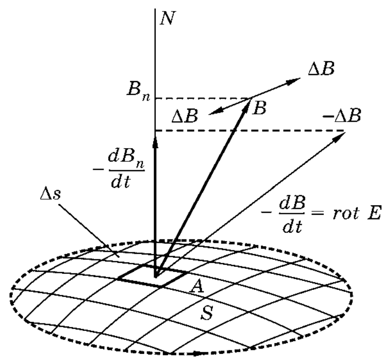


Рис. 2.5
Связь между током контура и магнитным потоком

$$\lim \frac{\Delta \Phi}{\Delta \vec{S}} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} = \vec{B}_n, \quad \Delta \vec{S} \to 0,$$

откуда

$$\operatorname{rot}_n \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t}.$$

Выберем положение элемента поверхности так, чтобы нормаль к нему совпадала с вектором $-\partial \vec{B} / \partial t$. Тогда в левой части равенства получим вихрь вектора $\vec{E}$:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Направление вектора $\partial \vec{B} / \partial t$ — направление, к которому стремится направление приращения $\Delta \vec{B}$ вектора магнитной индукции, происходящего за промежуток времени Δt, когда $\Delta t \to 0$. Если вектор $\vec{B}$ изменяется не только по величине, но и по направлению, то производная $\partial \vec{B} / \partial t$ не направлена по одной прямой с вектором $\vec{B}$.

Уравнения Максвелла, записанные в векторной форме (2.8), (2.10), инвариантны в отношении систем координат. Действительно, $\operatorname{rot} \vec{H}$ и $\operatorname{rot} \vec{E}$ полностью определяются вектором плотности тока и производной по времени от вектора магнитной индукции в данной точке, которые, естественно, не зависят от выбора системы координат. Однако выражения для составляющих вихря некоторого вектора $\vec{A}$ получаются различными в разных системах координат. Если воспользоваться обобщенной ортогональной криволинейной системой координат $\{q_1, q_2, q_3\}$, то $\operatorname{rot} \vec{A} (\vec{A} \equiv [\vec{H}, \vec{E}])$ можно представить следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}_{q_1} A \vec{e}_{q_1} + \operatorname{rot}_{q_2} A \vec{e}_{q_2} + \operatorname{rot}_{q_3} A \vec{e}_{q_3} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{q_1} & \vec{e}_{q_2} & \vec{e}_{q_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ A_{q_1} & A_{q_2} & A_{q_3} \end{vmatrix}, \tag{2.11}$$

где $\vec{e}_{q_i} (i = 1, 2, 3)$, единичные орты по осям $\{q_1, q_2, q_3\}$ соответственно; $\vec{A}_{q_i} (i = 1, 2, 3)$ — составляющие вектора по соответствующим осям. Если раскрыть матрицу в (2.11), то окончательно получим

$$\operatorname{rot} \ \vec{A} = \frac{1}{e_{q_2} e_{q_3}} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} \left(e_{q_3} A_{q_3} \right) - \frac{\partial}{\partial q_3} \left(e_{q_2} A_{q_2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{e_{q_3} e_{q_1}} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} \left(e_{q_1} A_{q_1} \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(e_{q_3} A_{q_3} \right) \right] + \frac{1}{e_{q_1} e_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(e_{q_2} A_{q_2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(e_{q_1} A_{q_1} \right) \right]. \tag{2.12}$$

Используя (2.11), (2.12), в декартовых координатах ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$) $e_{q1} = e_{q2} = e_{q3} = 1$ уравнения Максвелла (2.8), (2.10) могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z; \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{gathered} \tag{2.13}$$

2.1.3. ТЕОРЕМА ГАУССА И ПОСТУЛАТ МАКСВЕЛЛА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Теорема Гаусса в применении к ЭП гласит: поток вектора напряженности ЭП сквозь замкнутую поверхность в однородной и изотропной среде равен отношению количества электричества, заключенного в объеме пространства, ограниченного этой поверхностью, к диэлектрической проницаемости ε среды:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = q/\varepsilon. \tag{2.14}$$

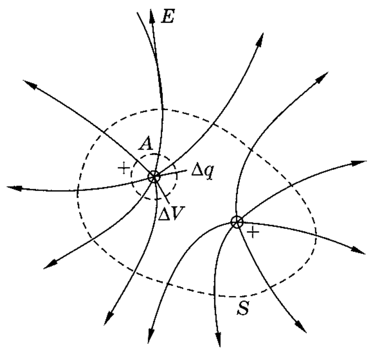


Рис. 2.6
Поток вектора электрической напряженности через замкнутую поверхность

Однако по величине этого интеграла еще нельзя судить о распределении электричества внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Для этого следует применить теорему Гаусса в дифференциальной форме. Допустим, что необходимо выяснить, находится ли электричество в малом объеме ΔV, заключающем в себе точку A, и какова объемная плотность электричества в этой точке (рис. 2.6). Поток вектора $\vec{E}$ сквозь малую поверхность, ограничивающую объем ΔV, равен деленному на ε малому заряду Δq, заключенному внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \Delta q/\varepsilon. \tag{2.15}$$

Разделим обе части уравнения (2.15) на ΔV и найдем предел, к которому стремится отношение при $\Delta V \to 0$:

$$\lim \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{s}}{\Delta V} = \lim \frac{\Delta q}{\varepsilon \Delta V}, \quad \Delta V \to 0. \tag{2.16}$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения (2.16), называется расхождением или дивергенцией вектора $\vec{E}$ и кратко обозначается $\operatorname{div} \vec{E}$. В правой части (2.16) получается объемная плотность электрического заряда в данной точке пространства, деленная на ε. Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon. \tag{2.17}$$

Термин «расхождение» хорошо характеризует особенности поля всюду, где $\rho \neq 0$ и $\rho = 0$. Положительный заряд можно рассматривать как «источник» линий напряженности ЭП (см. рис. 2.7*а*). Отрицательный заряд — «сток» линий (рис. 2.7*б*). При отсутствии заряда в некотором объеме ΔV ($\rho = 0$) линии напряженности не начинаются и не кончаются, а лишь проходят (рис. 2.7*в*).

В такой области ЭП называют соленоидальным. Расхождение вектора $\vec{E}$ во всех равно нулю: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

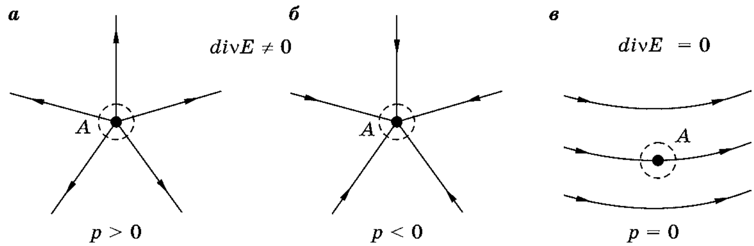


Рис. 2.7
Прохождение электрического поля через объем, не содержащий электрического заряда

Значение расхождения вектора не зависит от выбора системы координат, и соответственно уравнение (2.17) инвариантно в отношении системы координат. Однако выражения расхождения некоторого вектора $\vec{A}$ через составляющие получаются различными в разных системах координат.

В обобщенной ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{e_{q_1}e_{q_2}e_{q_3}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(e_{q_2}e_{q_3}A_{q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(e_{q_3}e_{q_1}A_{q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(e_{q_1}e_{q_2}A_{q_3}\right)\right]. \quad (2.18)$$

В частности, для декартовой системы координат x, y, z:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2.19)$$

Окончательно теорему Гаусса в дифференциальной форме можно записать в виде

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \rho/\varepsilon, \quad (2.20)$$

где $\vec{\nabla}$ — векторный оператор Гамильтона.

В случае неоднородной и анизотропной среды, где диэлектрическая проницаемость является переменной величиной по разным координатным осям (ε – var), необходимо ввести ε под знак интеграла, а вместо $\vec{E}$ использовать вектор электрического смещения (электрическую индукцию) $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, откуда вместо (1.20) получаем

$$\operatorname{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\vec{D} = \rho. \quad (2.21)$$

Заметим попутно, что выражение $\operatorname{rot}\vec{A}$ может быть записано через знак $\vec{\nabla}$ в виде векторного произведения $[\vec{\nabla}\vec{A}]$.

2.2. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ МАГНИТНОГО ПОТОКА И ТОКА

Принцип непрерывности магнитного потока подразумевает, что магнитные линии нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны, т. е. магнитный поток, проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю (в литературе — постулат Максвелла):

$$\oint_S \vec{B}d\vec{s} = 0. \quad (2.22)$$

В дифференциальной форме уравнение (2.22) примет вид

$$\operatorname{div}\vec{B}=0. \tag{2.23}$$

Аналогично выглядит принцип непрерывности электрического тока. Полный ток «проводимости, переноса и смещения», проходящий сквозь любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали, равен нулю:

$$\oint_S \vec{\delta}d\vec{s}=0, \tag{2.24}$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{div}\vec{\delta}=0. \tag{2.25}$$

Выражения (2.23) и (2.25) справедливы во всех точках пространства.

2.3. ТЕОРЕМЫ ОСТРОГРАДСКОГО И СТОКСА

Теоремы Остроградского и Стокса имеют чисто геометрический смысл и справедливы для произвольного вектора $\vec{A}$.

Теорема Остроградского. Для любого вектора $\vec{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными в области V и на поверхности S,

$$\oint_S \vec{A}d\vec{s}=\int_V \operatorname{div}\vec{A}dv. \tag{2.26}$$

Уравнение (2.26) является формулировкой теоремы Остроградского и имеет геометрический смысл преобразования объемного интеграла в поверхностный. Для напряженности $\vec{E}$:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{s}=\int_V \operatorname{div}\vec{E}dv, \tag{2.27}$$

что следует из ранее приведенных уравнений.

Теорема Стокса. Для любого вектора $\vec{A}$, непрерывного вместе со своими первыми производными на поверхности S и на контуре l:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l}=\int_S \operatorname{rot}\vec{A}d\vec{s}. \tag{2.28}$$

Для напряженности $\vec{H}$:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l}=\int_S \operatorname{rot}\vec{A}d\vec{s}, \tag{2.29}$$

что также следует из ранее приведенных уравнений.

Уравнения (2.28), (2.29) имеют смысл преобразования поверхностного интеграла в интеграл по контуру.

Приведенные теоремы важны при рассмотрении характеристик поля на сопряженных поверхностях, отделяющих одну область от другой; при выводе граничных условий.

2.4. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Векторные уравнения (2.8), (2.10)

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}; \ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

дополняются двумя скалярными соотношениями (2.21), (2.23):

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho; \ \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Соотношение (2.21) можно использовать для определения плотности электрического заряда ρ, а (2.23) означает, что в природе не существует свободных магнитных зарядов.

Здесь представлена полная система уравнений ЭМП, позволяющая определить характерные векторы поля — $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{\delta}$. Плотность тока $\vec{\delta}$, как отмечалось ранее (2.3), может быть выражена через три составляющие:

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho\vec{v}.$$

При этом надо иметь в виду, что по самому смыслу первой и третьей составляющих они не могут иметь места в одной и той же точке пространства одновременно. Две первые составляющие могут иметь место одновременно в полупроводящей среде. Однако в хорошо проводящих веществах всегда можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым. А в изолирующих веществах обычно пренебречь первым слагаемым по сравнению со вторым.

При рассмотрении задачи о распространении ЭМП в бесконечной среде система только что рассмотренных уравнений должна быть дополнена условиями в начале системы координат и в бесконечности. При этом следует принять во внимание, что мощности источников ЭМП в начале координат ограничены, следовательно, ограничены электрические и магнитные напряженности и их производные. В бесконечности электрические и магнитные напряженности и их производные стремятся к нулю.

2.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Для того чтобы привести уравнения Максвелла к виду, удобному для нахождения напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$, необходимо, считая, что плотность тока

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(током переноса пренебрегаем), преобразовать уравнение (2.8) путем дифференцирования (взяв от него rot):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{\delta} = \operatorname{rot}\left(\gamma\vec{E} + \frac{\partial \varepsilon\vec{E}}{\partial t}\right). \tag{2.30}$$

Учитывая уравнение (2.10) и известное преобразование векторной алгебры (см. Приложение),

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}, \ \vec{A} = \vec{H}, \vec{E},$$

где $\Delta = \nabla^2$ — лапласиа́н, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = -\gamma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \tag{2.31}$$

Аналогичное уравнение можно получить и для напряженности $\vec{E}$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\gamma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.32}$$

Если учесть, что $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ всегда, в то время как $\operatorname{div}\vec{E} \equiv 0$ — в областях, где отсутствуют заряды (это соответствует условиям распространения ЭМП в непроводящей среде), уравнения (2.31), (2.32) преобразуются к виду

$$\Delta\vec{H} + \gamma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.33}$$

$$\Delta\vec{E} + \gamma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.34}$$

Уравнения (2.33) и (2.34) называются волновыми уравнениями и позволяют определить шесть неизвестных: три составляющие магнитной напряженности и три составляющие электрической напряженности.

2.6. ПОТЕНЦИАЛЫ ЭМП

2.6.1. ВЕКТОРНЫЙ И СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ ЭМП

В дальнейшем будем рассматривать гармонические во времени колебания, имея в виду, что негармонические колебания могут быть изучены путем разложения в ряд, или интеграл, Фурье по гармоническим составляющим.

Принимая во внимание, что вектор магнитной напряженности $\vec{H}$ является соленоидальным $(\operatorname{div}\vec{H} = 0)$, можно ввести вектор $\vec{A}$ и функцию φ в виде

$$\vec{H} = (1/\mu)\operatorname{rot}\vec{A}, \tag{2.35}$$

$$\vec{E} = j\omega\vec{A} - \operatorname{grad}\varphi. \tag{2.36}$$

Вектор $\vec{A}$ называется векторным потенциалом, функция φ — скалярным потенциалом ЭМП.

Заметим, что потенциалы $\vec{A}$, φ, задающие поле $\{\vec{H}, \vec{E}\}$, определяются неоднозначно, с точностью до произвольной функции F:

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \operatorname{grad}F, \quad \varphi_1 = \varphi + j\omega F. \tag{2.37}$$

Введем дополнительное условие, связывающее потенциалы $\vec{A}$, φ, которое называется условием Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} - (jk^2/\omega)\varphi = 0, \tag{2.38}$$

где k — волновое число $(k = \sqrt{\omega\gamma\mu})$.

Выбирая функцию F из уравнения

$$\Delta F + k^2 F = (jk^2/\omega)\varphi - \operatorname{div}\vec{A}, \tag{2.39}$$

можно показать, что потенциалы (2.35), (2.36) удовлетворяют условию (2.38).

Из условия Лоренца (2.38) следует, что потенциалы $\vec{A}$ и φ удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = 0, \tag{2.40}$$

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0. \tag{2.41}$$

Таким образом, любое ЭМП представимо через векторный и скалярный потенциалы, которые удовлетворяют уравнениям (2.35), (2.36) и условию (2.38).

Можно показать обратное: если потенциалы $\vec{A}$ и φ удовлетворяют уравнениям (2.35), (2.36) и условию (2.38), то поле $\{\vec{H}, \vec{E}\}$ является ЭМП, т. е. удовлетворяет системе уравнений Максвелла (2.8), (2.10).

В результате при помощи векторного поля $\vec{A}$ и скалярной функции φ поиск шести скалярных составляющих векторов $\{\vec{H}, \vec{E}\}$ сводится к нахождению четырех скалярных величин — функции φ и трех составляющих вектора $\vec{A}$.

Аналогично, используя соленоидальность вектора электрической напряженности ($\operatorname{div}\vec{E} = 0$), можно представить поле $\{\vec{H}, \vec{E}\}$ в виде

$$\vec{H} = -j\omega\vec{A}^* - \operatorname{grad}\varphi, \tag{2.42}$$

$$\vec{E} = (1/\varepsilon')\operatorname{rot}\vec{A}^*. \tag{2.43}$$

При условии $\operatorname{div}\vec{A}^* + (jk^2/\omega)\varphi^* = 0$ потенциалы $\vec{A}^*$, φ^* удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (2.40), (2.41).

2.6.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ И МАГНИТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ ГЕРЦА

Соотношение Лоренца (2.38) позволяет сократить число скалярных потенциалов, определяющих ЭМП, до трех, т. е. ЭМП может быть представлено через один вспомогательный вектор $\vec{\Pi}$. Положим,

$$\vec{A} = -(jk^2/\omega)\vec{\Pi}. \tag{2.44}$$

Тогда условие (2.38) будет выполнено, если

$$\varphi = -\operatorname{div}\vec{\Pi}. \tag{2.45}$$

Отсюда следует, что $\vec{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi} = 0. \tag{2.46}$$

Можно показать, что функция φ (2.48) удовлетворяет уравнению (2.44) при условии (2.45). Подставляя (2.44), (2.45) в (2.8), (2.10), получаем представление ЭМП через вектор $\vec{\Pi}$:

$$\vec{H} = -j\omega\varepsilon'\operatorname{rot}\vec{\Pi}, \tag{2.47}$$

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}.$$

Вектор $\vec{\Pi}$ называется электрическим вектором Герца.

Аналогично, полагая

$$\vec{A}^* = -\left(jk^2/\omega\right)\vec{\Pi}^*, \ \ \varphi^* = -\operatorname{div}\vec{\Pi}^*,$$

где $\vec{\Pi}^*$ удовлетворяет уравнению (2.10). Из (2.10) получаем представление ЭМП через вектор $\vec{\Pi}^*$:

$$\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}^*, \tag{2.48}$$
$$\vec{E} = j\omega\mu\operatorname{rot}\vec{\Pi}^* + k^2\vec{\Pi}^* = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}^*.$$

Вектор $\vec{\Pi}^*$ называется магнитным вектором Герца. В дальнейшем при рассмотрении распространения ЭМП в многослойных средах часто будет использоваться вектор Пойнтинга $\vec{\mathit{\Pi}}$, имеющий размерность удельной мощности. Его не следует путать с векторами Герца — $\vec{\Pi}$, $\vec{\Pi}^*$, которые отмечены несколько иным написанием.

2.7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В НИЗКОЧАСТОТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

При рассмотрении задач по расчету ЭМП в многосвязных областях наличие параметра малости $\alpha = kb$, где b — диаметр тела, позволяет использовать прием, основанный на близости такой задачи к задачам магнитостатики и электростатики.

Допустим, что малое тело или оболочка малой толщины помещены в ЭМП. И пусть линейный размер тела b мал по сравнению с длиной волны: $kb \ll 1$, т. е. $b \ll \lambda$, где $\lambda = (2\pi/k)$ — длина волны. Так как волновой характер поля проявляется в масштабах длины волны, то в масштабах диаметра изучаемого тела поле является слабо меняющимся и может рассматриваться как электростатическое или магнитостатическое. Строго математически этот качественный переход осуществляется из уравнений Максвелла. Умножая уравнения (2.1), (2.2) на соответствующие постоянные, получим

$$C_1\operatorname{rot}\vec{E} = j\alpha\vec{H}, \ \ C_1 = b\left(\varepsilon'/\mu\right)^{0,5}, \tag{2.49}$$
$$C_2\operatorname{rot}\vec{H} = -j\alpha\vec{E}, \ \ C_2 = b\left(\mu/\varepsilon'\right)^{0,5}.$$

Раскладывая поля по малому параметру α:

$$\vec{E} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\vec{E}_k, \ \ \vec{H} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\vec{H}_k,$$

после подстановки в (2.49) получаем

$$C_1\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\operatorname{rot}\vec{E}_k = j\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{k+1}\vec{H}^k, \tag{2.50}$$
$$C_2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\operatorname{rot}\vec{H}_k = -j\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{k+1}\vec{E}^k.$$

Пренебрегая величинами порядка малости α, записываем уравнения Максвелла в низкочастотном приближении:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}_0 = 0,\ \mathrm{rot}\,\vec{E}_0 = 0. \tag{2.51}$$

На основании (2.51) поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ могут быть представлены через электростатический потенциал u, а также магнитостатический потенциал v в виде

$$\vec{E}_0 = -\mathrm{grad}\,u,\ \vec{H}_0 = -\mathrm{grad}\,v.$$

В соответствии с условиями (2.51): $\mathrm{div}\,\vec{E}_0 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H}_0 = 0$ оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0,\ \ \Phi \in [u,\ \ v]. \tag{2.52}$$

В случаях, когда величиной kb нельзя пренебречь из-за соизмеримости геометрических размеров системы и длины волны ЭМП, необходимо при решении дифракционных задач использовать полные волновые уравнения.

Поскольку в дальнейшем при решении задач низкочастотного ЭМП будем пользоваться уравнениями Лапласа (2.52) для скалярных потенциалов, граничные условия на оболочках разного типа также необходимо преобразовать в граничные условия для потенциалов.

Более подробно о скалярных и векторных потенциалах ЭМП можно прочитать в [1.1], [1.2].

2.8. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Как следует из п. 2.3–2.6, ЭМП можно описать уравнениями математической физики. Самый общий вид нестационарного ЭМП может быть представлен волновыми уравнениями (2.33), (2.34):

$$\Delta \vec{H} + \gamma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{E} + \gamma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Если ЭМП можно рассматривать как квазистатическое и использовать при рассмотрении символический метод, уравнения Максвелла могут быть приведены к уравнениям Гельмгольца:

1) для напряженностей ЭМП $\vec{F} \in [\vec{E}, \vec{H}]$,

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0;$$

2) для векторного $\vec{F}$ **и скалярного Ф потенциалов**

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0,$$
$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

где $\vec{F} \in [\vec{A}, \vec{A}^*]$ — соответственно векторный магнитный и векторный электрический потенциалы, $\Phi \in [\varphi, \varphi^*]$ — соответственно скалярный электрический и скалярный магнитный потенциалы.

3) для потенциалов Герца

$$\Delta\vec{F} + k^2\vec{F} = 0,$$

где $\vec{F} \in [\vec{\Pi},\ \vec{\Pi}^*]$ — соответственно магнитный и электрический потенциалы Герца.

Для низкочастотных квазистатических полей уравнения Максвелла приводятся к уравнениям Лапласа или Пуассона:

4) для скалярных потенциалов

$$\Delta\Phi = 0,$$

где $\Phi \in [u,\ v]$ — соответственно магнитный и электрический скалярные потенциалы;

5) для векторного потенциала

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{\delta}.$$

Для статических полей уравнения Максвелла также приводятся к уравнениям Лапласа или Пуассона.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой ЭМП?
2. Какими величинами можно оценить качественные и количественные характеристики ЭМП?
3. Какие уравнения положены в основу модели ЭМП?
4. Какие поля можно отнести к статическим, квазистатическим и переменным?
5. Какими уравнениями математической физики можно описать статические ЭП, МП?
6. Какими уравнениями математической физики можно описать квазистатические ЭП, МП?
7. Какими уравнениями математической физики можно описать переменные ЭМП?
8. Каким способом можно уменьшить размерность уравнений, описывающих ЭМП?
9. Объясните физический смысл скалярного и векторного магнитных потенциалов.
10. Каким образом определяется векторный магнитный потенциал и как он вводится?
11. Что представляет собой скалярный электрический потенциал и как он вводится?
12. Объясните физический смысл теоремы Гаусса.
13. Объясните физический смысл теоремы Остроградского.

3

ГЛАВА 3

ЧАСТНЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

3.1.1. ОБЩИЕ ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

Ранее была рассмотрена полная модель ЭМП. На практике чаще приходится встречаться с частными моделями ЭМП. Из них можно выделить статические модели. Эти модели поля соответствуют условиям, когда отсутствуют изменения во времени и нет электрических токов, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}=0,\ \vec{\delta}=0. \tag{3.1}$$

В этом случае основные уравнения примут вид

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{H}=0,\ \operatorname{rot}\vec{E}=0,\\ \operatorname{div}\vec{B}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=\rho,\\ \vec{B}=\mu\vec{H},\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

В уравнениях (3.2) отсутствует связь между электрическими и магнитными величинами. Поэтому можно отдельно рассматривать модель электростатического поля (ЭСП):

$$\operatorname{rot}\vec{E}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=\rho,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}, \tag{3.3}$$

и модель магнитостатического поля (МСП):

$$\operatorname{rot}\vec{H}=0,\ \operatorname{div}\vec{B}=0,\ \vec{B}=\mu\vec{H}. \tag{3.4}$$

Из уравнений (3.3), (3.4) следует, что ЭСП и МСП могут существовать совершенно независимо друг от друга.

3.1.2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

ЭСП образуется системой неподвижных относительно наблюдателя, заряженных тел при отсутствии электрических токов. Если в системе нет намагниченных тел, то МП отсутствует. Следовательно, всюду

$$\vec{\delta}=0,\ \vec{B}=0,\ \vec{H}=0.$$

Из системы уравнений ЭМП остается совокупность уравнений (3.3)

$$\operatorname{rot}\vec{E}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=\rho,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}.$$

Условие $\operatorname{rot}\vec{E}=0$ свидетельствует, что ЭСП имеет безвихревой характер. Согласно теореме Стокса (2.28), для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l}=\int_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{s}=0.$$

Таким образом, условие $\operatorname{rot}\vec{E}=0$ выражает важное положение: в ЭСП линейный интеграл вектора $\vec{E}$ вдоль любого замкнутого контура равен нулю. Соответственно в ЭСП линейный интеграл вектора $\vec{E}$, взятый от точки A до точки B, не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек A и B. Это обстоятельство дает возможность ввести понятие потенциала ЭСП. Потенциал ЭСП в точке A определяется в виде (рис. 3.1)

$$\varphi_A^Э=\int_A^P \vec{E}d\vec{l},$$

потенциал в точке P равен нулю. Линейный интеграл вектора $\vec{E}$ вдоль некоторого пути от точки A до точки B есть разность потенциалов $\varphi Э$ в точках A и B:

$$\varphi^Э=\int_A^B \vec{E}d\vec{l}=\varphi_{\mathrm{A}}^Э-\varphi_{\mathrm{B}}^Э.$$

Расчет потенциала $\varphi^Э$ может быть выполнен по уравнению Пуассона:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi^Э\equiv\nabla^2\varphi^Э=-\frac{\rho}{\varepsilon},\tag{3.5}$$

использовав зависимости (3.3) в виде

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon},\ \vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi^Э.$$

В точках незаряженной области ($\rho=0$) потенциал $\varphi^Э$ подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\varphi^Э=0.\tag{3.6}$$

Аналогичные уравнения второго порядка можно получить и для вектора $\vec{E}$, используя известное тождество векторного анализа (см. Приложение):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}-\nabla^2\vec{E}.$$

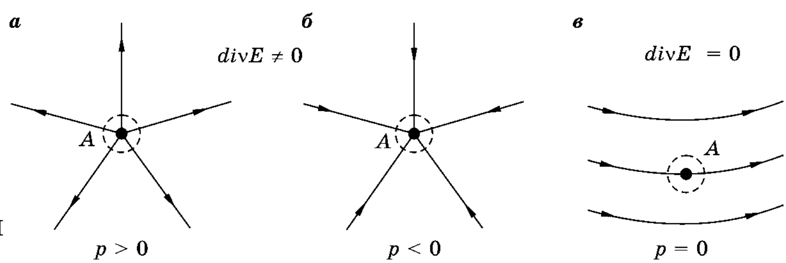


Рис. 3.1
Потенциал ЭСП
в точке A

Используя зависимости (3.5), получаем уравнение

$$\nabla^2 \vec{E} = \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

В точках, где $\rho = 0$,

$$\nabla^2 \vec{E} = 0. \tag{3.8}$$

3.1.3. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Если рассматривать области, не содержащие тока $(\vec{\delta} = 0)$, то систему уравнений для магнитостатики можно записать в виде (3.4)

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0, \ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \ \vec{B} = \mu\vec{H}.$$

Первое из дифференциальных уравнений позволяет ввести

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi^M, \tag{3.9}$$

где φ^M — магнитостатический потенциал.

Из (3.14) следует, что в однородной среде (μ — const) магнитостатический потенциал подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\varphi^M = 0. \tag{3.10}$$

Как следует из уравнений (3.9) и (3.10), задачи магнитостатики и электростатики описываются идентично. А значит, решения магнитостатических задач могут быть получены из решения соответствующих электростатических задач простой заменой величин $\vec{E}$ на $\vec{H}$ и ε на μ.

3.2. МОДЕЛИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ

3.2.1. РАСЧЕТ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Если отвлечься от временных изменений любого вида, т. е. в уравнениях Максвелла (2.8) и (2.10) считать, что $\partial/\partial t = 0$, но учитывать МП постоянных во времени токов, получим основные уравнения электродинамики стационарных токов:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}, \ \operatorname{rot}\vec{E} = 0, \ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \ \operatorname{div}\vec{D} = \rho. \tag{3.11}$$

В этом случае уже существует связь между электрическими и магнитными величинами, выражаемая уравнениями

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E}, \ \operatorname{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E}. \tag{3.12}$$

Математически задача состоит в определении вихревого поля без источников по его вихрям. Уравнение $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ дает возможность выразить $\vec{B}$ через векторный потенциал (2.38):

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Вектор $\vec{H}$ также принято определять через векторный потенциал. Но логичней считать, что векторным потенциалом определяется именно вектор $\vec{B}$. Действительно, равенство $\operatorname{div}\vec{B}=0$ справедливо всегда, тогда как равенство $\operatorname{div}\vec{H}=0$ выполняется только в однородной среде.

Вектор $\vec{A}$ можно определить из уравнения $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{\delta}$ после его преобразования:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\mu\vec{\delta}. \tag{3.13}$$

Полагая $\operatorname{div}\vec{A}=0$, получим

$$\Delta\vec{A}=-\mu\vec{\delta}. \tag{3.14}$$

Для конечной области, ограниченной поверхностью a, имеем

$$\vec{A}=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\frac{\Delta\vec{A}}{r}dv+\frac{1}{4\pi}\int\limits_a\frac{\partial\vec{A}}{\partial n}\frac{1}{r}da-\frac{1}{4\pi}\int\limits_a\vec{A}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}da.$$

Распространяя интегрирование на всю область, в которой $\vec{\delta}\neq 0$, получим

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{\delta}}{r}dv. \tag{3.15}$$

С помощью векторного потенциала $\vec{A}$ можно рассчитать магнитный поток, сцепленный с замкнутым контуром, ограничивающим поверхность a:

$$\Phi=\int\limits_a\vec{B}d\vec{a}=\int\limits_a\operatorname{rot}\vec{A}d\vec{a}.$$

Но по теореме Стокса (2.28)

$$\int\limits_a\operatorname{rot}\vec{A}d\vec{a}=\oint\limits_L\vec{A}d\vec{l}$$

линейный интеграл векторного потенциала по замкнутому контуру равен магнитному потоку, сцепленному с этим контуром.

3.2.2. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Как было показано, векторный потенциал $\vec{A}$ играет принципиально ту же роль для МП (и других вихревых полей), как скалярный потенциал $\varphi^Э$ — для ЭСП.

На практике, однако, векторным потенциалом пользуются гораздо реже. Это объясняется тем, что для измерения разности электрических потенциалов существуют простые измерительные приборы (для измерения векторного потенциала таких приборов не существует), а также и тем, что эта разность потенциалов непосредственно участвует в выражении мощности, которая играет большую практическую роль. Кроме того, в практических задачах непосредственно виден смысл граничных значений $\varphi^Э$, которые задаются очень просто, в то время как в МП существующие для $\vec{A}$ граничные условия не так наглядны и должны быть определены через граничные условия для $\vec{H}$ и $\vec{B}$.

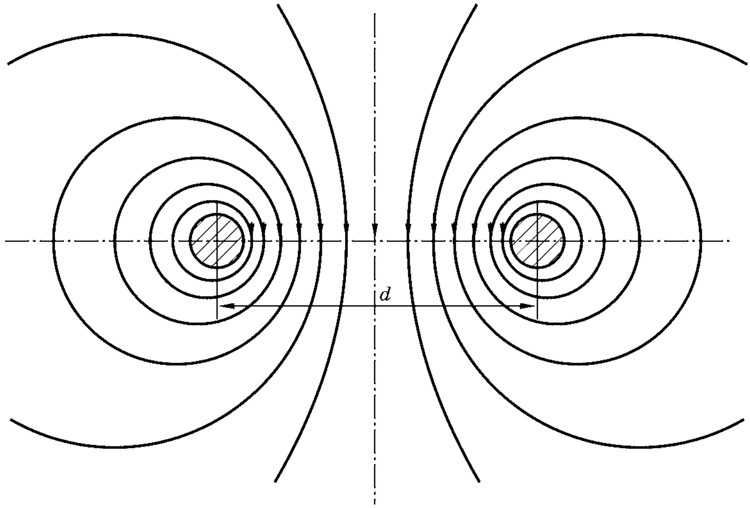


Рис. 3.2
Распределение МП около кругового кольца с током

Сравнивая уравнения, связывающие $\vec{B}$ и $\vec{\delta}$, с уравнениями, связывающими $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{\delta},\ \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \operatorname{div}\vec{A} = 0,$$

приходим к следующему заключению: если распределение магнитной индукции при данном распределении тока заменить фиктивным распределением плотности тока $\vec{\delta}_f$, то фиктивная магнитная индукция $\vec{B}_f$, соответствующая такому распределению тока, совпадает с искомым векторным потенциалом (рис. 3.2).

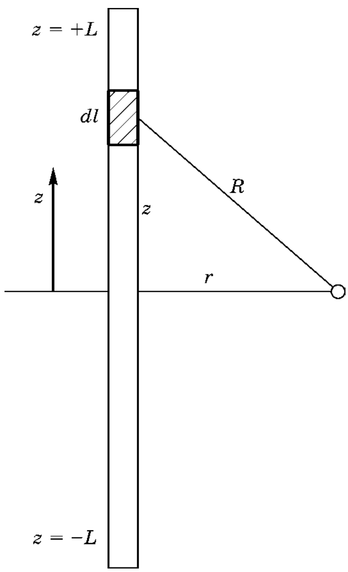


Рис. 3.3
МП прямолинейного провода

Это позволяет найти качественную картину, которая может быть полезна при поиске количественных результатов.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим поле бесконечно длинного прямолинейного провода. Все его элементы в данном случае направлены одинаково, например по оси $+z$ (рис. 3.3), поэтому и вектор $\vec{A}$ может иметь только z-составляющую:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L}^{L} \frac{dl}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L}^{L} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \qquad (3.16)$$

Если L безгранично велико, интеграл расходится так же, как потенциал бесконечно длинного провода с линейным зарядом. Однако единственная составляющая напряженности МП

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{Ir}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{1,5}} \qquad (3.17)$$

имеет уже конечное значение при $L \to \infty$. Значение этого интеграла приводится к выражению

$$H_\varphi = \frac{Ir}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(r^2+z^2)^{1{,}5}} = \frac{I}{2\pi r}. \qquad (3.18)$$

П р и м е р 3.2. Требуется рассчитать МП двух параллельных шин с постоянными токами I и $-I$. Сечение шин ah, расстояние между ними b (рис. 3.4). Магнитная проницаемость шин и окружающей среды μ — const.

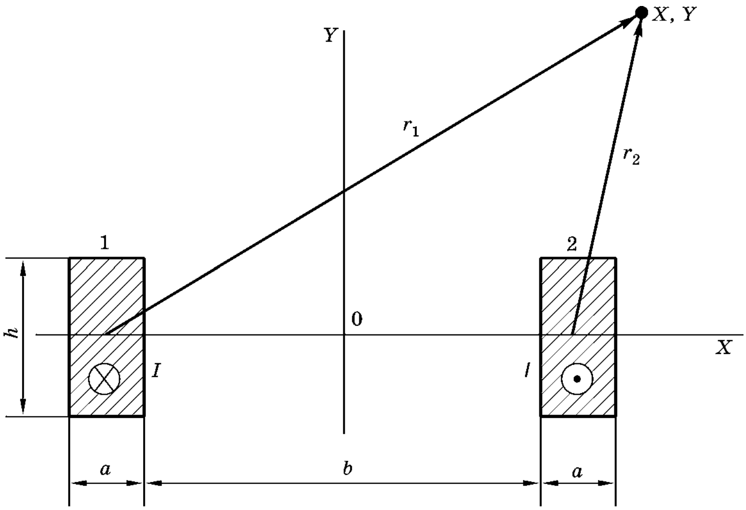


Рис. 3.4
МП двухпроводной линии из проводов прямоугольного сечения

МП в шинах описывается двумерным уравнением Пуассона для векторного потенциала A_z (в декартовых координатах x, y, z):

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu\delta_z. \qquad (3.19)$$

Вне шин правая часть уравнения (3.24) равна нулю.

Общее решение уравнения (3.24) можно записать в виде

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\delta_z}{r}dV,$$

учитывая равенство нулю алгебраической суммы токов линии.

Ток в каждой шине распределен по сечению равномерно, поэтому плотность тока в обеих шинах $\delta_z = I/ah$.

В декартовых координатах x, y, z A_z запишется в виде

$$A_z = \frac{\mu\delta_z}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-0{,}5h}^{+0{,}5h}dy\int_{-a-0{,}5b}^{-0{,}5b}\frac{dx}{\sqrt{r_1^2+z^2}} - \frac{\mu\delta_z}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-0{,}5h}^{+0{,}5h}dy\int_{0{,}5b}^{a+0{,}5b}\frac{dx}{\sqrt{r_2^2+z^2}}$$

или

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi a h}\int_0^{\infty} dz \int_{-0,5h}^{+0,5h} dy \left(\int_{-a-0,5b}^{-0,5b} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \int_{0,5b}^{a+0,5b} \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right). \qquad (3.20)$$

Здесь

$$r_1 = \sqrt{(X+x)^2 + (Y+y)^2},\ r_2 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$$

являются расстояниями от точки $(X, Y, 0)$, в которой определяется векторный потенциал $A_z(X, Y)$, до точек $(x, y, 0)$ сечения соответственно первой и второй шины. Интегрирование производится по всему объему, занятому током: по x и y — в пределах сечения шин, по z — в пределах длины шин.

Интегрирование выражения (3.20) для расчета $A_z(X, Y)$ в шинах или вблизи от них затруднительно. Если же рассматривать МП на расстояниях, значительно больших, чем поперечные размеры шин, r_1 и r_2 можно считать расстояниями до центров шин, тогда интегрирование по x и y дает соответственно a и h. Тогда

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right) dz = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

или

$$A_z(X, Y) = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(X + 0,5a + 0,5b)^2 + Y^2}}{\sqrt{(X - 0,5a - 0,5b)^2 + Y^2}}. \qquad (3.21)$$

Из выражения (3.21) посредством дифференцирования могут быть определены слагаемые напряженности поля:

$$H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y},\ H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}. \qquad (3.22)$$

Известно, что уравнение линий $\vec{H}$ имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_x}{H_y},\ -H_y dx + H_x dy = 0. \qquad (3.23)$$

Подставляя H_x и H_y из (3.23), получим

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}dx + \frac{\partial A_z}{\partial y}dy = dA_z = 0. \qquad (3.24)$$

Следовательно, линии постоянного векторного потенциала $dA_z = 0$ или A_z — const совпадают с линиями $\vec{H}$. Эти линии, как видно из (3.24), представляют собой окружности, аналогичные окружностям $\varphi^Э$ — const в поле двух противоположно заряженных параллельных проводов. Потенциал таких проводов имеет вид

$$\varphi^Э = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (3.25)$$

Из сказанного следует, что линии $\vec{H}$ и $\vec{E}$ ортогональны. Действительно, линии $\vec{E}$ ортогональны линиям $\varphi^Э$ — const, а линии $\varphi^Э$ — const, как было показано, совпадают с линиями $\vec{A}$ — const, а значит, и с линиями $\vec{H}$.

3.3. МОДЕЛИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Пренебрегая ЭМП, обусловленным токами $\left(\partial \vec{D} / \partial t\right)$, но, учитывая изменение электрической и магнитной напряженностей, получаем основные уравнения электродинамики почти статических, или квазистатических, ЭМП:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{\delta} = \gamma\vec{E},$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho,\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (3.26)$$

В уравнениях (3.26) существует уже довольно тесная связь между электрическими и магнитными величинами. При использовании символического метода представления гармонических (в данном случае синусоидальных) величин уравнения (3.26) сводятся к уравнениям Гельмгольца (2.43)–(2.44) для напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$.

3.4. МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В общем случае учитываются все временны́е изменения, приводящие к существованию нестационарного ЭМП:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{\delta} = \gamma\vec{E},$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho,\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}. \qquad (3.27)$$

Уравнения (3.27) приводятся к уравнениям вида (2.36) и (2.37), которые называются волновыми уравнениями. Они позволяют определить шесть неизвестных: три составляющие магнитной напряженности $\vec{H}$ и три составляющие электрической напряженности $\vec{E}$.

Квазистатические модели ЭМП отличаются от моделей нестационарных ЭМП наличием временно́го параметра, величина которого зависит не только от скорости изменения процесса во времени, но и от соотношения длины волны ЭМП и размеров тел, участвующих во взаимодействии.

Часто одна и та же задача может быть описана в зависимости от потребностей расчета как моделью квазистатического ЭМП, так и моделью нестационарного ЭМП, т. е. на основе общих волновых уравнений.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под статическими моделями ЭМП?
2. Напишите уравнения, составляющие модель ЭСП.
3. Напишите уравнения, составляющие модель МСП.
4. Какие поля относятся к квазистатическим?
5. Напишите уравнения, составляющие модель квазистатического ЭМП.
6. Какие из полей вызывают наибольшие трудности при расчетах и почему?
7. Как можно уменьшить трудоемкость расчетов?
8. Какие виды потенциалов вводятся при расчетах полей и почему?
9. Каким образом переходят от потенциалов к напряженностям ЭП и МП?
10. Всегда ли целесообразно прибегать к введению потенциалов поля?
11. Какой из потенциалов более информативен: скалярный или векторный?

4

Г Л А В А 4

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

4.1. ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Макроскопическое ЭМП в многосвязной неоднородной среде описывается системой дифференциальных уравнений Максвелла (1.8), (1.10), (1.21), (1.23), дополненных системой материальных связей (1.30)–(1.32). Уравнения Максвелла (1.8), (1.10) предполагают, что векторы ЭМП везде конечны, непрерывны и обладают необходимым количеством непрерывных производных. А для исключения многозначности из всего многообразия возможных решений уравнений выбирается такое, которое обладает определенными начальными условиями и требуемыми свойствами на граничных поверхностях.

Под граничными условиями понимают условия, которым соответствует поле на границах раздела сред с различными электромагнитными свойствами.

Из корпускулярной природы электричества и атомарной структуры поверхности материальных сред следует, что поверхность раздела, вообще говоря, не является идеальной границей, а ЭМП в окрестности границы не является непрерывным и характеризуется большими градиентами поля. Несмотря на это, интегральные характеристики поля сохраняют свои значения по обе стороны от пограничного тонкого слоя, что позволяет при математическом моделировании заменять приграничную область идеальной поверхностью разрыва сред. При этом ЭМП в переходной области исключается из рассмотрения, а из законов формирования ЭМП в окрестности границы устанавливаются граничные условия для предельных значений векторов поля на идеальной поверхности разрыва сред. По существу, многообразие задач по расчету ЭМП в многосвязных областях определяется многообразием условий на границах раздела материальных сред.

Типичными для системы уравнений ЭМП являются задачи, в которых поле необходимо найти в бесконечной области, в то время как причиной возникновения и поддержания состояния поля являются процессы, происходящие в конечной части пространства. При исследовании дифференциальных уравнений математической физики, с помощью которых описываются ЭМП, в решения входят постоянные интегрирования. Их определяют с помощью граничных условий.

При наличии в пространстве неоднородных поверхностей конечной толщины, разделяющих среды с различными свойствами, компоненты поля могут меняться скачкообразно при переходе через поверхность. В связи с этим при решении задач необходимо учитывать граничные эффекты, возникающие на поверхностях раздела сред. Математическое моделирование таких явлений сводится к замене неоднородных поверхностей идеальными поверхностями. При этом на идеальных поверхностях вводятся граничные условия, которым удовлетворяют предельные значения поля на соответствующих поверхностях.

Будем считать, что скачкообразный переход свойств одной среды в свойства другой является предельным случаем непрерывного перехода, при котором свойства одной среды переходят в свойства другой непрерывным образом в некоторой малой области, примыкающей к поверхности раздела. При этих предположениях для установления граничных условий необходимо учитывать уравнения Максвелла, которые выполнены также и в переходной области между двумя средами. В результате граничные условия являются прямым следствием уравнений Максвелла.

4.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

4.2.1. НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Магнитные линии на границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями преломляются. Выведем закон этого преломления, получив предварительно весьма важные в практическом смысле условия для напряженности МП и магнитной индукции на границе двух сред. При этом ограничимся рассмотрением частного случая равномерного поля в двух однородных средах с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2, граничащими по плоской поверхности (см. рис. 4.1), обозначив углы, составляемые магнитными линиями в одной и второй средах с плоскостью раздела сред соответственно через θ_1 и θ_2.

Рассмотрим замкнутый контур в виде весьма узкого прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 4.1), расположенного у границы раздела сред так, чтобы его длинные стороны AB и CD оказались в двух разных средах и параллельными плоскости раздела между средами. Применим для этого контура закон полного тока (2.1):

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I,$$

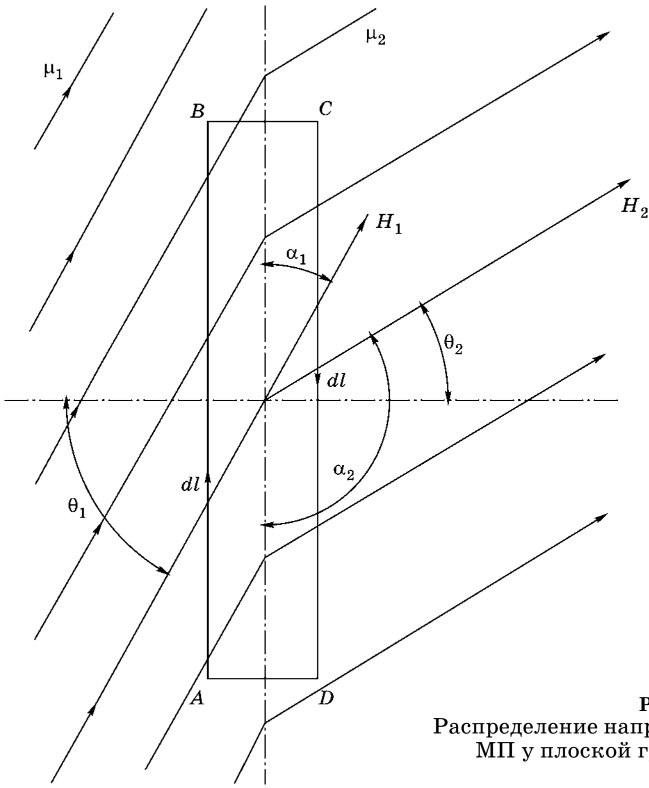


Рис. 4.1
Распределение напряженности однородного МП у плоской границы раздела сред

предполагая, что на границе раздела двух сред никаких токов не протекает, т. е. считая ток $\vec{I}$, сцепляющийся с контуром интегрирования, равным нулю:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 0. \qquad (4.1)$$

Разбивая интеграл по замкнутому контуру (4.1) на четыре интеграла по четырем прямым участкам пути интегрирования и пренебрегая интегралами по весьма коротким участкам BC и DA по сравнению с интегралами по длинным участкам AB и CD, будем иметь

$$\int_A^B H_1 \cos\alpha_1 dl + \int_C^D H_2 \cos\alpha_2 dl = 0,$$

где H_1 и H_2 — напряженности МП соответственно в первой и второй средах, при этом α_1 и α_2 — углы, составляемые векторами $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ с элементами $d\vec{l}$ пути интегрирования по первому и второму участникам (обход контура при интегрировании предполагаем по часовой стрелке).

Поскольку поля в обеих средах равномерны, векторы напряженности при переходе от точки к точке по пути интегрирования в пределах одной среды остаются неизменными как по величине, так и по направлению. Принимая также во внимание прямолинейность путей интегрирования и, следовательно, постоянство углов α_1 и α_2, можно величины H_1 и H_2, $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ вынести из-под интегралов. Так как оставшиеся интегралы от элементов dl пути интегрирования будут представлять собой длины этих участков, то предыдущее равенство можно записать в виде

$$H_1 \cos\alpha_1 l_{AB} + H_2 \cos\alpha_2 l_{CD} = 0.$$

Сокращая равенство на равные друг другу отрезки l_{AB} и l_{CD}, выражая углы α_1 и α_2 через исходные углы θ_1 и θ_2 ($\alpha_1 = 0{,}5\pi - \theta_1$, $\alpha_2 = 0{,}5\pi - \theta_2$), получим

$$H_1 \sin\theta_1 - H_2 \sin\theta_2 = 0$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \tag{4.2}$$

т. е. на границе раздела двух сред равны касательные составляющие вектора напряженности магнитного поля.

4.2.2. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Представим теперь на границе раздела двух сред весьма тонкий параллелепипед (рис. 4.2), две большие грани s_1 и s_2 которого, параллельные плоскости раздела, расположены соответственно в первой и второй средах.

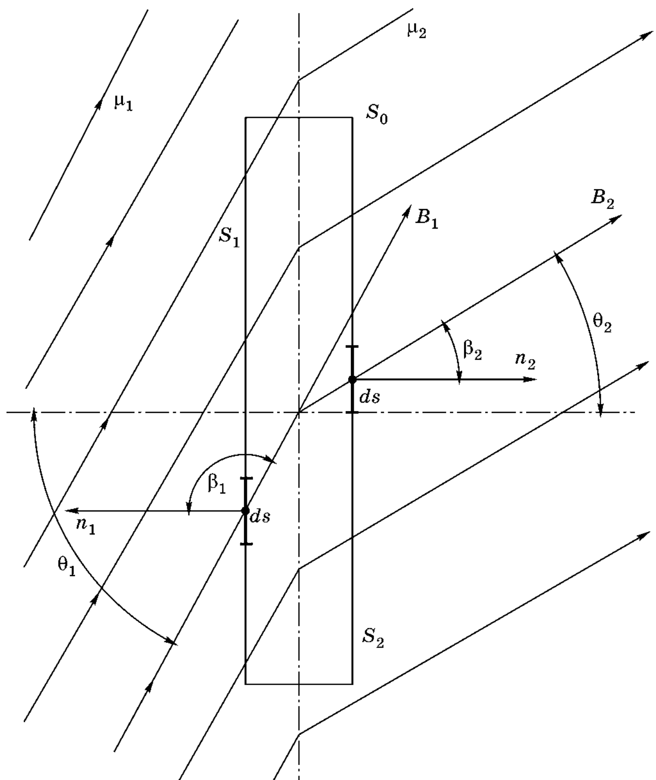


Рис. 4.2
Распределение индукции однородного МП у плоской границы раздела сред

Запишем для замкнутой поверхности этого параллелепипеда принцип непрерывности магнитных линий (1.22):

$$\oint_s \vec{B}d\vec{s} = 0.$$

Разбивая интеграл по замкнутой поверхности на три интеграла (по плоскостям s_1, s_2 и боковой поверхности параллелепипеда s_0) и пренебрегая ввиду малости поверхности s_0 последним интегралом по сравнению с двумя предыдущими, будем иметь

$$\int_{s_1} B_1 \cos\beta_1 ds + \int_{s_2} B_2 \cos\beta_2 ds = 0,$$

т. е. на границе раздела двух сред равны нормальные составляющие векторов магнитной индукции.

4.2.3. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Из полученных выше выводов относительно равенства касательных составляющих векторов напряженности МП:

$$H_1\sin\theta_1 = H_2\sin\theta_2,$$

и нормальных составляющих векторов магнитной индукции:

$$B_1\cos\theta_1 - B_2\cos\theta_2,$$

разделив первое равенство на второе, нетрудно получить закон преломления магнитных линий

$$\frac{H_1}{B_1}\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{H_2}{B_2}\mathrm{tg}\theta_2$$

или, принимая во внимание, что $B/H = \mu$,

$$\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (4.3)$$

Таким образом, отношение тангенсов углов падения и преломления магнитных линий при переходе через границу раздела двух сред равно отношению магнитных проницаемостей этих сред.

4.2.4. НАПРАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ У ПОВЕРХНОСТИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ

Остановимся на примере применения последнего закона. Здесь раскрывается весьма важное положение о направлении МП вблизи тел из ферромагнитного материала, в частности вблизи стальных магнитопроводов различных электромагнитных устройств.

В связи с тем что магнитная проницаемость ферромагнитного вещества во много раз больше магнитной проницаемости материала, обычно окружаю-

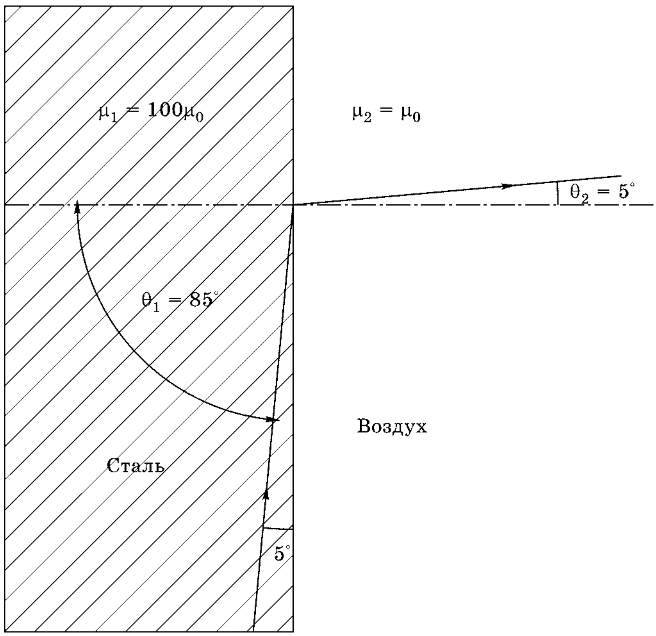


Рис. 4.3
Направление МП у границы поверхности ферромагнитного тела

щего магнитопровод (воздух, масло, пластмасса и т. д.), различие в тангенсах углов θ_1 и θ_2, составляемых магнитными линиями и нормалью к плоскости раздела сред, должно быть также весьма большим. Если, например, в ферромагнитной среде с магнитной проницаемостью $\mu = 100\mu_0$ магнитная линия будет подходить к границе раздела почти по касательной (рис. 4.3) $\theta_1 = 85°$, то в воздух эта магнитная линия выйдет почти перпендикулярно поверхности раздела ($\theta_2 = 5°$). В подавляющем большинстве практических случаев, когда мы имеем дело с магнитопроводами, выполненными из стали, магнитная проницаемость которой в несколько тысяч раз превышает магнитную проницаемость воздуха, угол θ_2 выхода магнитных линий из магнитопроводов значительно меньше. Поэтому принято считать, что магнитные линии выходят из стальных тел или входят в них практически под прямым углом к их поверхности.

Рассмотрим границу между ферромагнитным материалом и воздухом ($\mu_1 \gg \mu_2$). В этом случае $\mathrm{tg}\alpha_1 \gg \mathrm{tg}\alpha_2$; линия магнитной индукции, подходящая к границе под острым углом в стали, будет выходить в воздухе под углом α_2, тангенс которого мал. Практически можно считать угол α_2 близким к нулю; другими словами, линии магнитной индукции выходят из стали в воздух практически по нормали к поверхности стали. Это правило, однако, нельзя распространять на современные материалы для постоянных магнитов, магнитная проницаемость которых мала. Правило действительно лишь в случаях, когда провода с токами, определяющими МП, расположены в воздухе, а не в стали.

4.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

4.3.1. НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКОВ

Как показывает опыт, электрические линии на границе раздела двух диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями претерпевают преломление. Выведем закон этого преломления, связав напряженности поля и электрического смещения в двух диэлектриках у границы их раздела. При этом ограничимся рассмотрением частного случая равномерного поля в двух однородных и изотропных средах с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, граничащими по плоской поверхности (рис. 4.4).

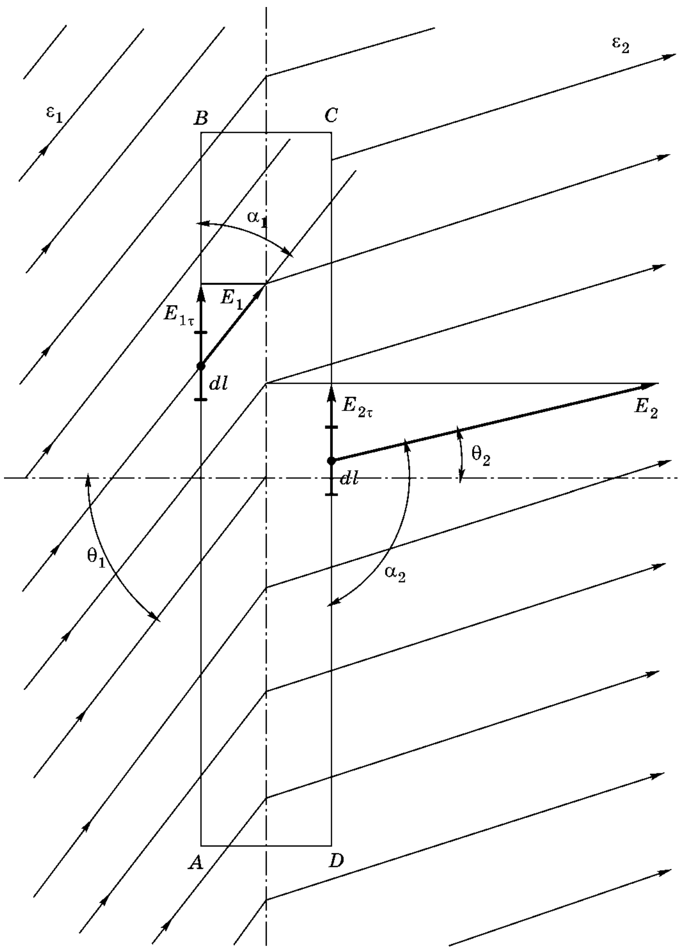


Рис. 4.4
Распределение напряженности однородного ЭП
у плоской границы раздела сред

Это, однако, не лишит общности полученные выводы, поскольку в случае неоднородных сред в кривой поверхности их раздела всегда можно ограничить рассматриваемую область до таких размеров, что разнородностью диэлектриков и кривизной поверхности раздела можно будет пренебречь.

Договоримся углы, составляемые электрическими линиями в одном и втором диэлектриках с нормалью к плоскости раздела сред, называть углами падения и преломления и обозначать соответственно через θ_1 и θ_2 (рис. 4.4).

Рассмотрим у границы раздела двух диэлектриков замкнутый контур в виде весьма узкого прямоугольника *ABCD* (рис. 4.4), расположенного так, что его длинные стороны *AB* и *CD*, направленные параллельно границе, находятся по разные стороны от нее.

Составим по этому контуру линейный интеграл вектора напряженности

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0,$$

который, как известно (1.5), равен нулю.

Разбивая этот интеграл на четыре интеграла по четырем прямым участкам замкнутого контура и пренебрегая интегралами по весьма коротким участкам *BC* и *DA* по сравнению с интегралами по длинным участкам *AB* и *CD*, получим

$$\int_A^B E_1 \cos\alpha_1 dl + \int_C^D E_2 \cos\alpha_2 dl = 0,$$

где E_1 и E_2 — напряженности электрического поля соответственно в первом и втором диэлектриках; α_1 и α_2 — углы, составляемые векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ с элементами пути интегрирования по двум длинным участкам (обход контура при интегрировании предполагаем по часовой стрелке).

Поскольку поля в обоих диэлектриках равномерны, а пути интегрирования прямолинейны, то интегралы, представляющие собой напряжения на каждой из длинных сторон прямоугольника, превращаются в простые произведения напряженностей на длины соответствующих отрезков и косинусы углов между ними:

$$E_1\cos\alpha_1 \cdot l_{AB} + E_2\cos\alpha_2 \cdot l_{CD} = 0.$$

Сокращая равенство на равные друг другу длины l_{AB} и l_{CD}, а также выражая углы α_1 и α_2 через введенные выше углы падения θ_1 и преломления θ_2: $\alpha_1 = 0,5\pi - \theta_1$, $\alpha_2 = 0,5\pi + \theta_1$, получим

$$E_1\sin\theta_1 - E_2\sin\theta_2 = 0$$

или

$$E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2,$$

откуда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \tag{4.4}$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ — касательные составляющие векторов напряженности в обоих диэлектриках к границе их раздела.

Таким образом, у границы раздела двух диэлектриков касательные составляющие векторов напряженности ЭП равны.

4.3.2.
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИКОВ

Представим теперь у границы раздела двух диэлектриков весьма тонкий параллелепипед (рис. 4.5), две большие грани s_1 и s_2 которого, параллельные плоскости раздела, расположены соответственно в первом и втором диэлектриках. Запишем для замкнутой поверхности этого параллелепипеда постулат Максвелла (2.14):

$$\oint \vec{D}d\vec{s} = Q = 0,$$

полагая, что на границе раздела диэлектриков зарядов нет ($Q = 0$).

Разбивая интеграл по замкнутой поверхности на три интеграла по плоскостям s_1, s_2 и суммарной поверхности s_0 четырех малых граней параллелепипеда и пренебрегая, ввиду малости площади s_0, последним интегралом по сравнению с двумя предыдущими, получим

$$\int_{s_1} D_1 \cos\beta_1 ds + \int_{s_2} D_2 \cos\beta_2 ds = 0,$$

где D_1 и D_2 — электрические смещения соответственно в первом и втором диэлектриках; β_1 и β_2 — углы между векторами D_1, D_2 и внешними нормалями к элементарным площадкам ds поверхностей s_1 и s_2.

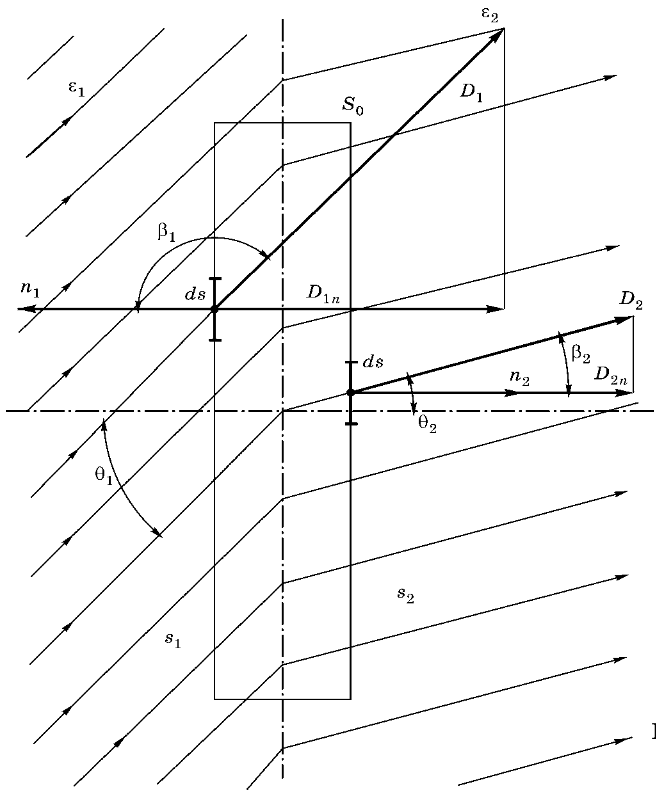


Рис. 4.5
Распределение индукции однородного ЭП у плоской границы раздела сред

Поскольку поля в обоих диэлектриках равномерны, а поверхности интегрирования являются плоскостями, рассматриваемые интегралы, представляющие собой потоки вектора смещения через большие грани параллелепипеда, превращаются в простые произведения смещений на площади этих граней и на косинусы углов β_1 и β_2:

$$D_1\cos\beta_1 \cdot s_1 + D_2\cos\beta_2 \cdot s_2 = 0.$$

Имея в виду равенство площадей s_1 и s_2, а также очевидные из рис. 4.5 соотношения между углами β и θ: $\beta_1 = \pi - \theta_1$, $\beta_2 = \theta_2$, получим

$$-D_1\cos\theta_1 + D_2\cos\theta_2 = 0$$

или

$$D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2,$$

т. е.

$$D_{1n} = D_{2n}, \tag{4.5}$$

где D_{1n}, D_{2n} — нормальные составляющие векторов смещения в обеих средах к границе их раздела.

Таким образом, у границы раздела двух диэлектриков нормальные составляющие векторов электрического смещения равны.

4.3.3. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

На границе раздела двух диэлектриков легко установить, используя полученные ранее выводы, равенства касательных составляющих векторов напряженности

$$E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2$$

и нормальных составляющих векторов смещения

$$D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2.$$

Поделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{E_1}{D_1}\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{E_2}{D_2}\mathrm{tg}\theta_2,$$

откуда, приняв во внимание, что $D/E = \varepsilon$, придем к соотношению

$$\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{4.6}$$

являющемуся законом преломления электрических линий: отношение тангенсов углов падения и преломления электрических линий при переходе через границу раздела двух диэлектриков равно отношению их диэлектрических проницаемостей.

Применяя этот закон к картине поля, изображенного на рис. 4.4, 4.5, придем к выводу, что в этих примерах $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, так как $\theta_1 > \theta_2$ и, следовательно, $\mathrm{tg}\theta_1 > \mathrm{tg}\theta_2$.

4.3.4.
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ У ПОВЕРХНОСТИ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

Поверхность проводящего тела является поверхностью равного потенциала. Помня о том, что эти поверхности перпендикулярны электрическим линиям, легко прийти к важному выводу, что электрические линии вблизи заряженных проводящих тел направлены перпендикулярно к их поверхности. А это обстоятельство, в свою очередь, позволяет выявить весьма простую связь интенсивности поля у поверхности таких тел с поверхностной плотностью их заряда.

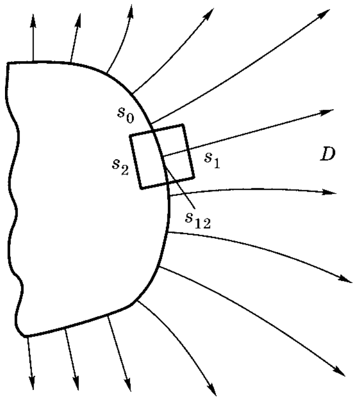


Рис. 4.6
ЭП у поверхности заряженных проводящих тел

Охватим небольшой участок поверхности тела замкнутой поверхностью в виде цилиндрика (рис. 4.6) с осью, перпендикулярной поверхности тела, и применим для этой замкнутой поверхности постулат Максвелла (2.14):

$$\oint D\cos\beta ds = Q.$$

Заряд Q, заключенный внутри этой поверхности, подсчитаем по поверхностной плотности σ заряда тела и площади s_{12}, вырезаемой цилиндриком на поверхности тела,

$$Q = \sigma s_{12}.$$

Интеграл же по замкнутой поверхности s разобьем на три интеграла — по донышкам s_1 и s_2 цилиндрика и его боковой поверхности s_0:

$$\int_{s_1} D\cos\beta ds + \int_{s_2} D\cos\beta ds + \int_{s_0} D\cos\beta ds = \sigma s_{12}.$$

Первый из этих интегралов, представляющий собой поток вектора электрического смещения сквозь плоскую площадку s_1, поставленную перпендикулярно полю, при достаточно малых размерах поверхности может быть заменен простым произведением смещения D на площадь s_1, так как в малом пространстве поле можно считать равномерным. Два следующих интеграла равны нулю: второй — потому что поле внутри проводящего тела отсутствует, а третий — в связи с тем, что линии поля, будучи перпендикулярными поверхности тела s_1, скользят вдоль боковой поверхности цилиндрика ($\cos\beta = 0$).

Таким образом, постулат Максвелла приводит нас к равенству

$$Ds_1 = \sigma s_{12},$$

которое после сокращения на равные друг другу площади s_1и s_{12} приобретает вид

$$D = \sigma, \qquad (4.7)$$

т. е. электрическое смещение у поверхности заряженного тела равно поверхностной плотности заряда σ в этом месте тела.

4.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим случай, когда ЭМП распространяется в ограниченных средах — в многослойных структурах и т. д. В этом случае система уравнений ЭМП, рассмотренная в гл. 2, п. 2.4, должна быть дополнена граничными условиями.

Граничные условия должны учитываться на поверхностях, разделяющих среды с разными свойствами, т. е. на поверхностях, где электромагнитные характеристики среды терпят разрыв первого рода. Должно также учитываться условие конечности энергии поля на краях поверхностей и линиях, где нарушается гладкость граничных поверхностей.

Основные граничные условия, связывающие векторы магнитной $\vec{H}$ и электрической $\vec{E}$ напряженностей на сторонах границы раздела сред S, были установлены как следствие уравнений Максвелла с помощью теорем Остроградского–Гаусса и Стокса:

$$[\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)]\big|_S=\vec{j}, \tag{4.8}$$

$$[\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)]\big|_S=-\vec{j}_M, \tag{4.9}$$

где $\vec{n}$ — единичная нормаль к граничной поверхности S; $\vec{H}_j, \vec{E}_j$ $(j=1,2)$ — векторы магнитной и электрической напряженностей ЭМП до ($j = 1$) и после ($j = 2$) границы S; $\vec{j}, \vec{j}_M$ — поверхностные плотности электрических и магнитных токов.

В электродинамике граничные условия (4.8), (4.9) постулируются как фундаментальные граничные условия, выполняемые на гладких поверхностях S любой формы. В итоге любая практическая задача в классической электродинамике по расчету компонент ЭМП в многосвязных средах математически формулируется как краевая задача для уравнений Максвелла с граничными условиями (4.8), (4.9).

В ряде случаев вместо уравнений (4.8), (4.9), связывающих напряженности ЭМП, можно использовать в граничных условиях векторы диэлектрического смещения и магнитной индукции:

$$(\vec{n},\vec{D}_2)\big|_S-(\vec{n},\vec{D}_1)\big|_S=\sigma, \tag{4.10}$$

$$(\vec{n},\vec{B}_2)\big|_S=(\vec{n},\vec{B}_1)\big|_S, \tag{4.11}$$

где σ — поверхностный электрический заряд на граничной поверхности S.

Уравнения (4.10), (4.11) являются следствием условий (4.8), (4.9) и уравнений Максвелла. Обобщенные уравнения ЭМП (гл. 2, п. 2.4) совместно с условиями (4.8), (4.9) позволяют однозначно определять поле в ограниченном пространстве при задании некоторых дополнительных условий в начале системы координат и в бесконечности.

Начальные условия необходимы в тех случаях, когда рассмотрению подлежат нестационарные ЭМП.

Условия в бесконечности трактуются следующим образом. Если среда обладает хотя бы минимальной проводимостью, условия состоят в требовании обращения поля в нуль в бесконечности от любой системы источников, лежащих внутри конечной области:

$$A_{q_i}\Big|_{q_1\to\infty}\to 0,\ \frac{\partial A_{q_i}}{\partial q_i}\Big|_{q_1\to\infty}\to 0\ (A=[H,E]). \tag{4.12}$$

Если же проводимость среды равна нулю, то необходимо рассматривать условия Зоммерфельда: поле вне конечных неоднородностей среды должно состоять лишь из волн, распространяющихся в бесконечность. Аналитическим признаком соблюдения условий Зоммерфельда является выполнимость предельных соотношений (i = 1, 2, 3)

$$\lim q_1\left(\frac{\partial A_{q_i}}{\partial q_1}-jkA_{q_i}\right)=0 \ \text{ при } \ q_1\to\infty, \tag{4.13}$$

где A_{q_i} — любая из составляющих магнитной или электрической напряженностей вторичного ЭМП; q_1 — радиальная координата в пространстве; k — волновое число.

Для двумерного пространства условия Зоммерфельда принимают вид ($i=1,2$)

$$\lim \sqrt{q_1}\left(\frac{\partial A_{q_i}}{\partial q_1}-jaA_{q_i}\right)=0 \ \text{ при } \ q_1\to\infty, \tag{4.14}$$

где q_1 — радиальная координата на плоскость, $a=\sqrt{k^2-\beta^2}, 0\le \arg a<\pi$.

Контрольные вопросы

1. С какой целью и при каких расчетах ЭП, МП и ЭМП прибегают к использованию граничных условий?
2. На каких поверхностях можно обратиться к основным граничным условиям?
3. Назовите несколько случаев применения граничных условий при изучении распределения МП в электротехнических устройствах.
4. Назовите несколько случаев применения граничных условий при изучении распределения ЭП в электротехнических устройствах.

5

ГЛАВА 5

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДЫ

5.1. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СРЕДЫ. ВИДЫ СРЕД

Связь векторов ЭМП в некоторой материальной среде характеризуется уравнениями

$$\vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{\delta} = \gamma\vec{E}, \tag{5.1}$$

где μ — магнитная проницаемость, ε — диэлектрическая проницаемость, γ — удельная проводимость.

Параметры μ, ε, γ (материальные параметры) среды, выражающие макроскопические электромагнитные свойства среды, устанавливаются экспериментально.

Свойства вакуума характеризуются постоянными ε_0, μ_0 ($\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}\cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м). Часто, для удобства характеристики среды по сравнению с вакуумом, вводят относительные проницаемости

$$\mu_r = \mu/\mu_0,\ \varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0. \tag{5.2}$$

Макроскопические параметры μ, ε, γ в большинстве случаев можно считать не зависящими от векторов поля. Соответственно этому употребляется выражение «линейные среды». Однако существуют и часто имеют важное техническое значение среды, отличающиеся заметной зависимостью макроскопических параметров от векторов поля. Такие среды называют нелинейными. В электротехнике, как известно, есть пара-, диа- и ферромагнетики — вещества, магнитная проницаемость которых отличается от магнитной проницаемости вакуума. Кроме того, у ферромагнетиков магнитная проницаемость сильно зависит от МП. Им аналогичны сегнетоэлектрики, обладающие сходной зависимостью диэлектрической проницаемости от ЭП. Нелинейность ряда сред проявляется в сильных полях. Сказанное нетрудно проиллюстрировать аналитически. Возьмем, например, уравнение для вектора электрической индукции (2.4), записанное в скалярной форме:

$$D = \varepsilon E.$$

Вместе с тем величину D как функцию от E можно разложить в ряд Тэйлора вида

$$D(E) = D\Big|_{E=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n D}{\partial E^n}\Big|_{E=0} \cdot E^n, \tag{А}$$

или

$$D(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n D}{\partial E^n}\Big|_{E=0} \cdot E^n, \tag{Б}$$

так как $D = 0$ при $E = 0$. Сравнивая (А) и (Б), приходим к следующему выражению диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon = \frac{\partial D}{\partial E}\Big|_{E=0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n D}{\partial E^n}\Big|_{E=0} \cdot E^{n-1}.$$

При достаточно малых полях можно пренебречь всеми членами разложения, кроме первого, не зависящего от E. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\partial D}{\partial E}\Big|_{E=0} \tag{5.3}$$

и соотношение (2.4) линейно.

Такая линеаризация зависимостей $D(E)$, $B(H)$ для большого числа сред в обычных условиях оправданна.

За исключением специальных случаев, относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$, где ε_0 — диэлектрическая проницаемость воздуха, большинства употребительных материалов больше единицы (табл. 5.1).

Относительная магнитная проницаемость чаще всего незначительно отличается от единицы. Вещество называется парамагнетиком, если $\mu_r > 1$, и диамагнетиком в случае $\mu_r < 1$. У ферромагнетиков магнитная проницаемость $\mu_r \gg 1$ (табл. 5.2).

В зависимости от величины электропроводности вещества делят на проводники и диэлектрики (изоляторы). Промежуточную область составляют полупроводники.

Таблица 5.1

Относительная диэлектрическая проницаемость ряда употребительных материалов, ε_r

Материалы	Проницаемость ε_r	Материалы	Проницаемость ε_r
Воздух 0°C	1,0006	Титанит бария ($BaTiO_3$)	$\approx 10^4$
Вода дистиллированная	81,1	Стеатит	6,25
Спирт этиловый	25,8	Слюда	5–6
Кварц плавленый	3,8	Парафин	2,2
Стекло	3–10	Тефлон	2,1

Таблица 5.2

Относительная магнитная проницаемость ряда употребительных материалов, μ_r

Материал	Начальная μ_r	Максимальная μ_r	Индукция B (у колена кривой намагничивания)
Чугун	—	600	—
Мягкая магнитная сталь	200	5500	2,15
Электротехническая сталь	400	7500	2,15
65% пермаллой	1500	400000	1,35
Суперпермаллой	100000	800000	0,75
Пермендюр	1100	4000	2,45
Перминвар	850	4000	1,25
Феррит	2500	8000	0,24
Оксифер–200	200	350	0,33

Во многих задачах теории ЭМП реальный проводник или диэлектрик с успехом заменяют идеализированным. При этом используются понятия идеального проводника ($\gamma \to \infty$) и идеального диэлектрика ($\gamma \to 0$).

В задачах теории поля, как правило, имеют дело с так называемыми изотропными средами, материальные свойства которых одинаковы для полей любых направлений. Согласно уравнениям (5.1) векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{D}$ и $\vec{E}$, а также $\vec{\delta}$ и $\vec{E}$ в этих средах параллельны. Заменив одно из соотношений, например для магнитной индукции в системе координат x, y, z, тремя скалярными

$$B_x = \mu H_x,\ B_y = \mu H_y,\ B_z = \mu H_z, \tag{5.4}$$

видим, что функционально связаны только одноименные проекции участвующих векторов ($\vec{B}$ и $\vec{H}$).

Однако существуют среды, проявляющие разные свойства в зависимости от направления поля. Они называются анизотропными. В случае общей анизотропии в МП (анизотропный ферромагнетик) вместо (5.4) будем иметь

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z, \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z, \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Каждая проекция вектора $\vec{B}$ здесь зависит от трех проекций $\vec{H}$, а векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ уже не параллельны.

Всю совокупность действий, производимых над проекциями вектора $\vec{H}$ для получения вектора $\vec{B}$, условно обозначают оператором

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

в результате чего форма уравнения для вектора магнитной индукции (5.1) сохраняется:

$$\vec{B} = \vec{\mu}\vec{H}. \tag{5.7}$$

Таблица 5.3

Удельные проводимости ряда проводников и диэлектриков, Сим/м при 20°C

Проводники		Диэлектрики	
Вещество	**Удельная проводимость, γ**	**Вещество**	**Удельная проводимость, γ**
Серебро	$6{,}14\cdot10^{7}$	Кварц плавленый	$2\cdot10^{-17}$
Медь (фольговая)	$5{,}15\cdot10^{7}$	Парафин	$10^{-14}/10^{-16}$
Алюминий	$3{,}54\cdot10^{7}$	Мрамор	$10^{-7}/10^{-9}$
Железо	$1{,}0\cdot10^{7}$	Стекло обычное	10^{-12}
Олово	$0{,}869\cdot10^{7}$	Сера	10^{-15}
Свинец	$0{,}48\cdot10^{7}$	Дерево парафинированное	$10^{-8}/10^{-11}$

Оператор $\ddot{\mu}$ называется тензором магнитной проницаемости, а коэффициенты при проекциях $\vec{H}$ — его компонентами.

Совершенно аналогично описывается анизотропия диэлектрических свойств и проводимости.

Различают понятия: поверхностная и пространственная анизотропия. Для технических приложений имеет большое значение понятия двух- и трехмерной анизотропии.

Анизотропные материалы находят применение в электротехнических устройствах, особенно в тех, которые работают при высоких частотах. А поэтому представляется важным уметь рассчитывать ЭП, МП и ЭМП в анизотропных средах.

Отметим еще одно понятие — неоднородная среда. Параметры μ, ε, γ такой среды меняются от точки к точке и могут быть представлены в функции пространственных координат. Возможны скачкообразные нарушения однородности, происходящие на границе физического тела.

В учебных задачах, как правило, рассматриваются линейные и изотропные среды.

В табл. 5.3 приведены удельные проводимости ряда употребительных проводников и диэлектриков.

5.2. СВЯЗЬ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ В ПОЛЯРИЗУЕМЫХ СРЕДАХ

5.2.1. ОБЩИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ

В общем случае вместо уравнений (5.1) связи между $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ выражаются равенствами

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \tag{5.8}$$

в которые входят векторы электрической поляризации и намагниченности (или магнитной поляризации) $\vec{P}$ и $\vec{M}$, равные соответственно электрическому и магнитному моментам единицы объема. Именно эти векторы характеризуют влияние среды на ЭМП. В частном случае они могут даже не зависеть от векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. В том случае, когда $\vec{P}$ и $\vec{M}$ пропорциональны соответственно векторам $\vec{E}$ и $\vec{H}$, имеет смысл введение постоянных ε и μ и применение уравнений $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$. В ферромагнитных материалах и сегнетоэлектриках $\vec{P}$ и $\vec{M}$ зависят от $\vec{E}$ и $\vec{H}$ сложным образом и в общем случае неоднозначны. Зависимости

$$\vec{P}=\vec{P}(\vec{E}),\ \vec{M}=\vec{M}(\vec{H})$$

в большинстве случаев могут быть заданы только графически.

В изотропной среде вектор $\vec{M}$ совпадает по направлению с векторами $\vec{H}$ и $\vec{B}$, а вектор $\vec{P}$ — с $\vec{D}$ и $\vec{E}$. Можно обозначить

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\mu_0\chi^m\vec{H},\\ \vec{P}&=\varepsilon_0\chi^e\vec{E},\end{aligned}\tag{5.9}$$

где коэффициент χ^m называется магнитной восприимчивостью, а χ^e — электрической восприимчивостью среды.

Рассмотрим подробнее эти явления.

5.2.2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Отличительной чертой идеального диэлектрика является отсутствие свободно перемещающихся заряженных частиц ($\gamma = 0$). Диэлектрик может состоять как из электрически нейтральных молекул, так и из ионов, связываемых неэлектрическими силами. В обоих случаях элементы среды — молекулы или кристаллические ячейки, внутри которых оказываются связанными по абсолютной величине разноименные заряды, — можно рассматривать как диполи. Это представление приводит к электростатической модели среды в виде системы произвольно ориентированных диполей. Описание модели остается неполным, пока не указан характер сил связи, удерживающих заряды внутри элементарных диполей и при всяком смещении стремящихся возвратить их в положение равновесия. Опыт показывает, что они подобны силам упругости, т. е. пропорциональны смещению. Положим, что в диэлектрической среде существует поле $\vec{E}$, обусловленное распределением заряда в области V с заданной плотностью. Действие его проявляется в смещении всех положительных связанных зарядов в направлении вектора $\vec{E}$ и всех отрицательных — в противоположном направлении. Это значит, что в поле $\vec{E}$ моменты всех элементарных диполей получают параллельные ему приращения. Эти приращения не только параллельны, но и пропорциональны вектору $\vec{E}$, так как они пропорциональны силе связи, уравновешенной в состоянии смещения силой поля qE. Итак,

$$p_i = p_{0i} + \chi E,\tag{5.10}$$

где p_i — момент произвольного диполя i в поле E; p_{0i} — его момент в отсутствие поля; а χ — коэффициент пропорциональности, определяемый силами связи.

Суммируя элементарные дипольные моменты в некоторой области ΔV, получаем

$$\Delta P = \sum_{\Delta V} p_i = \sum_{\Delta V} p_{0i} + N\chi E, \tag{5.11}$$

где N — число элементарных диполей внутри ΔV.

Сумма начальных моментов p_{0i} равна нулю, так как любые ориентации диполей равновероятны, пока нет внешнего поля $\vec{E}$. Относя обе части равенства (5.11) к единице объема и обозначая

$$\lim \frac{\Delta P}{\Delta V} = p, \quad \Delta V \to 0, \quad \frac{N\chi}{\varepsilon \Delta V} = \chi^e,$$

получаем соотношение

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \chi^e \vec{E}.$$

Вектор $\vec{p}$ представляет собой удельный электрический момент единицы объема диэлектрика и называется поляризованностью среды.

Сравнивая формулы (5.8)–(5.11) с ранее записанными выражениями относительных проницаемостей (5.2), находим, что

$$\varepsilon_r = 1 + \chi^e/\varepsilon_0. \tag{5.12}$$

Аналогичную модель, которую можно назвать магнитостатической, можно построить для ферромагнитной среды. Из тех же уравнений (5.8)–(5.11) и (5.2) находим

$$\mu_r = 1 + \chi^m/\mu_0. \tag{5.13}$$

В анизотропной среде векторы $\vec{B}, \vec{H}$ и $\vec{M}$, как и векторы $\vec{D}, \vec{E}$ и $\vec{P}$, не совпадают по направлению, однако формулы (5.10), (5.11) сохраняются, если ввести тензоры восприимчивостей. Они записываются аналогично тензорам проницаемостей (см. 5.6). Для тензора магнитной восприимчивости, например, можно записать

$$\vec{\chi}^{м} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \mu_{xx} - \mu_0 & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} - \mu_0 & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} - \mu_0 \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

5.3. РАЗГРАНИЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Используемые в электромашиностроении материалы значительно отличаются по своим свойствам в зависимости от области применения. Рассмотрим это на примере материалов, обладающих различными электропроводностями (для более широкого ознакомления со свойствами материалов можно воспользоваться любой из книг, посвященной электротехническим материалам).

Уделим особое внимание материалам (средам), занимающим по электропроводности промежуточное положение. К их числу, например, относятся: земля (сухая — $10^{-4}/10^{-5}$ Сим/м, влажная — $10^{-2}/10^{-3}$ Сим/м), дистиллированная вода — $2 \cdot 10^{-4}$ Сим/м, морская вода — 3/5 Сим/м. Перечисленные вещества (а с ними и ряд других) в одних полях ведут себя как проводники, а в других — как диэлектрики. Чтобы найти меру оценки этому явлению, надо сначала понять сущность качественного различия между проводниками и диэлектриками. Сравним идеальный диэлектрик с идеальным проводником. В первом случае ($\gamma = 0$) в среде может существовать лишь ток смещения, ибо первый член выражения плотности полного тока

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

равен нулю. Во втором случае ($\gamma \to \infty$), наоборот, существует только ток проводимости (второй член по сравнению с первым — величина бесконечно малая). Очевидно, что реальная среда должна быть признана близкой к идеальному проводнику, если ток проводимости значительно преобладает над током смещения. Тогда это проводник. При обратном соотношении токов смещения и проводимости среда является диэлектриком.

Рассмотрим поведение таких материалов в гармонически меняющихся полях. Пусть напряженность ЭП подчинена закону

$$\vec{E} = \vec{E}_m(x,y,z)\cos\omega t,$$

тогда плотности токов проводимости и смещения в произвольной точке $M(x, y, z)$ следующие:

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E}_m(x,y,z)\cos\omega t \text{ и } \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\omega\varepsilon\vec{E}_m(x,y,z)\sin\omega t.$$

Отношение их амплитуд

$$\frac{\delta_m}{(\partial D/\partial t)_m} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \quad (5.15)$$

есть мера оценки свойств среды на частоте $f = \omega/2\pi$. В соответствии со сказанным выше среда характеризуется как диэлектрик, если

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \ll 1, \quad (5.16)$$

и как проводник, если

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \gg 1. \quad (5.17)$$

Видим, что деление сред на проводники и диэлектрики по их электропроводности относительно, так как критерий оценки включает еще и частоту. В том огромном диапазоне частот, которым располагает современная электротехника, свойства сред меняются весьма значительно. Можно сказать, что с ростом частоты вещества приобретают диэлектрические качества. При этом медь, алюминий и другие металлы остаются хорошими проводниками во всем диапазоне частот, доступном практике. Однако такие среды, например, как сухая почва, будучи на низких частотах проводником, на сверхвысоких становятся отчетливо выраженным диэлектриком. Отмеченный факт играет важную роль в распространении радиоволн над земной поверхностью.

П р и м е р 5.1. В некоторый момент тело, характеризуемое диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5\varepsilon_0$ и удельной проводимостью $\gamma = 10^{-14}$ См/м, несет электрический заряд. Определить промежуток времени, в течение которого заряд любой внутренней области уменьшится вдвое. Куда «исчезнет» заряд?

Р е ш е н и е. Заменяя в уравнении непрерывности $\operatorname{div}\vec{\delta} = -\partial\rho/\partial t$ плотность тока $\vec{\delta}$ через $\gamma\vec{E}$ согласно третьему из уравнений (5.1) и затем исключая вектор $\vec{E}$ с помощью второго из уравнений (5.1) и уравнения (2.21), имеем

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{5.18}$$

Уравнение (5.18) описывает изменение плотности заряда в любой внутренней точке тела. Его решение:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right), \tag{5.19}$$

где ρ_0 — плотность заряда в начале отсчета времени ($t = 0$). Как показывает (5.19), заряд во внутренних точках убывает экспоненциально с коэффициентом затухания $\alpha = \gamma/\varepsilon$.

Контрольные вопросы

1. Какими параметрами обладает материальная среда?
2. От чего зависит электропроводность материала?
3. Чем отличаются диэлектрики от проводников?
4. Что такое поляризуемость диэлектриков?
5. Перечислите известные вам причины возникновения тока проводимости как электрического, так и неэлектрического происхождения.
6. При какой частоте отношение амплитуд токов смещения и проводимости в меди будет одинаковым?

6

ГЛАВА 6

МЕТОДЫ РАСЧЕТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАТИЧЕСКИХ И КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

6.1. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

6.1.1. ОСНОВЫ МЕТОДА

На практике часто требуется рассчитывать ЭП зарядов, расположенных вблизи поверхностей раздела двух или нескольких сред. Трудность этих расчетов состоит в том, что на поверхностях раздела появляются наведенные заряды, закон распределения которых неизвестен. Для задач с границами раздела сред в виде плоскости, цилиндра или сферы эту трудность удается преодолеть применением метода зеркальных отображений.

В соответствии с этим методом исходная задача, в которой поле должно рассчитываться в нескольких средах, сводится к эквивалентным задачам расчета ЭП в однородной среде. Поскольку при замене сред устраняются наведенные на поверхностях раздела заряды, их действие учитывается введением фиктивных зарядов. Величина, знак и расположение фиктивных зарядов выводятся из граничных условий исходной задачи.

Метод зеркальных отображений применим и для расчета МП, создаваемых токами, расположенными вблизи поверхностей раздела двух или нескольких сред.

6.1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

6.1.2.1. ТОЧЕЧНЫЙ ЗАРЯД И ПЛОСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Точечный заряд Q расположен в диэлектрической среде с проницаемостью ε на расстоянии a от плоской поверхности бесконечной проводящей среды (см. рис. 6.1a). На ней под действием заряда Q возникает неравномерно распределенный заряд противоположного знака. Требуется определить поле в диэлектрике.

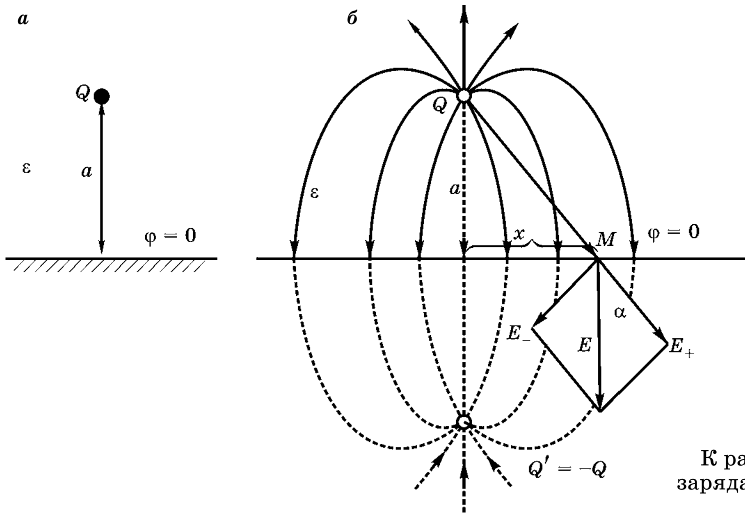


Рис. 6.1
К расчету ЭП точечного заряда методом зеркальных отображений

Используя метод зеркальных отображений, исходную задачу можно привести к эквивалентной, в которой проводящая среда заменяется диэлектриком. При этом проводящая плоскость должна быть заменена эквипотенциальной плоскостью с тем же самым значением потенциала. Ниже эквипотенциальной плоскости помещается заряд Q'такой величины и в такой точке, чтобы он вместе с заданным зарядом Q создавал в любой точке M этой плоскости один и тот же потенциал, который удобно принять равным нулю.

Для получения симметричной системы заряд Q' помещается также на расстоянии a от плоскости. Тогда его величина определяется из условия

$$\varphi_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon r} = 0, \tag{6.1}$$

откуда $Q' = -Q$. Таким образом, заряд Q' является как бы зеркальным отображением заряда Q.

Условия в точке расположения заряда Q и на поверхностях $\varphi = 0$ совпадают, поэтому поля в верхних полупространствах этих задач одинаковы.

Исходная задача свелась к элементарной задаче расчета поля двух разноименных одинаковых по величине зарядов, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга в однородной среде с проницаемостью ε. ЭП (рис. 6.1*б*) для исходной задачи (рис. 6.1*а*) в верхнем полупространстве реально, а в нижнем — фиктивно.

Для определения поверхностной плотности заряда σ на проводящей плоскости вычисляется напряженность поля у этой плоскости, направленная по нормали к плоскости (рис. 6.1*б*):

$$E = E_+\cos a + E_-\cos a, \tag{6.2}$$

где $E_+ = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = E_-$ — абсолютные значения напряженности ЭП каждого из зарядов.

Так как

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

где x — расстояние от точки M до основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда Q на плоскость, то

$$E = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon(a^2 + x^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Qa}{2\pi\varepsilon(a^2 + x^2)^{1,5}}. \qquad (6.3)$$

Поверхностная плотность отрицательного заряда

$$\sigma = -\varepsilon E = -\frac{Qa}{2\pi(a^2 + x^2)^{1,5}}. \qquad (6.4)$$

Сила притяжения заряда Q к проводящей плоскости равна силе притяжения между зарядами Q и Q' (6.1):

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon a^2}. \qquad (6.5)$$

Полученные результаты имеют также и практический интерес. Например, электрон, вышедший из катода в вакуумной лампе на малое расстояние (порядка молекулярных размеров), при любой кривизне поверхности катода может рассматриваться как точечный заряд над проводящей плоскостью. На электрон, вышедший из катода, действует сила притяжения к зеркальному отображению, стремящаяся вернуть его на катод. При очень малых расстояниях a эта сила может быть значительной и преобладать над силой, создаваемой ЭП анода. Этим частично объясняется, почему даже при значительном анодном напряжении часть электронов возвращается на катод.

6.1.2.2. ТОЧЕЧНЫЙ ЗАРЯД И ПЛОСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Точечный заряд Q расположен в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1 на расстоянии a от плоской поверхности раздела этого диэлектрика с другим однородным диэлектриком, имеющим проницаемость ε_2 (рис. 6.2*а*). Требуется рассчитать ЭП в обеих средах.

В ЭП на поверхности раздела двух диэлектриков появляются связанные заряды, влияющие на ЭП в обеих средах.

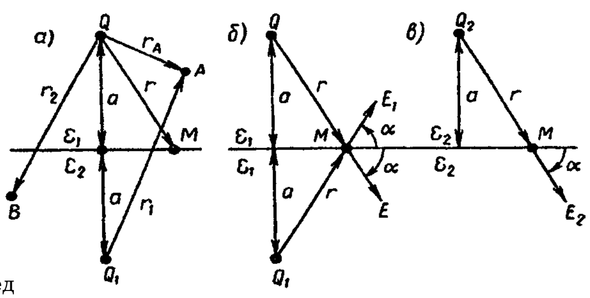


Рис. 6.2
К расчету ЭП заряда на границе разных сред

Поскольку распределение этих зарядов неизвестно, рассчитать ЭП методом наложения невозможно. Так как связанный распределенный заряд обусловлен точечным зарядом Q, можно свести эту сложную задачу к простой, заменив связанные заряды фиктивными точечными зарядами, эквивалентными по своему влиянию на поле в обеих средах.

Величина, знак и расположение фиктивных точечных зарядов определяются из граничных условий исходной задачи. В рассматриваемом случае первая простая задача (см. рис. 6.2*б*) отличается от исходной тем, что диэлектрик с проницаемостью ε_2 заменен диэлектриком с проницаемостью ε_1, а влияние исключенных при этой замене связанных зарядов учтено введением фиктивного заряда Q_1, расположенного зеркально заряду Q. Во второй простой задаче (рис. 6.2*в*) произведена обратная замена сред, а влияние исключенных связанных зарядов учтено тем, что вместо заряда Q введен фиктивный заряд Q_2.

Так как в исходной задаче

$$E_{t1} = E_{t2},\ D_{n1} = D_{n2}, \tag{6.6}$$

то этим же условиям должны удовлетворять поля простых задач.

Напряженности от зарядов Q и Q_1 в некоторой точке M, лежащей у плоскости, соответствующей поверхности раздела диэлектриков, в первой среде (рис. 6.2*б*) равны

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2},\ E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}. \tag{6.7}$$

Следовательно, суммарная касательная составляющая в этой среде

$$E_{t1} = E\cos\alpha + E_1\cos\alpha = \frac{Q+Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\alpha. \tag{6.8}$$

Касательная составляющая напряженности во второй среде в той же точке (рис. 6.2*в*)

$$E_{t2} = E_2\cos\alpha = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\alpha. \tag{6.9}$$

Нормальные составляющие вектора $\vec{D}$ в точке M:

$$D_{n1} = D\sin\alpha - D_1\sin\alpha = \frac{Q-Q_1}{4\pi r^2}\sin\alpha, \tag{6.10}$$

$$D_{n2} = D\sin\alpha = \frac{Q_2}{4\pi r^2}\sin\alpha. \tag{6.11}$$

На основании равенств (7.2) получаются два уравнения:

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}Q,\ Q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}Q. \tag{6.12}$$

Таким образом, сложная задача сведена к двум простым. На основании теоремы единственности потенциал в верхнем полупространстве исходной задачи (рис. 6.2*а*) совпадает с потенциалом в верхнем полупространстве первой простой задачи (рис. 6.2*б*), поскольку эти поля имеют одинаковые граничные условия. По той же причине совпадают поля исходной и второй простой задачи в нижнем полупространстве.

Следовательно, потенциал в точке A (первая среда) исходной задачи (см. рис. 6.2a)

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r_A} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\cdot\frac{1}{r_1}\right), \quad (6.13)$$

а в точке B (вторая среда)

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r_2} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r_2}. \quad (6.14)$$

Легко проверить, что в точке M на поверхности раздела, где $r_A = r_1 = r_2$, потенциалы во всех трех задачах одинаковы:

$$\varphi_M = \varphi_{1M} = \varphi_{2M} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r}, \quad (6.15)$$

что и соответствует совпадению граничных условий.

Как следует из выражений для зарядов Q_1 и Q_2, знак заряда Q_2 всегда совпадает со знаком заряда Q. Знак же заряда Q_1 совпадает со знаком Q, когда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и противоположен ему, когда $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ заряды $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$, а при $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ заряд $Q_1 \approx -Q$, что, в частности, соответствует случаю, когда вторая среда является проводником ($\varepsilon_2 \to \infty$).

6.1.2.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СРЕД

Соотношения, полученные для точечных зарядов, позволяют решить и более сложные задачи. В частности, если вблизи плоской поверхности раздела двух диэлектриков расположены n точечных зарядов, то на основании принципа наложения потенциал поля равен алгебраической сумме потенциалов этих зарядов и их зеркальных отображений. При этом фиктивные заряды (изображения) определяются для каждого реального заряда такими же соотношениями, как и для уединенного точечного заряда.

Поскольку любое распределение зарядов (по объему, поверхности или линии) может быть представлено как совокупность точечных зарядов, то и в этих случаях можно воспользоваться методом зеркальных отображений.

В практической деятельности часто необходимо расчитывать поля длинных проводов, расположенных параллельно плоским поверхностям раздела сред (линии передачи вблизи земли или стен зданий и т. д.), на которых размещены линейные заряды.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть бесконечно длинный провод с линейной плотностью заряда τ расположен параллельно плоскости раздела двух однородных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 на расстоянии a от этой плоскости (рис. 6.3).

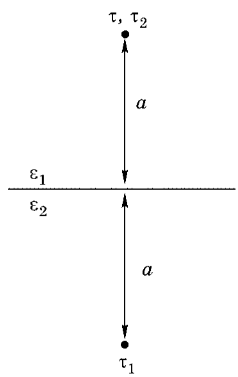
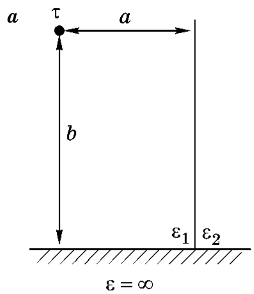


Рис. 6.3
К расчету ЭП длинного провода с распределенным зарядом, параллельного границе двух сред



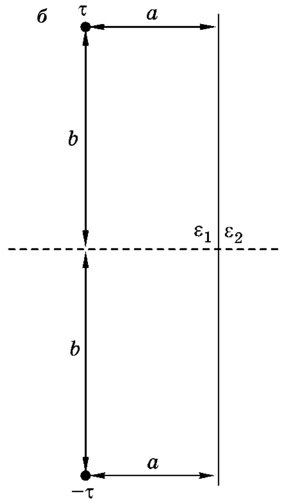


Рис. 6.4
К расчету ЭП линейного заряда, расположенного параллельно плоским взаимно перпендикулярным поверхностям раздела между двумя диэлектриками и между ними и проводящей средой

Согласно методу зеркальных отображений фиктивные заряды (отображения) будут также линейными, а их значения и знаки определяются по формулам, аналогичным формулам для точечного заряда:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau, \ \tau_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau. \qquad (6.16)$$

Затем по формуле $E = \tau/2\pi\varepsilon r$ рассчитываются напряженности от τ_1 и τ_2. Дальнейший расчет проводится как для поля точечного заряда.

Пусть линейный заряд τ расположен параллельно плоским взаимно перпендикулярным поверхностям раздела между двумя диэлектриками и между ними и проводящей средой (рис. 6.4*а*). Здесь метод зеркальных отображений применяется в два этапа.

Сначала исходная задача сводится к более простой (рис. 6.4*б*) заменой проводящей среды зеркальным отображением заряда ($-\tau$) и диэлектриками ε_1 и ε_2. Затем эта задача аналогично тому, как это делалось для точечного и линейного зарядов, сводится к двум простейшим.

6.1.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЛИНЕЙНЫХ ТОКОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНО ПЛОСКИМ ПОВЕРХНОСТЯМ РАЗДЕЛА СРЕД

Бесконечно длинный провод с током I расположен параллельно плоской поверхности раздела двух однородных сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 на расстоянии a от этой поверхности. Требуется рассчитать поле в обеих средах.

Эта задача с помощью метода зеркальных отображений также может быть сведена к двум простым (рис. 6.5*б*, *в*).

При этом величину и направление фиктивных токов I_1 и I_2 можно получить исходя из условий на поверхности раздела $H_{t1} = H_{t2}$ и $B_{n1} = B_{n2}$. Однако выражения для этих токов можно записать и на основе подобия плоскопа-

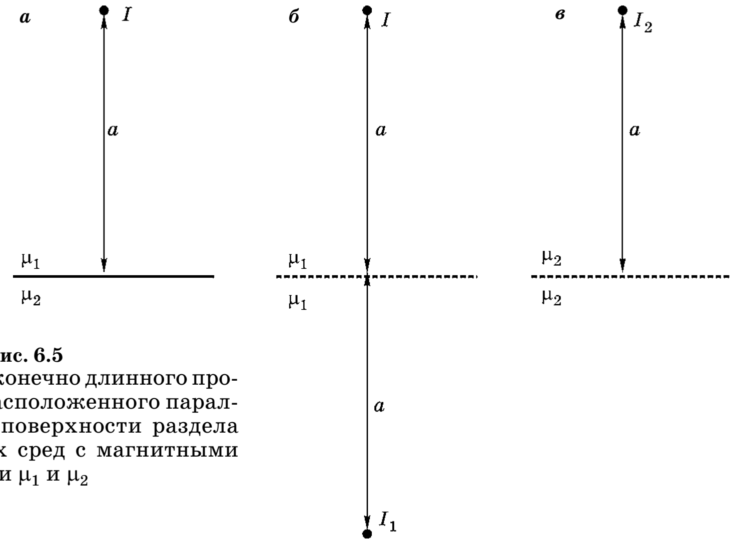


Рис. 6.5
К расчету ЭП бесконечно длинного провода с током I, расположенного параллельно плоской поверхности раздела двух однородных сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2

Таблица 6.1

Таблица соответствия магнитных и электрических величин для плоскопараллельных полей

Электрическое поле	ρ	σ	ε	$\vec{E}$	$\vec{D}$	τ	U	C'
Магнитное поле	δ_z	A_z	$1/\mu$	$\vec{B}$	$\vec{H}$	I	Φ	$1/U$

раллельных ЭП и МП, если в соответствии с табл. 6.1 в выражениях для линейных зарядов заменить τ на I и ε на $1/\mu$. Тогда

$$I_1 = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I, \; I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I. \tag{6.17}$$

Из (6.17) видно, что при $\mu_2 > \mu_1$ ток I_1 имеет то же направление, что и ток I; при $\mu_1 > \mu_2$ — обратное. Направление тока I_2 всегда совпадает с направлением тока I.

Если провод с током расположен в воздухе вблизи плоской поверхности ферромагнитной среды ($\mu_2 \gg \mu_1$), то для расчета МП следует ферромагнетик заменить фиктивным током (зеркальным отображением), практически равным по величине и совпадающим по направлению с током I. Например, при $\mu_2 = 500\mu_1, I_1 = 0{,}9961I \approx I$.

Пусть провод с током I расположен в воздушном зазоре между двумя параллельными плоскостями NNи MM, являющимися поверхностями раздела воздуха и стали (см. рис. 6.6*а*). Для расчета поля в воздухе воспользуемся методом зеркальных отображений, при этом магнитную проницаемость стали можно положить равной бесконечности. При этом влияние поля стали учитывается введением системы фиктивных токов, равных по величине и совпадающих по направлению с током I. Но расположение этих токов необходимо правильно подобрать.

Первый фиктивный ток располагается зеркально току I относительно одной из плоскостей (например, MM), затем они отображаются во второй

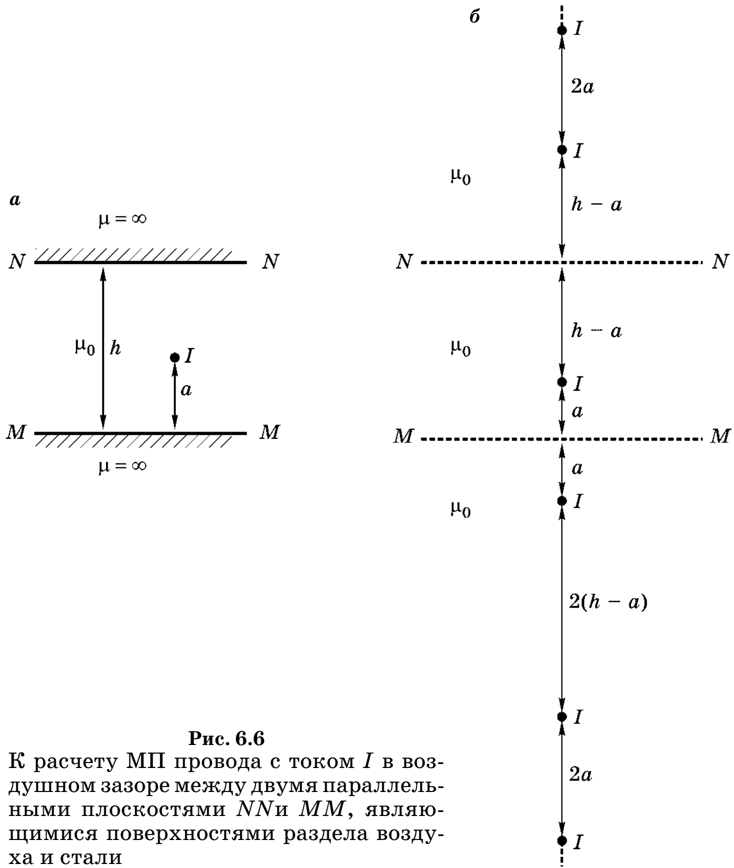


Рис. 6.6
К расчету МП провода с током I в воздушном зазоре между двумя параллельными плоскостями NNи MM, являющимися поверхностями раздела воздуха и стали

плоскости, а эти новые отображения — снова в первой плоскости и т. д. (рис. 6.6*б*). Легко проверить, что в этом случае реальный ток и его отображения будут расположены симметрично как относительно плоскости MM, так и относительно плоскости NN. Значит, эти плоскости будут эквипотенциальными, что и соответствует граничным условиям исходной задачи.

Теоретически таких отображений будет бесконечное множество, однако практически для дальнейшего расчета достаточно взять ограниченное их число, так как по мере удаления от воздушного зазора влияние фиктивных токов на поле в зазоре уменьшается, и его легко оценить.

Затем МП в воздушном зазоре определяется как сумма МП, рассчитанных по известным формулам для однородной среды от исходного тока и его отображений.

Рассмотренные примеры имеют практическое приложение при расчетах МП в электрических машинах и других устройствах, в которых обмотки располагаются вблизи ферромагнетиков.

Следует отметить, что методом зеркальных отображений рассчитываются ЭП и МП и в тех случаях, когда поверхности раздела сред представляют собой сферы, цилиндры или совокупность плоскостей.

6.2. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

6.2.1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МЕТОДА

Для решения линейных однородных уравнений в частных производных, каковыми в большинстве случаев являются уравнения, описывающие распределения статических и квазистатических ЭМП в однородных изотропных средах, часто применяется метод частных решений, разработанный еще в XVIII веке Д. Бернулли, окончательно сформулированный Фурье и Ламе и называемый в литературе их именем.

Если такие решения могут быть найдены, то, как показывает детальное исследование, их всегда найдется бесконечное множество, причем они оказываются зависящими от одного или нескольких постоянных параметров, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

Метод применяется обычно в случаях, когда поверхности, на которых заданы граничные условия, являются координатными поверхностями в ортогональных криволинейных системах координат q_1, q_2, q_3.

Сущность метода состоит в том, что дифференциальное уравнение, подлежащее интегрированию, записывают в соответствующих координатах q_1, q_2, q_3 и пытаются находить частные решения этого уравнения в форме произведения функций, зависящих каждая только от одной из переменных. Так как исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, то сумма произвольного числа найденных таким способом частных его решений есть опять решение. Получаем, таким образом, возможность составить некое весьма общее решение предложенного уравнения.

Если соответствующим выбором значений входящих в суммируемые решения параметров и постоянных можно добиться того, чтобы все решение в целом удовлетворяло бы всем граничным и начальным условиям и представлялось бы при этом сходящимся рядом, и если сверх того установлено, что при этих условиях предложенное уравнение имеет одно-единственное решение, то найденное решение и будет правильным решением задачи.

Ниже поясним сущность метода разделенных переменных на ряде простых примеров.

6.2.2. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

На практике часто встречаются электроды с поверхностью цилиндрической формы. При этом форма поперечного сечения может быть произвольной. На рис. 6.7*а* показана схема расположения электродов в электронно-оптическом устройстве. Электроды здесь представляют собой пластины, перпендикулярные плоскости чертежа, а отверстиями служат щели. На рис. 6.7*б* изображено поперечное сечение триода, имеющего плоский катод, сетку, состоящую из длинных параллельных нитей, и плоский анод.

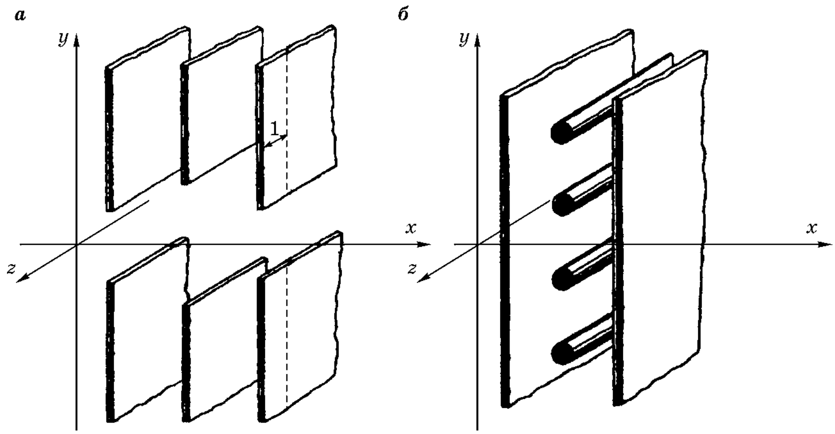


Рис. 6.7
К расчету ЭП системы электродов в электронно-оптическом устройстве

Можно получить достаточно хорошее приближение, полагая размеры электродов в направлении, перпендикулярном плоскости (x, y), очень большими. В таком случае во всех плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, распределение потенциала и силовых линий одно и то же. В действительности, если края электродов удалены от рассматриваемой плоскости сечения, их влияние сказывается незначительно и распределение потенциала практически не зависит от координаты z. При этом трехмерное уравнение Лапласа, описывающее ЭП в триоде, сводится к двухмерному (для обозначения электрического потенциала используется здесь и в дальнейшем буква U, поскольку φ использована для обозначения угловой координаты):

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \tag{6.18}$$

и электрический потенциал U представляется функцией только двух переменных x и y.

Применим для решения уравнения (6.18) метод разделения переменных. Для этого положим, что искомый электрический потенциал U можно представить как произведение двух функций, из которых каждая зависит только от одной переменной, например для системы координат x и y:

$$U(x, y) = X(x)Y(y). \tag{6.19}$$

Подставив это произведение в уравнение (6.19), получим

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0. \tag{6.20}$$

Если далее обе части полученного уравнения разделить на произведение XY, то получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}, \tag{6.21}$$

одна часть которого зависит только от переменной x, а другая — только от переменной y. Отсюда следует, что обе части должны быть постоянными и иметь одно и то же значение, например k^2. Таким образом, исходное уравнение в частных производных распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2X}{dx^2}=k^2X,\ \frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2Y. \tag{6.22}$$

Решение этих уравнений известно [6.2, с. 363]:

$$X(x) = A\text{sh}kx + B\text{sh}kx,\ Y(y) = C\sin ky + D\cos ky. \tag{6.23}$$

Значение так называемой постоянной разделения k может быть действительным, мнимым или комплексным, и вследствие этого характер обеих выбранных функций в действительности может быть обратным указанному. Общее уравнения Лапласа получится, если просуммировать все имеющиеся решения:

$$U(x,y)=\sum_k (A_k\,\text{sh}\,kx+B_k\,\text{ch}\,kx)(C_k\sin ky+D_k\cos ky). \tag{6.24}$$

Значения всех входящих в уравнение постоянных должны быть определены из граничных условий.

Уравнение Лапласа для плоскости можно представить также в полярных координатах r, φ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0, \tag{6.25}$$

если полагать, что потенциал не зависит от координаты z. Это уравнение также может быть решено методом разделения переменных. Положим

$$U(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{6.26}$$

Подставив функцию (7.26) в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0. \tag{6.27}$$

Аналогично предыдущему введем постоянную разделения k, после чего получим

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=k^2,\ \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-k^2. \tag{6.28}$$

Решения этих двух дифференциальных уравнений уже известны: решения первого уравнения имеют вид $R = r^{-k}$ и $R = r^k$, что можно доказать подстановкой в исходное уравнение.

Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах, удовлетворяющее произвольным граничным условиям, имеет вид

$$U(r,\varphi)=\sum_k\left(A_k r^k+\frac{B_k}{r^k}\right)(C_k\sin k\varphi+D_k\cos k\varphi). \tag{6.29}$$

6.2.3.
РАСЧЕТ ПЛОСКОМЕРИДИАННЫХ ПОЛЕЙ

Если электроды имеют осевую симметрию, то целесообразно применять круговые цилиндрические координаты r, φ, z. В этом случае поле должно иметь осевую симметрию, т. е. его потенциал не зависит от угла φ. Уравнение Лапласа при этом значительно упрощается. Как известно, в координатах r, φ, z

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \quad (6.30)$$

Значение потенциала не зависит от угла φ, если ось симметрии совпадает с осью z. При этом уравнение Лапласа для электрического потенциала приобретает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \quad (6.31)$$

В уравнении (6.31) потенциал U зависит только от координат r, z, т. е.

$$U = U(r, z). \quad (6.32)$$

Уравнение (6.32) целесообразно решать методом разделения переменных в виде

$$U(r, z) = R(r)Z(z). \quad (6.33)$$

Подставляя U в виде (6.33) в уравнение (6.31):

$$Z\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}Z\frac{dR}{dr}+R\frac{d^2Z}{dz^2}=0,$$

и деля на $U = RZ$, получаем уравнение

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}, \quad (6.34)$$

левая часть которого зависит только от координаты r, а правая — только от координаты z. Равенство может выполняться только в том случае, когда обе части уравнения равны одной и той же величине, т. е.

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=k^2 \text{ и } \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}=-k^2. \quad (6.35)$$

Итак, для определения неизвестных функций Z и R мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения. Решение первого имеет вид [6.2, с. 363]

$$Z = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \quad (6.36)$$

Если k — действительное число, этому выражению целесообразно придать вид

$$Z = A\mathrm{ch}kz + B\mathrm{sh}kz. \quad (6.37)$$

Если k — мнимое число, т. е. $k^2 = -\chi^2$, где χ — действительное число, то

$$Z = A\cos\chi z + B\sin\chi z. \quad (6.38)$$

Следует добавить, что при любых значениях k общее решение может быть представлено в любой из этих трех форм. При этом, естественно, постоянные A, B получаются различными.

Дифференциальные уравнения, служащие для определения функций $R(r)$ и $Z(z)$, часто встречаются во многих задачах электротехники (например, в задачах экранирования). Уравнения типа $R(r)$ впервые исследовались Бесселем, поэтому они названы уравнениями Бесселя, а функции, служащие их решением, — функциями Бесселя. Частное решение приведенного здесь дифференциального уравнения $R(r)$ называется функцией Бесселя нулевого порядка и обозначается $J_0(kr)$, где kr — ее аргумент. Чтобы получить полное решение уравнения, необходимо найти еще одно решение, независимое от предыдущего. Это решение называется функцией Неймана нулевого порядка, имеет тот же аргумент kr и обозначается $N_0(kr)$. Отсюда общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$R(r) = CJ_0(kr) + DN_0(kr). \tag{6.39}$$

Если k — чисто мнимое число, т. е. $k^2 = -\chi^2$, то $J_0(kr) = J_0(j\chi r)$. Эта функция вещественна.

Полное решение уравнения (6.39) имеет вид

$$U(z, r) = Z(z)R(r) = [A\mathrm{ch}kz + B\mathrm{sh}kz][CJ_0(kr) + DN_0(kr)]. \tag{6.40}$$

Решение (6.39) содержит произвольную постоянную k. От ее выбора зависит характер распределения потенциала. И в этом случае можно идти таким путем: придавая постоянной k произвольные значения, исследовать, какому виду эквипотенциальной поверхности соответствует полученное решение, и тем самым установить, для какой формы электродов оно применимо.

Уравнение Лапласа — линейное уравнение. Поэтому, если найдены какие-то два решения, их сумма также удовлетворяет исходному уравнению. Если требуется найти общее решение уравнения для поля с осевой симметрией при заданных граничных условиях, то можно искать его в виде ряда

$$U(z,r) = \sum_k [A_k \,\mathrm{ch}\, kz + B_k \,\mathrm{sh}\, kz][C_k J_0(kr) + D_k N_0(kr)]. \tag{6.41}$$

Здесь k и A_k, ..., D_k определяются из граничных условий.

Значения k часто образуют ряд непрерывных, а не дискретных чисел. В таком случае решение представляется интегралом

$$U(z,r) = \int_k [A(k)\mathrm{ch}\, kz + B(k)\mathrm{sh}\, kz][C(k)J_0(kr) + D(k)N_0(kr)]dk \tag{6.42}$$

или, в случае $k^2 = -\chi^2$, интегралом

$$U(z,r) = \int_\chi [A(\chi)\mathrm{ch}\,\chi z + B(\chi)\mathrm{sh}\,\chi z][C(\chi)J_0(j\chi r) + D(\chi)N_0(j\chi r)]d\chi. \tag{6.43}$$

6.3.
МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

6.3.1.
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Понятие конформного отображения относится к числу важнейших понятий математики. Возникшее из физических представлений, оно находит многочисленные приложения к различным техническим областям: гидро- и аэродинамики, теории упругости, теории фильтрации, теории теплового, магнитного, электрического полей и др. [6.4–6.6]. Отдельные задачи, связанные с конформными отображениями, решались Дж. Даламбером (1717–1783), Л. Эйлером (1707–1783) и К. Гауссом (1777–1855). Основываясь на их результатах, Г. Риман (1826–1866) в своей диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» (1851) систематизировал и развил теорию конформных отображений, исходя из физических представлений.

Инициатива широкого применения конформных отображений к конкретным практическим задачам и наиболее принципиальные результаты в этом направлении принадлежат русским ученым: Н. Е. Жуковскому, С. А. Чаплыгину, М. А. Лаврентьеву, М. В. Келдышу, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Седову и др.

Метод конформных отображений часто используется для расчета двухмерных ЭП и МП в неаналитических областях, описываемых уравнением Лапласа. Этот метод является практическим применением теории функций комплексного переменного. Конформное преобразование сводится к замене действительного поля, которое из-за сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, другим полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу заменяемого поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения известны.

Поиск функциональной зависимости, правильно отображающей замену поля, наиболее сложен.

Рассмотрим плоскость [6.1, с. 224], в которой расположены линии поля и эквипотенциальные линии, как плоскость комплексного переменного $z = x + jy$ (рис. 6.8*а*). Здесь вещественные количества откладываются по оси Ox, а мнимые — по оси Oy. Каждой точке на этой плоскости соответствует определенное комплексное число z, каждой линии — определенное уравнение, связывающее координаты ее точек. Например, точке a соответствует число $z = 1 + j$, а точке e — число $z = 2 + 3j$, прямой линии $u = 0$, проведенной из начала координат под углом 45°, соответствует уравнение $x = y$; гиперболе $u = 4$ соответствует уравнение $x^2 - y^2 = 4$; гиперболе $v = 16$ соответствует уравнение $2xy = 16$ и т. д.

Рассмотрим теперь другую комплексную величину $w = u + jv$, вещественная и мнимая составляющие которой являются однозначными функциями x и y. Каждому значению $z = x + jy$, определяющему положение некоторой точки на плоскости z, соответствует определенная точка на плоскости w (рис. 6.8*а*).

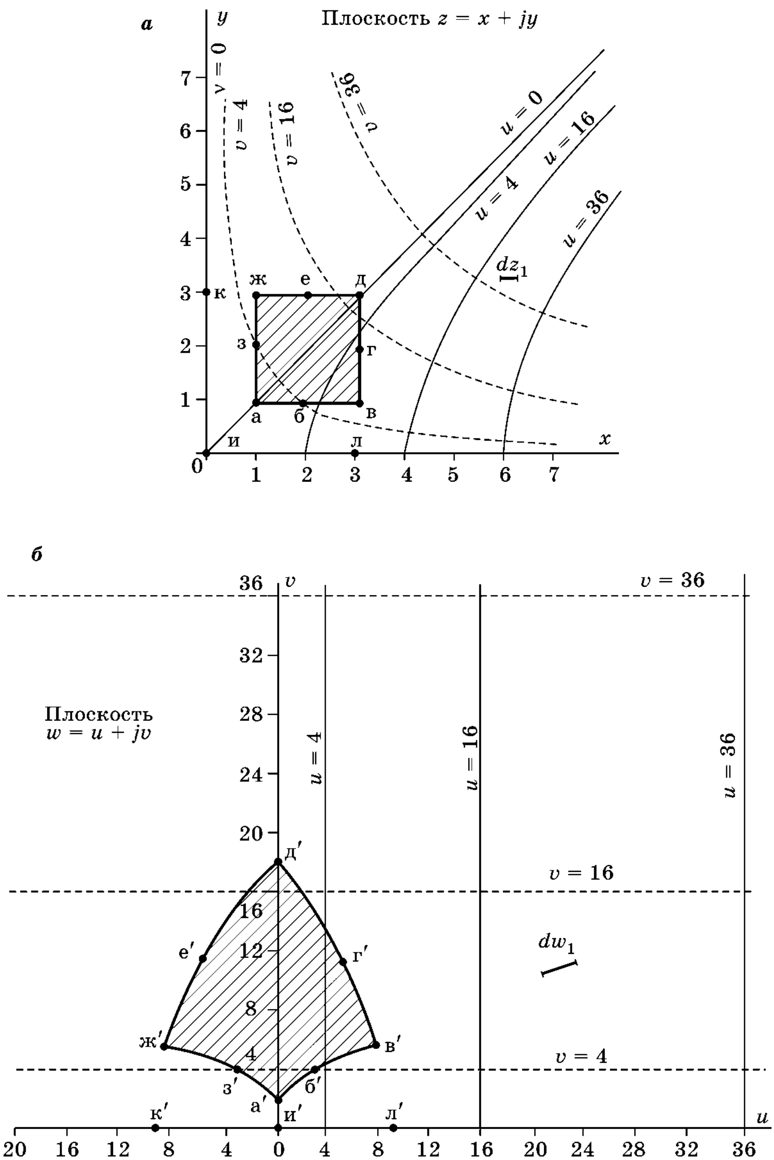


Рис. 6.8
К расчету ЭП методом конформных отображений

Рисунок 6.8 сделан для случая $w = z^2$. Развернув комплексные выражения величин w и z, имеем

$$u + jv = x^2 - y^2 + 2jxy,$$

откуда

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy. \qquad \textbf{(6.44)}$$

Точке a на плоскости z, имеющей координаты $x = 1$; $y = 1$, соответствует точка a' на плоскости w, координаты которой по формулам (6.44): $u = 0$; $v = 2$; точке *б* на плоскости z с координатами $x = 2$, $y = 1$ соответствует точка *б*′ на плоскости w с координатами $u = 3$, $u = 4$ и т. д.

Квадрат *а б в г д е ж з а* на плоскости z преобразовался в криволинейный четырехугольник *а*′ *б*′ *в*′ *г*′ *д*′ *е*′ *ж*′ *з*′ *а*′ на плоскости w.

Оценка изменений формы, размера и ориентации преобразуемого элементарного отрезка делается с помощью линейного коэффициента преобразования, равного производной dw/dz,

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=Me^{j\theta}, \tag{6.45}$$

или

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dz}=\frac{\partial v}{\partial y}+j\frac{\partial u}{\partial y}=Me^{j\theta},$$

где

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}, \tag{6.46}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}. \tag{6.47}$$

Коэффициент преобразования является в общем случае комплексным числом. Преобразование малого отрезка dz при переносе его с плоскости z на плоскость w заключается в изменении его длины в M раз и в повороте против часовой стрелки на угол θ. M и θ являются функциями координат преобразуемого малого отрезка. Однако коэффициент преобразования не зависит от ориентации преобразуемого отрезка на плоскости z.

Пусть в какой-либо точке на плоскости z пересекались под некоторым углом α два малых отрезка; после преобразования, т. е. переноса на плоскость w, каждый отрезок повернулся на одинаковый угол θ; значит, угол α между ними сохранился. Линии u — const и v — const на плоскости w (см. рис. 6.8) повсюду пересекаются под прямым углом; следовательно, соответствующие им кривые u — const и v — const на плоскости z также образуют ортогональную систему, т. е. касательные к кривым в точках их пересечения взаимно перпендикулярны.

Система таких кривых может представлять собой картину электрического или магнитного поля, поскольку линии напряженности поля (линии индукции) и эквипотенциальные линии всегда пересекаются под прямым углом.

Из выражений (6.45) вытекают так называемые уравнения Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.48}$$

Функции u и v, удовлетворяющие этим уравнениям, называются сопряженными. Каждая из них подчиняется уравнению типа Лапласа для двухмерного поля. В этом легко убедиться, продифференцировав одно из уравнений (6.45) по x, а другое — по y и либо сложив результаты, либо вычтя один из другого. Любое из семейств кривых (u — const или v — const) может изображать либо линии поля, либо эквипотенциальные линии.

Каждый малый элемент площади на плоскости z после переноса на плоскость w изменит свой размер и ориентацию, но сохранит очертание: квадрат останется квадратом, круг — кругом. Фигуры же конечных размеров могут подвергаться большому искажению.

6.3.2. ПРИМЕРЫ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вместо непосредственно поиска отображений, соответствующих поставленной физической задаче, можно сначала пойти другим путем: рассмотреть, какие реальные задачи решаются посредством тех или иных изображений. В дальнейшем из множества полученных решений надо будет выбрать те, которые ближе всего подходят к поставленной задаче.

Пример 6.1. В качестве первого примера рассмотрим функцию [6.6, с. 162]

$$w = z^2.$$

Раскрывая это выражение:

$$u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy,$$

находим, что

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

Следовательно, это преобразование переводит параллельные прямые u — const и v — const плоскости w в гиперболы $x^2 - y^2$ — const и $2xy$ — const в плоскости z. Так как производная во всех точках, кроме точки $z = 0$, не равна нулю и однозначна, отображение конформно, т. е. семейства этих гипербол ортогональны.

В качестве потенциальной функции выберем мнимую часть, т. е. будем считать, что потенциал выражается функцией

$$v = 2xy.$$

С помощью такого преобразования можно решать все задачи, в которых направляющая цилиндрического электрода — гипербола, описываемая уравнением $2xy = v_0$. Можно считать, что прямая $v_0 = 0$ (т. е. ось u) соответствует границе первого квадранта в плоскости z (для которого $x \geq 0$, $y \geq 0$ при $v \geq 0$).

В этом случае область однородного поля в плоскости w, лежащая между электродами $v = 0$ и $v = v_0$, отображается на область, лежащую в первом квадранте плоскости z между координатными осями, на которых $v = 0$, и гиперболой $2xy = v_0$ (см. рис. 6.9).

Составляющие напряженности поля выражаются в виде

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y,\ E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

Модуль напряженности:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = 4(x^2 + y^2).$$

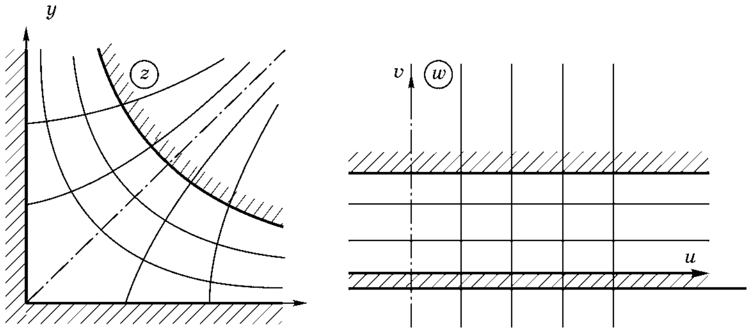


Рис. 6.9
К расчету ЭП в области однородного поля в плоскости w, лежащей между электродами $v = 0$ и $v = v_0$

Как видно из рисунка, напряженность поля возрастает по мере удаления от начала координат и при больших значениях x вблизи оси x силовые линии поля становятся параллельными оси y; аналогично при больших значениях y вблизи оси y они становятся параллельными оси x.

Пример 6.2. Рассмотрим функцию [6.6, с. 163]

$$w = \ln z \text{ или } z = x + jy = Re^{j\varphi}. \tag{6.49}$$

В этом случае

$$u + jv = \ln z = \ln Re^{j\varphi} = \ln R + j\varphi, \tag{6.50}$$

т. е. действительная и мнимая части функции определяются соответственно равенствами

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{6.51}$$

Выбрав в качестве потенциальной функции

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2},$$

найдем уравнение эквипотенциальных линий (u — const):

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} \text{ — const или } x^2 + y^2 \text{ — const}, \tag{6.52}$$

т. е. эти линии — концентрические окружности.

Рассматриваемая функция соответствует полю заряженного провода, имеющего форму длинного кругового цилиндра. Заряд, приходящийся на единицу длины такого провода, по уравнению (6.52) равен

$$q_0 = \varepsilon_0(v_A - v_B) = \varepsilon_0(0 - 2\pi) = -2\pi\varepsilon_0.$$

Следовательно, заряду $-2\pi\varepsilon_0$ соответствует функция

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6.53}$$

Заряду в q раз большему и положительному по знаку соответствует функция

$$u - -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}. \tag{6.54}$$

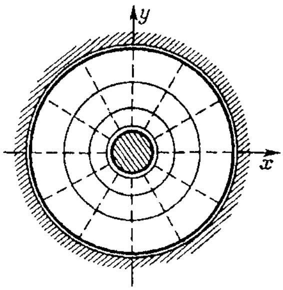


Рис. 6.10
К расчету поля кругового цилиндра конечного радиуса

Далее, так как $\ln 1 = 0$, потенциал в точке $r = 1$ равен нулю. Если потребовать, чтобы потенциал равнялся нулю на поверхности кругового цилиндра радиуса r_0, получится следующее выражение потенциала:

$$u = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}, \qquad (6.55)$$

которому соответствуют: поле кругового цилиндра конечного радиуса, поле заряженной электрической оси и поле коаксиальных цилиндров (рис. 6.10).

Выберем теперь в качестве потенциальной функции мнимую часть w:

$$v = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \qquad (6.56)$$

Тогда, как показано на рис. 6.11*а*, этому соответствует потенциальное поле двух полуплоскостей, пересекающихся по линии $x = y = 0$, образующих между собой заданный угол и имеющих разные потенциалы. Следы эквипотенциальных поверхностей в данном случае — прямые (в пространстве — плоскости), выходящие из центра. Силовые линии образуют окружности. На рис. 6.11*б* показано ЭП двух близлежащих полуплоскостей, находящихся под разными потенциалами (поле рассеяния плоского конденсатора).

Рис. 6.11
К расчету ЭП двух близлежащих полуплоскостей, находящихся под разными потенциалами

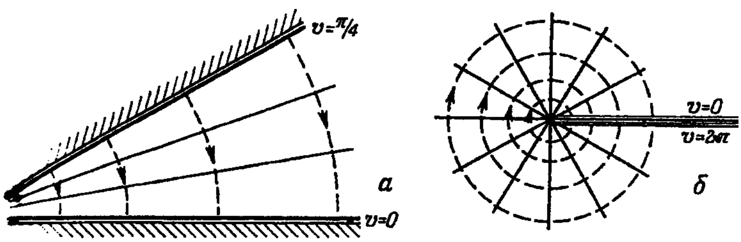
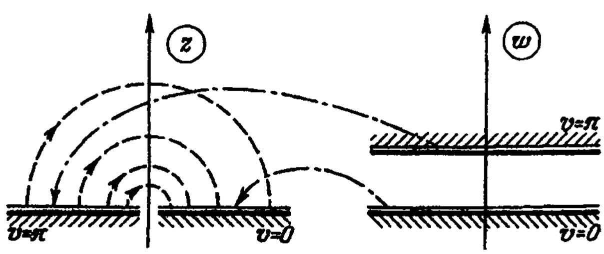


Рис. 6.12
К расчету ЭП двух расположенных рядом полуплоскостей, имеющих разные потенциалы



На рис. 6.12 показано поле двух расположенных рядом полуплоскостей, имеющих разные потенциалы (одна из них служит геометрическим продолжением другой). Таким образом, преобразование $w = \ln z$ отображает прямые $v = 0$ и $v = \pi$ в плоскости w на рядом лежащие полубесконечные прямые плоскости z.

6.3.3.
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Имея произвольную аналитическую функцию, легко изучить конформное отображение, ею осуществляемое. Любая область D, в которой функция $w = f(z)$ однолистна, с помощью этой функции конформно отображается на некоторую область Δ. Таким образом, для каждой такой функции необходимо получать различные примеры конформных отображений, геометрически иллюстрирующих данную функцию. Однако для практических целей больший интерес представляет значительно более трудная обратная задача, которая считается основной задачей теории конформных отображений.

Заданы области D и Δ, требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной области на другую.

Следует заметить, что данная задача в общем виде неразрешима. Существует ряд ограничений на области, которые можно конформно отобразить друг на друга. Часто в практических инженерных приложениях пользуются приближенными методами конформных преобразований, используя интегральные функции. Одной из таких функций является интеграл Кристоффеля–Шварца [6.5, с. 227], который широко используется при решении электротехнических задач. А для гидродинамических задач широко используется интеграл Келдыша–Седова [6.5, с. 295]. Поскольку рассмотрение приближенных методов конформных отображений затруднительно и требует специальной подготовки, то в учебных курсах электротехники такое рассмотрение не проводится. Подробнее ознакомиться с приближенными методами конформных отображений можно в специальной литературе [6.5, с. 153; 6.6, с. 156].

Контрольные вопросы

1. Какими аналитическими методами можно рассчитать статическое поле в непроводящей среде?
2. Какие методы целесообразно использовать для расчета квазистатического поля в непроводящей среде?
3. Как можно рассчитать статическое поле в проводящей среде?
4. Как можно рассчитать квазистатическое поле в проводящей среде?
5. Назовите основные преимущества метода зеркальных отображений.
6. В каких областях с наибольшей эффективностью можно использовать метод разделения переменных?
7. В каких областях целесообразно применять метод конформных отображений?
8. В какой области широко используются приближенные методы конформных отображений (назовите некоторые распространенные формулы отображения)?
9. Перечислите методы расчета статических полей, дающие наибольший эффект в плоских и осесимметрических конструкциях.

7

ГЛАВА 7

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

7.1. О РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

При решении задач электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии важно учитывать переходные процессы в ЭМП. Связано это прежде всего с развитием импульсной техники. Импульсные процессы широко используются в радиолокации, радионавигации, телевидении и многоканальной связи, а также в быстродействующих компьютерах.

В настоящее время длительность импульсов в технических устройствах достигает $10^{-8}/10^{-10}$ с. При столь кратковременных импульсах особое значение приобретает влияние вихревых токов на импульсный процесс. Расчет этого влияния связан с расчетом проникновения практически скачкообразно изменяющегося внешнего ЭМП в проводящие тела, иначе говоря, с расчетом переходных процессов в ЭМП.

Расчет переходных процессов в ЭМП связан с определенными трудностями, возникающими вследствие изменения параметров сред при переходных процессах. При постоянстве параметров сред, в которых распространяются ЭМП, возможен расчет как классическим методом, так и методами наложения: спектральным и операторным.

В отличие от электрических цепей со сосредоточенными параметрами, где искомые величины (напряжения и токи) являются функциями только времени, в ЭМП напряженности ЭП и МП являются функциями и координат, и времени. Поэтому при использовании классического метода здесь приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных и определять вид решения и постоянные интегрирования на основании начальных и граничных условий. В частном случае, когда напряженность зависит только от одной координаты, расчет переходных процессов в поле сходен с расчетом переходных процессов в длинных линиях. Рассмотрим некоторые задачи, связанные с необходимостью расчета переходных процессов в ЭМП.

7.2.
УСТАНОВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ПЛАСТИНЕ

Пусть пластина (рис. 7.1), для которой рассматривается поверхностный эффект, находится в синусоидальном внешнем МП, которое изменяется скачкообразно.

На практике такой режим наблюдается в магнитопроводах импульсных трансформаторов, если считать, что скорости установления тока в обмотке и его поля значительно превышают скорость установления магнитного потока в магнитопроводе.

Для определения мгновенного значения магнитного потока в пластине необходимо знать индукцию в каждой точке пластины в любой момент времени. Удобней сначала рассмотреть процесс убывания магнитного потока, т. е. случай, когда до момента $t = 0$ ток в обмотке, образующей поле, был постоянным и напряженность в любой точке как вне, так и внутри пластины равнялась H_e, а в момент $t = 0$ ток в обмотке, а значит, и напряженность вне пластины скачком изменились до нуля. В этом случае необходимо учитывать свободную составляющую переходного процесса.

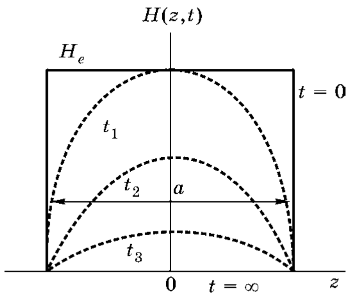


Рис. 7.1
К расчету установления магнитного потока в пластине

При скачкообразном изменении тока МП в проводящей пластине скачком измениться не может. Возникающие в пластине вследствие изменения магнитного потока вихревые токи создают магнитный поток, препятствующий изменению внешнего потока. Поэтому в момент $t = 0$ во всех точках пластины напряженность равна H_e и только на поверхности пластин равна нулю (рис. 7.1), поскольку и вне пластины она стала равной нулю. По окончании переходного процесса напряженность поля (вынужденная составляющая) и поток в пластине будут равны нулю.

Для расчета $H(z,t)$ в переходном процессе необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \gamma\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{7.1}$$

Применяя метод разделения переменных и полагая $H(z,t) = Z(z)\,T(t)$, можно получить два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{1}{Z}\cdot\frac{d^2 Z}{dz^2} = -m^2, \quad \frac{\gamma\mu}{T}\cdot\frac{dT}{dt} = -m^2. \tag{7.2}$$

Их решения соответственно:

$$Z = A\cos mz + B\sin mz,\ T = Ce^{-\frac{m^2}{\gamma\mu}t}. \tag{7.3}$$

Частное решение уравнения (7.1) находится в виде

$$H_k(z,t) = Z_k T_k = (A_k \cos m_k z + B_k \sin m_k z)C_k e^{-\frac{m_k}{\gamma\mu}t}. \tag{7.4}$$

Для определения постоянных интегрирования A_k, B_k, C_k и m_k необходимо использовать граничные условия.

Из условия симметрии поля относительно плоскости XOY следует

$$H(z,\ t) = H(-z,\ t), \tag{7.5}$$

откуда $B_k = 0$.

Следовательно, общее решение (7.4) переписывается в виде

$$H(z,t) = \sum_k D_k e^{-\frac{m_k^2}{\gamma\mu}t} \cos m_k z, \tag{7.6}$$

где $D_k = A_k C_k$. В момент $t = 0$

$$H(z,0) = \sum_k D_k \cos m_k z. \tag{7.7}$$

Распределение напряженности в момент $t = 0$ изображается кривой прямоугольного вида, которая аналитически представляется рядом Фурье:

$$H(z,0) = \frac{4}{\pi} H_e \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos\frac{2n-1}{a}\pi z, \tag{7.8}$$

где $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Сопоставляя (7.7) и (7.8), для коэффициентов D_k и m_k получим

$$D_k = \frac{4H_e}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},\ m_k = \frac{2n-1}{a}\pi. \tag{7.9}$$

Вводя обозначение

$$\beta = \frac{\pi^2}{a^2\gamma\mu},$$

решение (7.6) можно записать в виде

$$H(z,t) = \frac{4H_e}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\beta t} \cos\frac{2n-1}{a}\pi z. \tag{7.10}$$

По формуле (7.10) можно определить напряженность в каждой точке пластины для любого момента времени. На рис. 7.1 пунктирными линиями показан характер распределения H для некоторых моментов времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$.

Мгновенное значение магнитного потока

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2h\mu \int_0^{0{,}5a} H(z,t)dz = \\ &= \frac{8h\mu H_e}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2\beta t} \frac{a}{\pi} \sin\frac{2n-1}{a}\pi z\Big|_0^{0{,}5a} = \\ &= \frac{8ah\mu H_e}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2\beta t} \frac{a}{\pi} \sin\frac{2n-1}{a}\pi. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+1} \sin\frac{2n-1}{2}\pi = 1,$$

а магнитный поток, который был в пластине до начала переходного процесса, $\Phi_0 = \mu H_e a h$, можно записать:

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2\beta t} \tag{7.12}$$

или

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 0{,}81\left(e^{-\beta t} + \frac{1}{9}e^{-9\beta t} + \frac{1}{25}e^{-25\beta t} + \ldots\right). \tag{7.13}$$

Отсюда следует, что для $\beta t \geq 0{,}5$ убывание магнитного потока можно рассчитывать с погрешностью менее 1% по формуле

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 0{,}81e^{-\beta t}. \tag{7.14}$$

По аналогии с переходным процессом в цепи r, L при ее коротком замыкании и включении на постоянное напряжение относительное нарастание магнитного потока в пластине при скачкообразном изменении напряженности внешнего поля от нуля до H_e определится выражением

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2\beta t}, \tag{7.15}$$

поскольку в этом случае установившийся поток будет равен Φ_0. Для $\beta t \geq 0{,}5$

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - 0{,}81e^{-\beta t}. \tag{7.16}$$

При рассмотрении переходного процесса по упрощенной формуле за коэффициент затухания условно можно принять

$$\beta = \frac{\pi^2}{a^2\gamma\mu}.$$

Тогда из полученных выражений следует, что процесс установления магнитного потока определяется толщиной пластины, ее удельной проводимостью и магнитной проницаемостью.

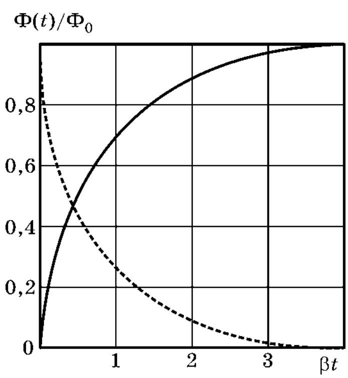


Рис. 7.2
Графики изменения магнитного потока

Графики относительного убывания и нарастания магнитного потока представлены на рис. 7.2. Из них следует, что значение $\frac{\Phi(t)}{\Phi_0}$ равно 0,98 при нарастании и 0,02 при убывании при $\beta t = 3{,}5$. Следовательно, можно считать, что магнитный поток практически устанавливается за время

$$t_y = 3{,}5\frac{a^2\gamma\mu}{\pi^2} = 0{,}35a^2\gamma\mu. \tag{7.17}$$

Поток достигает $0{,}5\ \Phi_0$ при $\beta t = 0{,}5$, т. е. за время $t_{0,5} = \frac{1}{7}t_y$, для стальной пластины, имеющей $a = 0{,}0005$ м, $\gamma = 10^7 \text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$ и $\mu = 1000\mu_0$, $t_y = 1{,}1$ мс — $t_{0,5} = 0{,}157$ мс.

Из приведенных расчетов следует, что время установления потока можно сократить, если уменьшить толщину a пластины или удельной проводимости γ материала. При этом уменьшение магнитной проницаемости μ невыгодно, поскольку это сократит поток в установившемся режиме. Поэтому в импульсных трансформаторах магнитопроводы обычно выполняют из феррита, который имеет малую удельную проводимость, или из очень тонких стальных пластин.

7.3. УСТАНОВЛЕНИЕ ТОКА В ПРОВОДЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Провод круглого сечения радиуса r_0, длины l подключается к постоянному напряжению U_0. Требуется определить плотность тока в каждой точке провода в любой момент времени и характер установления тока, если магнитная проницаемость и удельная проводимость материала провода постоянны (μ — const, γ — const).

Можно считать, что в момент включения цепи под напряжение ($t = 0$) напряженность ЭП вне провода устанавливается практически мгновенно по сравнению с процессом установления ЭП в проводе. Из условия равенства касательных составляющих $\vec{E}$ на поверхности провода ($r = r_0$) напряженность $E_0 = U_0/l$ и соответствующая ей плотность тока $\delta_0 = \gamma E_0$ также установятся практически мгновенно.

Внутри провода ($r < r_0$) в момент включения плотность тока равна нулю, поскольку мгновенное изменение тока на конечную величину сопровождалось бы мгновенным изменением магнитного потока и энергии на конечную величину, что невозможно.

Можно записать уравнение, описывающее процесс установления ЭП в проводе:

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial r} = \gamma\mu\frac{\partial\delta}{\partial t}. \tag{7.18}$$

Представив решение в виде

$$\delta(r, t) = R(r)T(t), \tag{7.19}$$

получают

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\cdot\frac{dR}{dr} = \frac{1}{T}\gamma\mu\frac{dT}{dt} = -m^2. \tag{7.20}$$

Отсюда

$$T = Ce^{-\frac{m^2}{\gamma\mu}t}. \tag{7.21}$$

Полагая $x = rm$, уравнение для R можно свести к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{dR}{dx} + R = 0, \tag{7.22}$$

решение которого

$$R = A_1J_0(mr) + A_2N_0(mr). \tag{7.23}$$

Так как при $r \to 0$ $N_0(0) \to \infty$, то $A_2 = 0$.

По окончании переходного процесса во всех точках провода установится плотность тока δ_0. Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\delta(r,t) = \delta_0 + \sum_k R_k T_k = \delta_0 + \sum_k D_k J_0(m_k r) e^{-\frac{m_k^2}{\gamma\mu}t}. \tag{7.24}$$

Для определения постоянных интегрирования D_k и m_k необходимо обратиться к начальным и граничным условиям. В момент $t = 0$

$$\delta(r,0) = \delta_0 + \sum_k D_k J_0(m_k r_0). \tag{7.25}$$

На поверхности провода в этот момент $\delta(r_0,0) = \delta_0$. Это значит, что при $r = r_0$

$$\sum_k D_k J_0(m_k r_0) = 0, \tag{7.26}$$

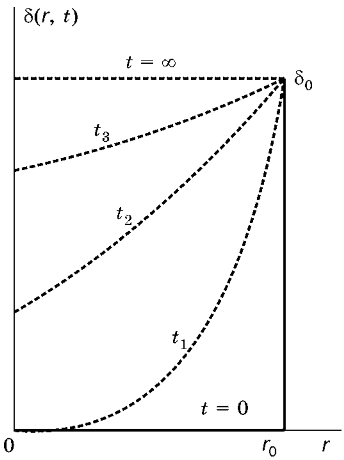


Рис. 7.3
Изменение плотности тока по радиусу провода

откуда следует, что $m_k r_0 = x_{0k}$, где x_{0k} — корни функции Бесселя нулевого порядка.

Следовательно,

$$m_k = \frac{x_{0k}}{r_0}.$$

Во всех точках сечения $0 \le r < r_0$ в начальный момент плотность тока равна нулю (рис. 7.3). Значит,

$$\sum_k D_k J_0(m_k r) = -\delta_0. \tag{7.27}$$

Для определения коэффициентов D_k ряда функций Бесселя необходимо воспользоваться следующим свойством этих функций.

Если x_{0p} и x_{0q} — корни функции $J_0(x)$, то при $p = q$

$$\int_0^1 x J_0(x_{0p}x) J_0(x_{0q}x)\,dx = 0{,}5 J_1^2(x_{0p}),$$

а при $p \ne q$ значение этого интеграла равно нулю.

Кроме того,

$$\int x J_0(x)\,dx = x J_1(x).$$

Умножая на $(r/r_0)J_0(x_{0p}r/r_0)$ обе части выражения и интегрируя в пределах от 0 до 1, можно получить

$$\int_0^1 \frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p}\frac{r}{r_0}\right) \sum_k D_k J_0\left(x_{0p}\frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\delta_0 \int_0^1 \frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p}\frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

или с учетом указанных свойств:

$$0{,}5 D_p J_1^2(x_{0p}) = -\frac{\delta_0}{x_{0p}} J_1(x_{0p}).$$

Отсюда

$$D_p = -\frac{2\delta_0}{x_{0p} J_1(x_{0p})}.$$

Таким образом,

$$\delta(r,t) = \delta_0 \left[1 - 2\sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0} \right) e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right], \tag{7.28}$$

где $\beta = 1/(r_0^2 \gamma\mu)$.

Характер распределения плотности тока в проводе для моментов времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$ показан на рис. 7.3.

Ток в проводе

$$\begin{aligned} i &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{r_0} \delta(r,t) r dr = 2\pi\delta_0 \int_0^{r_0} \left[1 - 2\sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0} \right) e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right] r dr = \\ &= 2\pi\delta_0 \left[\frac{r_0^2}{2} - 2\sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \int_0^{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0} \right) r dr \right] = \\ &= \pi r_0^2 \delta_0 \left[1 - 4\sum_p \frac{1}{x_{0p}^2} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right]. \end{aligned} \tag{7.29}$$

С учетом $I_0 = \pi r_0^2 \delta_0$ относительное изменение тока в проводе

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 4\sum_p \frac{1}{x_{0p}^2} e^{-x_{0p}^2 \beta t}. \tag{7.30}$$

Первые три корня функции Бесселя нулевого порядка равны $x_{01} = 2{,}41$, $x_{02} = 5{,}52$, $x_{03} = 8{,}65$. В соответствии с этим

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 0{,}692 e^{-5{,}78\beta t} - 0{,}131 e^{-30{,}5\beta t} - 0{,}053 e^{-75\beta t} - \ldots . \tag{7.31}$$

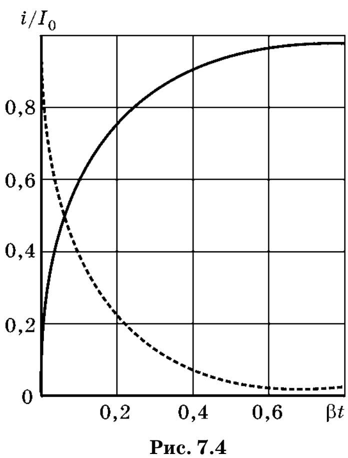


Рис. 7.4
Характер распределения плотности тока в проводе

Для значений $\beta t > 0{,}1$ можно принять

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 0{,}692 e^{-5{,}78\beta t}. \tag{7.32}$$

График относительного нарастания тока показан на рис. 7.4 сплошной кривой.

При $\beta t = 0$ ток достигает 98% установившегося значения. Значит, практически время установления тока можно принять

$$t_y = \frac{0{,}6}{\beta} = 0{,}6 r_0^2 \gamma\mu.$$

Для стального провода $r_0 = 0{,}0005$ м, $\gamma = 10^7 \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu = 1000\mu_0$, $t_y = 1{,}88$ мс.

Для медного провода $r_0 = 0{,}0005$ м, $t_y = 1{,}107$ мс.

Относительное убывание тока после отключения напряжения (при сохранении замкнутого контура) определится выражением (7.32), что графически показано на рис. 7.4 пунктирной линией.

Важно отметить, что при убывании тока его плотность у поверхности провода равна нулю, а на оси — максимальна в течение всего переходного процесса.

Из выполненных расчетов следует, что процесс установления тока в проводе определяется его радиусом, удельной проводимостью и магнитной проницаемостью.

7.4. ЭКРАНИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

7.4.1. ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Задачи расчета неоднородного в пространстве квазистатического или импульсного МП, воздействующего на проводящий ферромагнитный экран, в инженерной практике встречаются нередко. Такие задачи возникают, например, при расчете помехонесущих полей, возникающих при размагничивании транспортных средств (в частности, судов) внешними МП, на измерительных и управляющих кабелях, на электронной аппаратуре. Проводящим экраном в данном случае является корпус судна, и воздействующее размагничивающее поле может существенно изменяться по длине корпуса. Определение эффективности экранирования оболочек и металлических конструкций необходимо также при расчете наводок на кабели и аппаратуру управления, расположенные вблизи силового электрооборудования, являющегося источником существенных МП. Ниже представлены результаты расчета эффективности экранирования круговыми цилиндрическими оболочками, которыми могут быть аппроксимированы многие реальные экраны (корпуса транспортных средств, оболочки блоков аппаратуры, кабельные волноводы и т. д.). Воздействующее поле предполагается плоскопараллельным. Это означает, что в каждый фиксированный момент времени его величина одинакова для всех точек любого поперечного сечения цилиндра, но различна для точек двух соседних поперечных сечений. При воздействии на оболочку квазистатических МП экранирующее действие определяется путем расчета функций экранирования оболочки. При воздействии импульсных полей расчет эффективности экранирования проводится с использованием импульсных функций оболочки, которые определяются исходя из предварительно полученных функций экранирования квазистатических МП.

7.4.2. МЕТОД РАСЧЕТА

В дальнейшем используется метод расчета эффективности экранирования каноническими оболочками с помощью дифференциальных уравнений в частных производных для скалярного магнитного потенциала и эквивалентных граничных условий (например, [7.1–7.2]). При расчете приняты допущения: МП, воздействующее на оболочку, является квазистатическим ($\lambda \gg D$, где λ — длина волны воздействующего поля, D — характерный размер оболочки), экранирующая оболочка предполагается тонкостенной ($d < \delta$, где d — толщина экрана, δ — глубина проникновения поля в материал оболочки), магнитная проницаемость материала экрана μ_s принята постоянной (μ_s — const). Последнее допущение предполагает линейный характер процессов в материале экрана и позволяет рассматривать раздельно экранирование составляющих поля, направленных вдоль соответствующих осей координатной системы. Для напряженности воздействующего МП справедливо соотношение

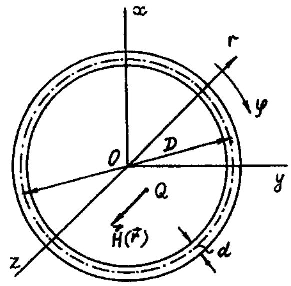


Рис. 7.5
Экранирование импульсного МП круговой цилиндрической оболочкой

$$\dot{\vec{H}}^{(0)}(\vec{r}, j\omega) = \dot{\vec{H}}^{(0)}(\vec{r})\exp(j\omega t), \qquad (7.33)$$

где $\dot{\vec{H}}^{(0)}(\vec{r}, j\omega)$ — вектор напряженности воздействующего поля, $\dot{H}^{(0)}(\vec{r})$ — вектор комплексной амплитуды поля, $\vec{r}$ — радиус-вектор из начала координат, ω — круговая частота, t — время.

В декартовой системе координат x, y, z (рис. 7.5) $\dot{\vec{H}}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{H}^{(0)}(z)$ — const (x, y) направление осей x и y всегда можно выбрать таким, чтобы составляющая вектора напряженности по оси x равнялась нулю ($\vec{H}^{(0)}(\vec{r}) = 0$).

Рассмотрим экранирование составляющей напряженности МП, вектор которой направлен вдоль оси x. Скалярный магнитный потенциал определяется выражением

$$\dot{u}_y^{(0)}(z, y, j\omega) = -\int_0^y \dot{H}_y^{(0)}(z)\exp(j\omega t)dy, \qquad (7.34)$$

где $\dot{u}_y^{(0)}(z, y, j\omega)$, $\dot{H}_y^{(0)}(z)$ — скалярный потенциал и составляющая напряженности воздействующего поля по оси y.

Ранее было принято, что воздействующее МП является плоскопараллельным:

$$\int_0^y \dot{H}_y^{(0)}(z)\exp(j\omega t)dy = \dot{H}^{(0)}(z)\exp(j\omega t)dy,$$

поэтому при переходе к координатам x, y, z: $y = r\sin\varphi$,

$$\dot{u}_y^{(0)} = -\dot{H}_y^{(0)}(z)\exp(j\omega t)r\sin\varphi. \qquad (7.35)$$

На интервале (O, L), где L — длина цилиндрической оболочки, напряженность $\dot{H}_y^{(0)}(z)$ по оси y может быть разложена в ряд Фурье:

$$\dot{H}_y^{(0)}(z) = 0{,}5A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}z\right).$$

Подставляя $\dot{H}_y^{(0)}(z)$ в (7.35) и вынося за скобку общие множители, получим

$$\dot{u}_y^{(0)} = -[0{,}5A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n \cos(\Omega_n z)]r\sin\varphi\exp(j\omega t), \qquad (7.36)$$

где $\Omega_n = \dfrac{\pi n}{L}$.

В дальнейшем рассматривается экранирование члена полученного ряда (пространственной гармоники). При этом выражение для соответствующего члена ряда скалярного потенциала поля, индуцированного экраном [7.3]:

$$\dot{u}_{ny}^{(e)} = -\dot{A}_n \cos(\Omega_n z)\sin\varphi \dot{f}_{ny}(\vec{r})\exp(j\omega t), \qquad (7.37)$$

где $\dot{f}_{ny}(\vec{r})$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Для этого производится подстановка выражения (7.37) в уравнение Лапласа для скалярного потенциала $\dot{f}_{ny}(\vec{r})$ (в координатах r, φ, z):

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial z^2} = 0,$$

откуда

$$\dot{f}_{ny}''(\vec{r}) + \frac{1}{r}\dot{f}_{ny}'(\vec{r}) - \left(\frac{1}{r^2} + \Omega_n^2\right)\dot{f}_{ny}(\vec{r}) = 0. \qquad (7.38)$$

Решение уравнения (8.38) может быть записано как

$$\dot{f}_{ny}(\vec{r}) = \dot{C}_{ny} I_1(\Omega_n \vec{r}) + \dot{B}_{ny} K_1(\Omega_n \vec{r}),$$

где $\dot{C}_{ny}$, $\dot{B}_{ny}$ — неизвестные постоянные интегрирования, подлежащие определению; $I_1(\Omega_n \vec{r})$, $K_1(\Omega_n \vec{r})$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода первого порядка соответственно.

Пространственные гармоники скалярного потенциала поля, возбужденного круговой цилиндрической оболочкой радиуса R в ее внутренней области ($\dot{u}_{ny}^{e(2)}$) и во внешней области ($\dot{u}_{ny}^{e(1)}$), находятся в виде

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{ny}^{e(2)} \\ \dot{u}_{ny}^{e(1)} \end{Bmatrix} = -A_n \cos(\Omega_n z)\sin\varphi \exp(j\omega t)\begin{cases} \dot{C}_n I_1(\Omega_n r), \ r < R, \\ \dot{B}_n K_1(\Omega_n r), \ r > R \end{cases}. \qquad (7.39)$$

Для скалярного потенциала суммарного поля пространственные гармоники во внутренней области ($\dot{u}_{ny}^{(2)}$) и во внешней области ($\dot{u}_{ny}^{(1)}$) описываются выражениями

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{ny}^{(2)} \\ \dot{u}_{ny}^{(1)} \end{Bmatrix} = -A_n \cos(\Omega_n z)\sin\varphi \times \exp(j\omega t)\begin{cases} r + \dot{C}_{ny} I_1(\Omega_n r), \ r < R, \\ r + \dot{B}_{ny} K_1(\Omega_n r), \ r > R \end{cases}. \qquad (7.40)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями, предложенными С. В. Жуковым [7.5]:

$$\dot{H}_r^{(1)} \pm \dot{H}_r^{(2)} = \pm\frac{1}{h_\varphi h_z}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\begin{Bmatrix} p_S \\ q_S \end{Bmatrix} h_z\left(\dot{H}_\varphi^{(1)} \pm \dot{H}_\varphi^{(2)}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\begin{pmatrix} p_S \\ q_S \end{pmatrix} h_\varphi\left(\dot{H}_z^{(1)} \pm \dot{H}_z^{(2)}\right)\right]\right\}, \qquad (7.41)$$

где $\dot{H}_\beta^{(i)}\left(\beta = r, \varphi, z\right)$ — составляющие векторов напряженности суммарного поля по осям β вне ($i = 1$) и внутри экрана ($i = 2$) соответственно; $h_\beta(\beta = \varphi, z)$ — коэффициенты Ламе; $p_S = \mu_S\Delta/(2\mu_0)$, $q_S = 2/(j\omega\mu_0\sigma_S\Delta)$, $\Delta = (2/k)\mathrm{th}(kd/2)$, σ_S — электрическая проводимость экрана.

После подстановки в (7.41) соответствующих составляющих вектора напряженности МП вне и внутри экрана и решения полученной системы уравнений относительно $\dot{C}_{ny}$ получим

$$\dot{C}_{ny} = \frac{2Kp_S\beta_n(Rq_S\beta_n+1)-2K'(Rp_S\beta_n+1)}{\beta_n(q_S+p_S)R^{-1}-2IKp_Sq_S\beta_n^2+2I'K'}, \tag{7.42}$$

где

$$K = K_1(\Omega_n R),\ K' = [K_1(\Omega_n R)]'_r,\ I = I_1(\Omega_n R),$$
$$I' = [I_1(\Omega_n R)]'_r,\ \beta_n = (1/R^2)+\Omega_n^2.$$

Функция экранирования $\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}$ определяется в виде

$$\dot{S}_{\dot{H}_{ny}} = \dot{H}_{ny}^{(2)} / \dot{H}_{ny}^{(0)}, \tag{7.43}$$

где $\dot{H}_{ny}^{(2)}$, $\dot{H}_{ny}^{(0)}$ — пространственные гармоники ny составляющей напряженности суммарного поля в полости экрана и воздействующего на экран поля соответственно.

Выражения для $\dot{H}_{ny}^{(2)}$ и $\dot{H}_{ny}^{(0)}$ получаются из выражений для соответствующих гармоник $\dot{H}_{nr}^{(2)}$ и $\dot{H}_{nr}^{(0)}$ в координатах r, φ, $z = 0{,}5\pi$.

Используя (7.37) и (7.41) и проведя вычисление соответствующих градиентов, получим

$$\begin{Bmatrix} \dot{H}_{ny}^{(2)} \\ \dot{H}_{ny}^{(0)} \end{Bmatrix} = A_n \cos(\Omega_n z)\exp(j\omega t)\begin{cases} 1+\dot{C}_{ny}[I_1(\Omega_n r)]'_r, \\ 1 \end{cases} \tag{7.44}$$

откуда

$$\dot{S}_{\dot{H}_{ny}} = 1+\dot{C}_{ny}[I_1(\Omega_n r)]'_r.$$

Для удобства дальнейших расчетов выделим в частотном диапазоне воздействующего МП две области, для которых выполняются условия

$$\Delta = \begin{cases} d, d<2\delta \\ (1-j)\delta, d>2\delta \end{cases}.$$

Граничной для обеих областей является частота $\omega_0 = 8/(d^2\mu_S\sigma_S)$, которой соответствует время нарастания импульса воздействующего поля $t_0 = 0{,}25d^2\mu_S\sigma_S$.

Для диапазона низких частот воздействующего поля ($\omega < \omega_0$) $\Delta = d$, с учетом выражения (7.44), получим

$$\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}(j\omega) = 1+\frac{j\omega\alpha_{n1}+\alpha_{n2}}{j\omega\alpha_{n3}+\alpha_{n4}}[I_1(\Omega_n r)]'_r, \tag{7.45}$$

где

$$\alpha_{n1} = 2\mu_0\sigma_S d[Kp_S\beta_n - K'(Rp_S\beta_{1n}+1)],\ \alpha_{n2} = 4KRp_S\beta_n^2,$$
$$\alpha_{n3} = \mu_0\sigma_S d[\beta_n p_S(\Omega_n R)^{-1}+2I'K'],\ \alpha_{n4} = 2\beta_n[R^{-1}-2IKp_S\beta_n].$$

Проведя аналогичные выкладки для первого слагаемого выражения (7.37) для $\dot{C}_{0y}$ и $\dot{S}_{0y}(j\omega)$, получим

$$\dot{C}_{0y} = -\frac{q_S p_S + 2p_S R + R^2}{(q_S + p_S)R + q_S p_S + R^2}, \tag{7.46}$$

$$\dot{S}_{0y}(j\omega) = 1 + \frac{j\omega\alpha_{01} + \alpha_{02}}{j\omega\alpha_{03} + \alpha_{04}},$$

где

$$\alpha_{01} = \mu_0\sigma_S dR(2p_S + R),\ \alpha_{02} = 2p_S,$$
$$\alpha_{03} = -\mu_0\sigma_S dR(p_S + R),\ \alpha_{04} = -2(p_S + R).$$

Применив теорему Хевисайда [7.6] к выражению (7.46), для импульсной функции получим

$$\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}(\vec{n},t) = \dot{S}(t) + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}[I_1(\Omega_n r)]'_r + \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}{\alpha_3\alpha_4}[I_1(\Omega_n r)]'_r e^{-\frac{\alpha_4}{\alpha_3}t}, \tag{7.47}$$

где $\dot{S}(t)$ — функция Дирака.

Нахождение $\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}(t)$ для высокочастотной области ($\Delta = (1 - j)\delta$) связано со значительными математическими трудностями, поэтому целесообразно начальный участок импульсной функции аппроксимировать прямой

$$\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}(\vec{r},t) = \frac{\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}(\vec{r},t_0)}{t_0}t. \tag{7.48}$$

Пространственная гармоника поля внутри экрана определяется как свертка соответствующей пространственной гармоники воздействующего поля и импульсной функции экрана:

$$\dot{H}_{ny}^{(2)}(r,z,t_1) = \int_0^{t_1}\dot{H}_{ny}^{(0)}(z,t)\dot{S}_{ny}(r,t-\tau)d\tau.$$

Используя (8.48), получим

$$\dot{H}_{ny}^{(2)}(r,z,t_1) = \dot{H}_{ny}^{(0)}(z,t_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}[I_1(\Omega_n r)]'_r \cdot \dot{H}_{ny}^{(0)}(z,t_1) + $$
$$+ \int_0^{t_1}\dot{H}_{n}^{(0)}(z,\tau)\dot{S}_{\dot{H}_{ny}}(r,t-\tau)d\tau. \tag{7.49}$$

Результирующее (суммарное) значение y-й составляющей поля в точке (r, φ, $z = 0,5\pi$) внутри экрана в момент времени t_1 определяется суммированием величин всех пространственных гармоник внутреннего поля:

$$\dot{H}_{y}^{(2)}(r,z,t_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\dot{H}_{ny}^{(2)}(r,z,t_1). \tag{7.50}$$

Ход вычислений и все выкладки для расчета экранирования составляющей напряженности воздействующего поля, направленной по оси $z\,(\dot{H}_z^{(0)})$, аналогичны проведенным для $\dot{H}_y^{(0)}$.

Функции экранирования $\dot{S}_{\dot{H}_{nz}}(j\omega)$:

$$\dot{S}_{\dot{H}_{nz}}(j\omega)\Big|_{\omega<\omega_0} = 1 + \frac{j\omega\alpha'_{n1} + \alpha'_{n2}}{j\omega\alpha'_{n3} + \alpha'_{n4}}I_0(\Omega_n r), \tag{7.51}$$

где

$\alpha'_{n1} = -2\mu_0\sigma_S dK'_0 p_S, \alpha'_{n2} = 4K_0 p_S \Omega_n^2, \ \alpha'_{n3} = \mu_0\sigma_S d[p_S(\Omega_n R)^{-1} + 2I'_0 K'_0(\Omega_n)^{-2}],$

$\alpha'_{n4} = 2(\Omega_n R)^{-1} - 4I_0 K_0 p_S \Omega_n^2, \ I_0 = I_0(\Omega_n R), \ K_0 = K_0(\Omega_n R), \ I'_0 = [I_0(\Omega_n R)]'_r,$

$K'_0 = [K_0(\Omega_n R)]'_r.$

Для постоянной по координате z составляющей воздействующего продольного поля

$$\dot{S}_{\dot{H}_{0z}}(j\omega)\Big|_{\omega<\omega_0} = 1 + \frac{j\omega\alpha'_{01} + \alpha'_{02}}{j\omega\alpha'_{03} + \alpha'_{04}} I_0(\Omega_n R), \qquad (7.52)$$

где $\alpha'_{01} = -\mu_0\sigma_S dR$, $\alpha'_{02} = 0$, $\alpha'_{03} = \mu_0\sigma_S dR$, $\alpha'_{04} = 2$.

Дальнейшие вычисления проводятся по формулам (7.48)–(7.50) при замене $\alpha n1$, $\alpha n2$, $\alpha n3$, $\alpha n4$, на $\alpha'_{n1}, \alpha'_{n2}, \alpha'_{n3}, \alpha'_{n4}$ соответственно.

7.4.3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

На основании полученной методики составлена программа расчета эффективности экранирования с помощью компьютера, проведены численные расчеты для следующих данных:

$L = 4$ м, $K = 0{,}5$ м, $d = 8\cdot10^{-3}$ м,
$\mu_S = 180\mu_0$, $\sigma_S = 6{,}6\cdot10^6$ См/м.

Параметры воздействующего импульса МП (рис. 7.6): $H_m = 80$А·м$^{-1}$, $\tau_{i(0,1-0,9)} = 8{,}0$ нс, $\tau_{i(0,5)} = 20$ нс.

Результаты расчетов с погрешностью до 15% совпали с экспериментальными результатами. При этом распределение поперечного поля в полости экрана соответствовало распределению воздействующего поля, а распределение продольного поля значительно от него отличалось. Для этих составляющих экран снижал исходное поле приблизительно в 100 раз.

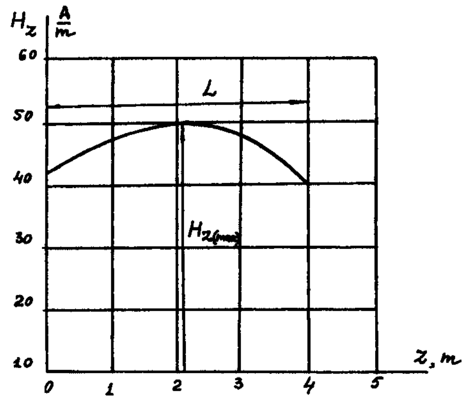


Рис. 7.6
Форма воздействующего импульса МП

Контрольные вопросы

1. Расскажите об особенностях расчета переходных процессов в ЭМП.
2. К каким видам уравнений математической физики приводятся уравнения, описывающие переходные процессы в ЭМП?
3. Как устанавливается ЭМП в проводящем электрический ток немагнитном материале при воздействии на него импульсного ЭМП?
4. Как устанавливается ЭМП в проводящем электрический ток ферромагнитном материале при воздействии на него импульсного ЭМП?
5. Как зависит время установления ЭМП в материале от формы воздействующего импульсного ЭМП?

8

ГЛАВА 8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

8.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В СИМВОЛИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Уравнения (2.8) и (2.10) записаны для мгновенных значений. Если напряженности E и H изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать уравнения (2.8) и (2.10) с помощью комплексных чисел. Пусть

$$E = E_m \sin(\omega t + \phi_E),\ H = H_m \sin(\omega t + \phi_H). \tag{8.1}$$

Можно записать

$$E = \mathrm{Im}\,\dot{E}_m e^{j\omega t}, \tag{8.2}$$

где Im — мнимая часть, $\dot{E}_m = E_m e^{j\phi_E}$.

Аналогично

$$H = \mathrm{Im}\,\dot{H}_m e^{j\omega t}. \tag{8.3}$$

Можно перейти к условной форме записи (к изображениям):

$$E \to \dot{E}_m e^{j\omega t}, \tag{8.4}$$

$$H \to \dot{H}_m e^{j\omega t}, \tag{8.5}$$

где стрелка представляет значок соответствия.

В дальнейшем переходим от амплитудных значений к действующим значениям, поэтому опускаем индекс m. Члены уравнений Максвелла теперь записываются в виде изображений

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\vec{H} \to e^{j\omega t}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}},\ \vec{\delta}_{пр} \to \gamma\dot{\vec{E}}e^{j\omega t},\ \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \to j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}, \\ &\mathrm{rot}\,\vec{E} \to e^{j\omega t}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}},\ \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \to j\omega\mu\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Подстановка (8.6) в дифференциальные уравнения Максвелла (2.8) и (2.10) дает возможность перейти к следующей форме записи (член $e^{j\omega t}$, входящий во все члены уравнений и не зависящий от координат, можно исключить):

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = -j\omega\varepsilon'\dot{\vec{E}}, \tag{8.7}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}, \tag{8.8}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon + j(\gamma/\omega)$.

Исключив из (8.7), (8.8) вектор $\dot{\vec{E}}$ или $\dot{\vec{H}}$, получим уравнения типа Гельмгольца отдельно для $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$:

$$\Delta\dot{\vec{E}} + k^2\dot{\vec{E}} = 0,\ \operatorname{div}\dot{\vec{E}} = 0, \tag{8.9}$$

$$\Delta\dot{\vec{H}} + k^2\dot{\vec{H}} = 0,\ \operatorname{div}\dot{\vec{H}} = 0, \tag{8.10}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$ — волновое число.

8.2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Пусть ЭМП распространяется в среде с электрической проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ. Уравнения Максвелла (8.7), (8.8) запишутся в виде

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}}, \tag{8.11}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}, \tag{8.12}$$

так как в электрически проводящей среде при промышленных частотах ($f \le 10^5$ Гц) $\gamma \gg \omega\varepsilon$, что дает возможность пренебречь токами смещения.

Уравнения (8.11) и (8.12) представляют собой уравнения с двумя неизвестными $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$. Можно осуществить разделение переменных. Для этого возьмем ротор от уравнения (8.11) и используем известную формулу векторного анализа (см. Приложение). Тогда

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{H}} - \nabla^2\dot{\vec{H}} = \gamma\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}.$$

Учтем, что $\operatorname{div}\dot{\vec{H}} = 0$, и поэтому $\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{H}} = 0$. Значение $\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}$ подставим из уравнения (8.12). Получим

$$\nabla^2\dot{\vec{H}} = j\omega\gamma\mu\dot{\vec{H}}. \tag{8.13}$$

Уравнение (8.13) является дифференциальным относительно $\dot{\vec{H}}$. Аналогичные операции можно осуществить с уравнением (8.12) для получения дифференциального уравнения относительно $\dot{\vec{E}}$:

$$\nabla^2\dot{\vec{E}} = j\omega\gamma\mu\dot{\vec{E}}. \tag{8.14}$$

Рассмотрим решения (8.13) и (8.14) для случая плоской электромагнитной волны.

8.3. ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Под плоской электромагнитной волной понимают волну, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которой расположены в плоскости xOy, перпендикулярной направлению распространения волны (ось Oz), и изменяющиеся только в функции координаты z и времени t (рис. 8.1). Расположим координатные оси так, чтобы ось Oy совпадала с магнитной напряженностью поля $\dot{\vec{H}}$. При этом $\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}$, где $\vec{j}$ — единичный орт оси Oy декартовой системы координат.

Из условия определения плоской волны

$$\frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial y} = 0.$$

Подставим $\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}$ в уравнение (8.13) и раскроем ∇^2 (см. Приложение):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H} = j\omega\gamma\mu\vec{j}\dot{H}. \qquad (8.15)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

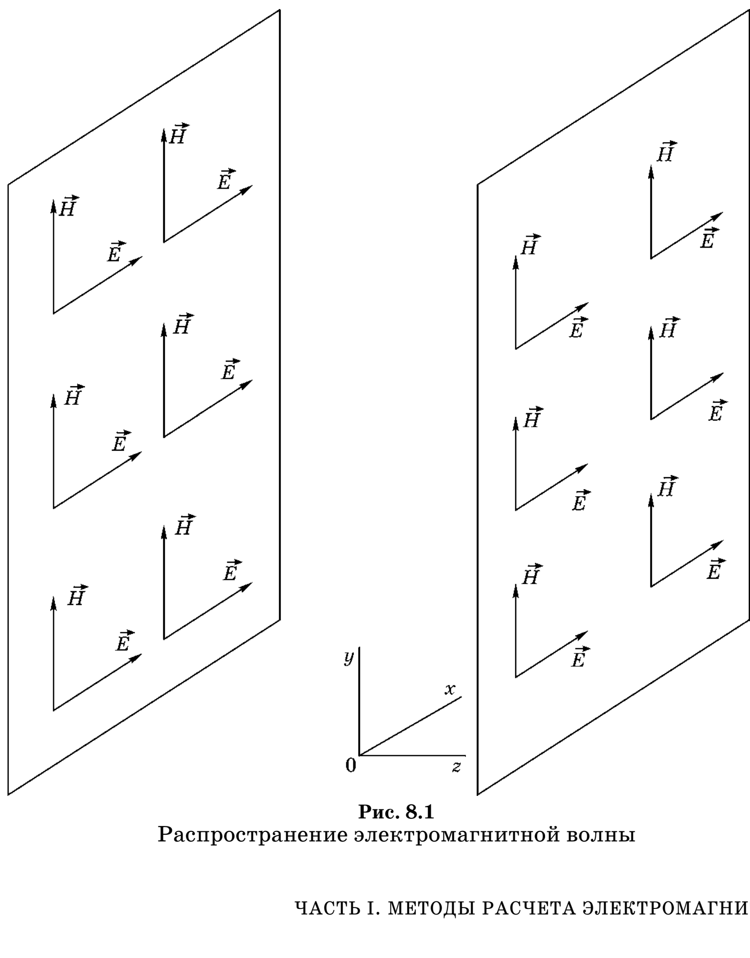


Рис. 8.1
Распространение электромагнитной волны

Тогда из (8.15) получим

$$\frac{d^2\dot{H}}{dz^2} = j\omega\gamma\mu\dot{H}. \tag{8.16}$$

В уравнении (8.16) вместо частной производной использована полная производная. Это связано с тем, что $\dot{H}$ является функцией лишь одной переменной z.

Уравнение (8.16) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого находится в виде [8.3]

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}, \tag{8.17}$$

где $\dot{C}_1, \dot{C}_2$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Из характеристического уравнения $p^2 = j\omega\gamma\mu$ найдем коэффициент

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu}. \tag{8.18}$$

Если принять во внимание, что $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = (1+j)/\sqrt{2}$, то p можно представить в виде

$$p = k(1 + j), \tag{8.19}$$

где $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}$.

Электрическую напряженность ЭМП можно найти из уравнения (8.11)

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}.$$

Найдем, прежде всего, $\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}$, учитывая $\frac{\partial\dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial\dot{H}}{\partial y} = 0$:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{\partial\dot{H}}{\partial z}\right). \tag{8.20}$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i}\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz}\right) = \vec{i}\left(-\frac{p}{\gamma}[\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}]\right). \tag{8.21}$$

Отсюда следует, что электрическая напряженность ЭМП в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси Ox. Об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси Ox. Таким образом, в плоской электромагнитной волне между $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ есть пространственный сдвиг в 90°.

Частное от деления p на γ называют волновым сопротивлением

$$Z_B = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j45^\circ}. \tag{8.22}$$

Волновое сопротивление Z_B, измеряемое в омах, зависит от свойств среды (γ, μ) и угловой частоты ω. Учитывая (9.21), проекция $\dot{\vec{E}}$ на ось Ox равна

$$\dot{E} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{E}_{\text{пад}} = Z_w \dot{C}_2 e^{-pz} \text{ и } \dot{E}_{\text{отр}} = -Z_w \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Аналогично проекция $\dot{\vec{H}}$ на ось Oy в соответствии с (9.17):

$$\dot{H} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{H}_{\text{пад}} = \dot{C}_2 e^{-pz} \text{ и } \dot{H}_{\text{отр}} = \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Волновое сопротивление Z_B можно трактовать как отношение $\dot{E}_{\text{пад}} / \dot{H}_{\text{пад}}$. Так как волновое число является числом комплексным (8.19) и имеет аргумент 45°, то сдвиг во времени между $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45°.

8.4. ТЕОРЕМА УМОВА–ПОЙНТИНГА

8.4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В любом электротехническом устройстве всегда существуют взаимно связанные ЭП и МП. При этом процесс преобразования и передачи энергии определяется не отдельно ЭП или МП, а их совокупностью, т. е. ЭМП. В системе источник – линия передачи – приемник можно отметить следующие энергетические процессы: в источнике механическая, химическая или другая энергия преобразуется в энергию ЭМП; вдоль линии происходит передача этой энергии, а в самой линии она преобразуется в тепловую энергию потерь, в приемнике — в полезную механическую, тепловую или другие виды энергии. Поэтому очень важно выяснить роль ЭМП в процессе преобразования и передачи энергии.

Для полей в однородных средах мощность тепловых потерь в единице объема составляет

$$P_0 = \gamma E^2, \tag{8.23}$$

а объемные плотности энергии ЭП и МП соответственно равны

$$W_{e0} = \frac{\varepsilon E^2}{2},\ W_{м0} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

Максвелл предположил, и это в дальнейшем подтвердилось, что плотность энергии ЭМП

$$W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}. \tag{8.24}$$

Как видно, энергия ЭМП в этом случае полностью характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и свойствами среды. Однако выражения (8.23) и (8.24), характеризуя распределение энергии, не показывают ее движения. Между тем ясно, что передача энергии от источника к приемнику, как и выделение тепла в линии, связана с движением энергии ЭМП. Поэтому и движущаяся энергия ЭМП должна, очевидно, также определяться векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

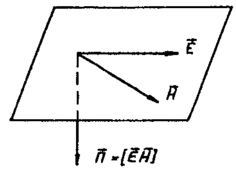


Рис. 8.2
Направление вектора Умова–Пойнтинга

Переносимую в пространстве энергию можно характеризовать потоком энергии $\vec{\Pi}$, проходящим в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения поля. Величина плотности потока энергии подсчитывается или как произведение объемной плотности энергии на скорость распространения электромагнитной волны (редакция Умова), или как произведение величин $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (редакция Пойнтинга) $\vec{\Pi} = w\vartheta = \vec{E}\vec{H}$. Поскольку векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны, то плотность потока энергии изображают в виде вектора $\vec{\Pi}$ (рис. 8.2), который (перпендикулярен к плоскости, проходящей через $\vec{E}$ и $\vec{H}$) показывает направление распространения электромагнитной волны. $\vec{\Pi}$ называют вектором Умова–Пойнтинга. Он имеет размерность мощности, отнесенной к единице поверхности. Его направление совпадает с направлением движения острия правого винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от $\vec{E}$ к $\vec{H}$.

Электромагнитная волна при взаимодействии с поглощающей преградой перестает существовать. Ее масса, энергия и импульс передаются преграде. Энергия электромагнитной волны преобразуется в энергию теплового движения частиц преграды. Ее действие в точке пространства оценивается средним значением величины вектора Умова–Пойнтинга за период волны. Эта величина называется интенсивностью электромагнитной волны. Интенсивность J плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны равна

$$J = 0{,}5\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0^2 = 0{,}5\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}H_0^2,$$

где $E_0(H_0)$ — амплитуда электрической (магнитной) составляющих напряженности ЭМП.

8.4.2. ТЕОРЕМА УМОВА–ПОЙНТИНГА ДЛЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Большое значение в теории ЭМП имеет теорема Умова–Пойнтинга, которая описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова–Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая — комплексная форма (для синусоидально изменяющихся величин). В соответствии с (8.14) энергия ЭМП в объеме dv равна

$$W_0 dv = \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)dv. \tag{8.25}$$

Для того чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dv, умножим (8.11) на $\vec{E}\,dv$, а (9.12) — на $\vec{H}\,dv$. Получим

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}dv = \left(\gamma\vec{E}\vec{E} + \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)dv = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon E^2}{2}\right)dv, \qquad (8.26)$$

$$\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E}dv = \left(-\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)dv = \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu H^2}{2}\right)dv. \qquad (8.27)$$

Из (8.26) вычтем (8.27), получим

$$(\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E})dv = \left\{\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)\right\}dv. \qquad (8.28)$$

Используя формулу векторного анализа (см. Приложение)

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H},$$

получим

$$-\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]dv = \left\{\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)\right\}dv.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение $[\vec{E}\vec{H}]$ через $\vec{\Pi}$, тогда

$$-\operatorname{div}\vec{\Pi}dv = \left\{\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)\right\}dv. \qquad (8.29)$$

Распространим (8.29) на некоторый объем конечных размеров, проинтегрировав по объему V:

$$-\int_V \operatorname{div}\vec{\Pi}dv = \int_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)dv. \qquad (8.30)$$

В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса (1.26) объемный интеграл, находящийся в левой части выражения (8.20), преобразуется в поверхностный, откуда

$$-\oint_S \vec{\Pi}d\vec{s} = \int_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)dv. \qquad (8.31)$$

Левая часть (8.31) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторый объем V.

В соответствии с уравнением Джоуля–Ленца в дифференциальной форме, γE^2 есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени. Поэтому $\int_V \gamma E^2 dv$ есть энергия, выделяющаяся в единицу времени в объеме V; $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема. Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V, равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты и мощности, идущей на приращение энергии ЭМП.

Теорему Умова–Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса; левая часть (8.31) есть мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (8.31) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (8.31) получено из предположения, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)=0 \text{ и } -\int\limits_V \operatorname{div}\vec{\Pi}dv=\int\limits_V \gamma E^2 dv.$$

Необходимо обратить внимание и на то, что формула (8.31) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{\Pi}$ транзитом через объем V.

8.4.3. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ ОТ ГЕНЕРАТОРА К ПРИЕМНИКУ ПО КОАКСИАЛЬНОМУ КАБЕЛЮ

Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику. Провода в линиях передачи выполняют двойную роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике. Покажем справедливость этого утверждения.

Рассмотрим процесс передачи энергии от генератора к приемнику на примере идеализированного коаксиального кабеля. В них ЭМП заключено только внутри объема, занимаемого кабелем.

Если при напряжении U по кабелю протекает ток I и сопротивлением жилы и оболочки кабеля по сравнению с сопротивлением приемника можно пренебречь, то передаваемая мощность $P = UI$.

Мы пренебрегаем сопротивлением жилы и оболочки, и это означает, что ЭМП в них можно пренебречь по сравнению с полем в диэлектрике между ними.

Пусть радиус жилы и внутренний радиус оболочки кабеля (рис. 8.3) таковы, что $r_2 - r_1 \ll r_1$.

Приближенно можно считать, что напряженности E и H во всех точках диэлектрика имеют одинаковые значения и равны

$$E=\frac{U}{r_2-r_1},\ H=\frac{I}{\pi(r_2+r_1)}.$$

Отсюда $U = E(r_2 - r_1)$, $I = H\pi(r_2 + r_1)$ и мощность

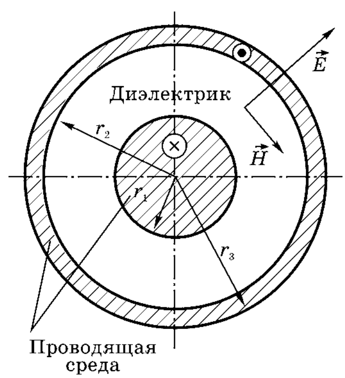


Рис. 8.3
Коаксиальный кабель

$$P = EHS,\ P = UI = EH\pi(r_2^2 - r_1^2) = EHS,$$

где S — площадь сечения диэлектрика.

Таким образом, произведение $P/S = EH$ характеризует мощность, передаваемую через единицу площади сечения диэлектрика.

Так как вектор $\vec{E}$ направлен по радиусу, вектор $\vec{H}$ перпендикулярен ему, а мощность передается вдоль оси кабеля, то произведение EH можно рассматривать как векторное.

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика. В рассматриваемом примере оно представляет собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 (рис. 8.4). В реальном коаксиальном кабеле поле неоднородно, и оба провода имеют сопротивление. В жиле и оболочке напряженности электрического поля направлены параллельно оси Oz кабеля и равны

$$E_{z1} = \frac{\delta_1}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi r_1^2},\ E_{z2} = \frac{\delta_2}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi(r_3^2 - r_2^2)r}.$$

Они направлены перпендикулярно радиусу r в рассматриваемой точке и оси кабеля.

В изоляции кабеля напряженность МП

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r},$$

а напряженность ЭП имеет и радиальную, и осевую составляющие аналогично полю двухпроводной линии. При этом радиальная составляющая представляет собой напряженность поля цилиндрического конденсатора

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

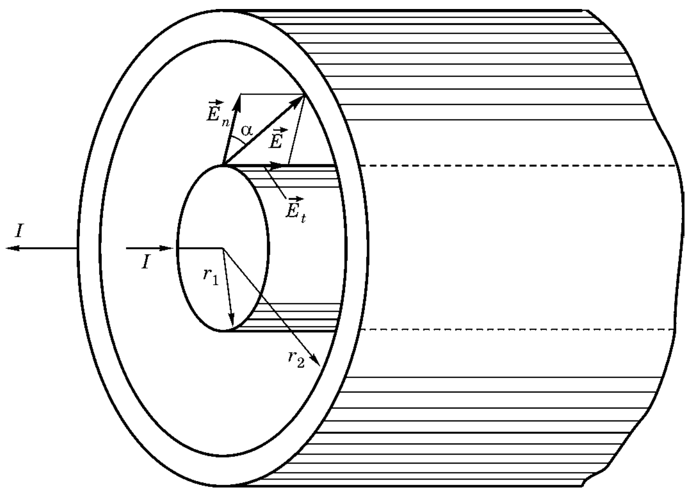


Рис. 8.4
Распространение энергии по коаксиальному кабелю

Вектор Пойнтинга имеет в изоляции осевую Π_z и радиальную Π_r составляющие, а в жиле и оболочке — только радиальную.

Осевая составляющая характеризует энергию, поступающую в жилу и оболочку и превращающуюся там в тепло. Таким образом, энергия от генератора к приемнику движется только в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Если в конце кабеля (у приемника) напряжение и радиальная составляющая напряженности ЭП соответственно равны U и E_r, то потребляемую приемником мощность можно определить как поток вектора $\vec{\Pi}$, имеющего осевую составляющую $\Pi_z = E_r H_\varphi$, через поверхность S сечения диэлектрика:

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \Pi_z r dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{I}{2\pi r} r dr = UI. \tag{8.32}$$

Мощность тепловых потерь в отрезке жилы длиной l определяется как поток вектора $\vec{\Pi}$, имеющего радиальную составляющую $\Pi_{r1} = E_{z1} H_{\varphi 1}$, через боковую поверхность цилиндра $S_1 = 2\pi r_1 l$. Поскольку Π_{r1} во всех точках этой поверхности имеет одинаковые значения:

$$\Pi_{r1} = \frac{I}{\gamma \pi r_1^2} \cdot \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 r_1^3},$$

то

$$P_1 = \Pi_{r1} 2\pi r_1 l = I^2 R_1,$$

где $R_1 = \dfrac{l}{\gamma \pi r_1^2}$ — сопротивление отрезка жилы.

Если учесть, что при $r = r_2$ напряженность $H_{\varphi 2} = \dfrac{I}{2\pi r_2}$, а при $r = r_3$ она равна нулю, то мощность тепловых потерь в отрезке оболочки равна потоку вектора $\vec{\Pi}$, имеющего радиальную составляющую

$$\Pi_{r2} = E_{z2} H_{\varphi 2} = \frac{I}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \frac{I}{2\pi r_2},$$

через боковую поверхность цилиндра $S_2 = 2\pi r_2 l$, т. е.

$$P_2 = \Pi_{r2} 2\pi r_2 l = I^2 R_2,$$

где $R_2 = \dfrac{l}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)}$ — сопротивление отрезка оболочки. Вне кабеля ЭМП отсутствует, значит, движения энергии там нет.

Проведенный анализ показывает, что энергия от источника к приемнику движется в диэлектрике между жилой и оболочкой кабеля. Из диэлектрика энергия ЭМП поступает также в жилу и оболочку, где преобразуется в тепло. Аналогичным образом для двухпроводной линии передачи можно прийти к выводу, что энергия движется не по проводам, а вдоль проводов в диэлектрике, окружающем эти провода. Провода определяют направление движения энергии и поглощают часть ее на нагрев.

Из рассмотрения следует, что вектор Пойнтинга выражает поток энергии ЭМП в единицу времени (поток мощности) через единицу поверхности, нормальной к направлению распространения энергии.

Таким образом, зная распределение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве, можно определить движущуюся энергию ЭМП в каждой точке, а следовательно, и рассчитать передаваемую и затрачиваемую на нагрев проводников мощность в любом электротехническом устройстве.

Необходимо отметить, что простое наложение постоянных ЭП и МП не создает ЭМП. Например, если на ЭСП конденсатора наложить поле постоянного магнита, то, хотя в каждой точке некоторой области будут определенные значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$, векторное произведение этих величин нельзя трактовать как вектор Пойнтинга, поскольку здесь нет движения и преобразования энергии. Поэтому понятие вектора Пойнтинга относится только к ЭМП.

8.5. ТЕОРЕМА УМОВА–ПОЙНТИНГА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Перед тем как записать теорему Умова–Пойнтинга в комплексной форме, рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U}\hat{I} = P + jQ.$$

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные R, индуктивность L и емкость C. Тогда реактивная мощность

$$Q = I^2 X = I^2(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = \omega[I^2 L - I^2(\frac{1}{\omega C})^2 C] = 2\omega(w_m - w_e).$$

Здесь

$$w_m = \frac{LI^2}{2} \text{ и } w_e = \frac{CU_C^2}{2},$$

где U_C — напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной w_m и электрической w_e энергиями цепи, умноженной на 2ω. Подобно тому как в цепи переменного тока для вычисления полной мощности $\tilde{S}$ надо умножить комплекс напряжения $\dot{U}$ на сопряженный комплекс тока $\hat{I}$, вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга $\tilde{\vec{\Pi}} = [\dot{\vec{E}}\hat{\vec{H}}]$.

Вместо $-\oint \vec{\Pi} d\vec{S}$ теперь будет

$$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = -\int_V \operatorname{div} \tilde{\vec{\Pi}} dv = \int_V (\dot{\vec{E}} \operatorname{rot} \hat{\vec{H}} - \hat{\vec{H}} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}) dv.$$

В соответствии с (8.11) и (8.12)

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}}$$
$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot}\hat{\vec{H}} = \gamma\hat{\vec{E}} - j\omega\varepsilon\hat{\vec{E}}$ и

$$\dot{\vec{E}}\operatorname{rot}\hat{\vec{H}} - \hat{\vec{H}}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = \gamma\dot{\vec{E}}\hat{\vec{E}} - j\omega\varepsilon\hat{\vec{E}}\dot{\vec{E}} + j\omega\mu\hat{\vec{H}}\dot{\vec{H}} =$$
$$= \gamma E^2 + 2j\omega\left(\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2}\right).$$

Поэтому

$$-\oint \vec{\Pi}d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dv + 2j\omega\int_V\left(\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2}\right)dv. \qquad (8.33)$$

Первое слагаемое правой части (8.33) представляет собой активную мощность, второе — реактивную. Таким образом, теорему Умова–Пойнтинга можно записать еще следующим образом:

$$-\oint \vec{\Pi}d\vec{S} = P + jQ.$$

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивлений проводников на переменном токе.

Контрольные вопросы

1. Назовите преимущества, которые получает расчетчик при переходе к символической форме записи уравнений ЭМП.
2. Запишите уравнения Максвелла в символической форме.
3. Как можно рассчитать активное и реактивное сопротивления материальной среды с помощью комплексных чисел?
4. Всегда ли целесообразно переходить к описанию уравнений ЭМП в символической форме?

9

ГЛАВА 9

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

9.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Одной из чрезвычайно важных особенностей уравнений Максвелла является то, что они описывают ЭМП в отсутствие электрических зарядов и токов. Из этих уравнений следует, что созданные однажды ЭМП способны самостоятельно существовать вне зависимости от того, действует ли создавший их источник или он уже прекратил свое существование. На любом расстоянии от источника электромагнитного возмущения переменные ЭП и МП автоматически поддерживают друг друга: изменение во времени одного из них служит источником возникновения другого.

Появление в той или иной точке пространства ЭМП можно объяснить следующим образом: созданное источником электромагнитное возмущение распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн с конечной скоростью (в вакууме или в воздухе со скоростью света $c = 3{\cdot}10^8$ м/с). Другими словами, созданные источником электромагнитные возмущения вызывают изменение свойств пространства сначала вблизи источника, а затем эти изменения свойств распространяются в пространстве. При этом самих физических волн нет, но так как изменение свойств происходит в направлении распространения ЭМП с конечной скоростью, кажется, как будто в пространстве перемещается электромагнитная волна. Под волной понимается процесс распространения состояния материальной среды или его возбуждения без переноса массы или вещества самой среды.

В любой электромагнитной волне, распространяющейся в свободном пространстве, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и каждый из них перпендикулярен направлению распространения волн. А это означает, что такие электромагнитные волны являются поперечными. В несвободном пространстве (волноводе, световоде) волны могут иметь продольную составляющую. В жидкостях и газах упругие волны могут быть только продольными.

Хотя поле электромагнитной волны и обладает тем специфическим свойством, что оно способно существовать и в отсутствие каких-либо заряженных частиц, тем не менее, чтобы создать электромагнитную волну, заряды все же нужны. Если заряды покоятся, то они создают вокруг себя только электростатическое поле и никаких волн не будет. Если заряды будут двигаться с постоянной скоростью, то и это не приведет к появлению электромагнитных волн: всегда найдется такая инерциальная система, связанная с зарядом, в которой заряд будет просто покоиться. С точки зрения наблюдателя этой системы и других инерциальных систем, волн быть не должно. Таким образом, чтобы излучать, заряд должен двигаться с ускорением.

Электромагнитные волны обладают рядом свойств, которые являются общими также и для других волн (звуковых, сейсмических и др.).

Поверхность равных фаз — поверхность, в любой точке которой в заданный момент времени фазы всех волн одинаковы. Поверхность равных фаз называется также фронтом волны. Если она плоскость, перпендикулярная распространению волны, волна называется плоской. Если поверхности равных фаз — сферы и цилиндры — волны соответственно сферические и цилиндрические.

Когерентные волны — волны, разность фаз которых постоянна, т. е. не меняется со временем. В точках, где две когерентные волны приходят в фазе, они усиливают друг друга, где в противофазе — они ослабляют друг друга; в результате получается интерференционная картина. Если падающая и отраженная волны одинаковы, то при интерференции в местах, где фазы совпадают, образуются пучности, а где фазы противоположны — узлы, в результате образуется стоячая волна. В стоячей волне поток энергии отсутствует: энергия в ней перемещается только в пределах, ограниченных смежным узлом и пучностью.

Фазовая скорость волны — это скорость, с которой перемещается какая-то часть волны, например гребень (амплитуда) или впадина. Линия, направление которой в каждой точке совпадает с направлением потока энергии в волне, называется лучом. Излучение волн обычно производится источниками ограниченных размеров, в результате чего возникает расходящаяся волна. На достаточно большом расстоянии от источника эту волну можно принять за плоскую.

При падении электромагнитной волны на плоскую поверхность волна частично отражается, частично преломляется. Между углами падения (α), отражения (α_1) и преломления (α_2) существуют соотношения

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

где n — показатель преломления, v_1 и v_2 — скорости распространения волны в соответствующих средах (рис. 9.1).

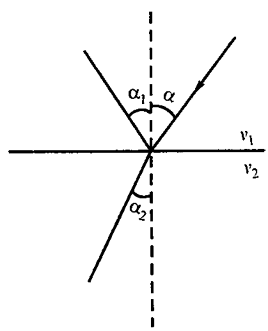


Рис. 9.1
Распространение электромагнитной волны в двухслойной среде

Огибание тела волной (в том числе и электромагнитной) называется дифракцией. Если размеры тела малы в сравнении с длиной волны — тени нет. Если размеры тела соизмеримы с длиной волны или больше длины волны, то тень есть. Переход от света к тени происходит по сложному закону с чередующимся увеличением и уменьшением амплитуды, что обусловлено интерференцией волн, огибающих тело. Дифракция наблюдается и при прохождении света через отверстие на экран, который находится позади этого отверстия. Чем меньше диаметр отверстия по сравнению с длиной волны, тем шире область, в которую проникает свет.

Во многих случаях скорость распространения волны v зависит от частоты f. В этом случае смесь волн с различными частотами при преломлении разделяется, рассеивается — возникает дисперсия (разделение белого света на спектр частот, т. е. на цвета). Область частот, в которой скорость v убывает с увеличением частоты $\left(\frac{dv}{df}<0\right)$, называется областью нормальной дисперсии. Область частот, в которой при увеличении f скорость v также увеличивается $\left(\frac{dv}{df}>0\right)$, называется областью аномальной дисперсии. Дисперсия волн наблюдается, например, при распространении электромагнитных волн в волноводах.

Иногда нелинейность среды является причиной того, что амплитуда волны распространяется с другой скоростью, чем остальная часть волны. В результате синусоидальная волна превращается в пилообразную.

ЭМП в зависимости от частоты можно классифицировать на несколько видов.

1. **Статические поля** ($f = 0$). Электростатическое поле неподвижных зарядов (рассматривается в гл. 3).

2. **Стационарные поля** ($f = 0$, но движение есть). Движущиеся с постоянной скоростью заряды образуют постоянные токи, а они, в свою очередь, вызывают постоянные МП (также гл. 3).

3. **Квазистационарные поля** охватывают переменные ЭМП как низких ($f > 0$), так и высоких частот, но таких, чтобы токи электрической проводимости были существенно выше токов электрического смещения (когда $\gamma \gg \omega\varepsilon$). Такие поля имеют место при частотах, когда $\lambda \gg D$, λ — длина электромагнитной волны, D — поперечные размеры линии, вдоль которой распространяется волна, или поперечные размеры устройства, оборудования, в котором рассматривается ЭМП (гл. 3 и 7).

4. В зависимости от геометрических размеров, предельные частоты при которых **ЭМП можно еще рассматривать как квазистационарное**, $f = 10^5 \ldots 10^9$ Гц.

5. При более высоких частотах распространения **ЭМП рассматривают с помощью электромагнитных волн**. Распространение электромагнитных волн в зависимости от частоты относят либо к электродинамическому режиму (при $\lambda \le D$ необходимо учитывать и токи проводимости и токи смещения, $f < 10^{12}$ Гц), либо к волновому и квазиоптическому режимам (для процессов в диэлектрике и свободном пространстве, когда доминирующими являются

Таблица 9.1

Распределение электромагнитных волн по диапазонам

Диапазон	Длина волны, м	Частота, МГц	Область применения
Сверхдлинные волны (СДВ)	100000–10000	$3\cdot10^{-3}$–$3\cdot10^{-2}$	Радионавигация, радиотелеграфная связь, метеослужба
Длинные волны (ДВ)	10000–1000	$3\cdot10^{-2}$–$3\cdot10^{-1}$	Радиотелеграфная и радиотелефонная связь, радиовещание, радионавигация
Средние волны (СВ)	1000–100	$3\cdot10^{-1}$–3	Радиотелеграфная и радиотелефонная связь, радиовещание, радионавигация
Короткие волны (КВ)	100–10	3–$3\cdot10^{+1}$	Радиовещание, радиотелеграфная, радиотелефонная и радиолюбительская связь
Ультракороткие волны (УКВ)	10–0,001	$3\cdot10^{+1}$–$3\cdot10^{+5}$	Радиовещание, телевидение, радиолокация, космическая радиосвязь, радиолюбительская связь и т. д.
Метровые	10–1	$3\cdot10^{+1}$–$3\cdot10^{+2}$	Радиовещание, телевидение, радиолокация, космическая радиосвязь, радиолюбительская связь и т. д.
Дециметровые	1–0,1	$3\cdot10^{+2}$–$3\cdot10^{+3}$	Телевидение, радиолокация, радиорелейная связь, космическая радиосвязь и т. д.
Сантиметровые	0,1–0,01	$3\cdot10^{+3}$–$3\cdot10^{+4}$	Радиолокация, радиорелейная связь, астрорадионавигация и т. д.
Миллиметровые волны оптического диапазона	0,01–0,001	$3\cdot10^{+4}$–$3\cdot10^{+5}$	Радиолокация и т. д.
Инфракрасные	$1\cdot10^{-3}$–$7{,}5\cdot10^{-7}$	$3\cdot10^{+5}$–$4\cdot10^{+8}$	Квантовая радиоэлектроника, пассивная и активная радиолокация
Видимые и световые	$7{,}5\cdot10^{-7}$–$4\cdot10^{-7}$	$4\cdot10^{+8}$–$7{,}5\cdot10^{+8}$	—
Ультрафиолетовые	$4\cdot10^{-7}$–$20\cdot10^{-10}$	$7{,}5\cdot10^{+3}$–$15\cdot10^{+10}$	—

токи смещения при $\omega\varepsilon \gg \gamma$). В электродинамическом режиме рассматривается распространение электромагнитных волн в кабелях и волноводах. В волновом и квазиоптическом режимах рассматривается распространение электромагнитных волн в радиотехнике, световодах, лазерной технике. В этом режиме длина волны, как правило, существенно меньше поперечных размеров направляющей системы ($\lambda \ll D$), частоты $f > 10^{12}$ Гц, либо волны распространяются в свободном пространстве. Более подробно распределение электромагнитных волн по диапазонам частот приведено в табл. 9.1.

9.2. ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Представления об электромагнитных излучениях, о распространении в пространстве электромагнитных волн являются и физически, и математически наиболее сложными в теории ЭМП, поэтому опишем эти представления с разных сторон по возможности подробно.

В предыдущей главе показано, что исследование переменного ЭМП математически наиболее просто производить с помощью плоской электромагнитной волны. Плоская электромагнитная волна обладает следующим свойством: векторы напряженности ЭП $\vec{E}$ и напряженности МП $\vec{H}$ в любой данный момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной распространению волны, например XOY, и имеют в этой плоскости одинаковое значение. Меняются они только в функции координаты z (направления распространения волны) и времени t. Такую волну называют еще линейно-поляризованной (ось волны ориентирована вдоль линии, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ сохраняют постоянное направление в указанной выше плоскости и меняются с течением времени по определенному закону. В неполяризованной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке пространства имеют все возможные направления, быстро и беспорядочно сменяют друг друга так, что ни одно из этих колебаний не является преимущественным).

На основании изложенного в гл. 8 можно показать, что уравнения ЭМП в диэлектрике

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

в случае плоской волны приводятся к уравнениям

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t};\ \frac{\partial E}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Дифференцируя второе уравнение по z и первое по t, получаем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial z};\ -\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

откуда имеем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2};$$

где $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Решим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0. \qquad (9.1)$$

Представим его в виде

$$DE = 0,$$

где

$$D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right). \qquad (9.2)$$

Введем новые переменные

$$\xi = z - vt;$$
$$\eta = z + vt,$$

тогда

$$z = \frac{\xi + \eta}{2};\ \ t = \frac{\eta - \xi}{2v}.$$

Представим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}; \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{9.4}$$

Умножив выражение (9.3) на $-2v$, а выражение (9.4) на $2v$, получим

$$-2v\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial z};$$

$$2v\frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}.$$

Подставляя полученные выражения в (9.2), найдем

$$D=-4v^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta};\ -4v^2\frac{\partial^2 E}{\partial\xi\partial\eta}=0;\ \frac{\partial^2 E}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

Последнее выражение позволяет написать

$$E=f_1(\xi)+f_2(\eta)=F_1(z-vt)+F_2(z+vt).$$

Аналогично, имеем

$$H=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[F_1(z-vt)-F_2(z+vt)].$$

Рассмотрим сначала частные решения

$$E=F_1(z-vt)\ \text{и}\ H=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}F_1(z-vt). \tag{9.5}$$

В любой точке, движущейся в положительную сторону оси z со скоростью $\frac{dz}{dt}=v$, значения E и H остаются постоянными. Действительно, положение такой точки определяется координатой $z = vt + z_0$, следовательно, величины E и H в этой движущейся точке имеют значения

$$E=F_1(vt+z_0-vt)=F_1(z_0)\text{— const};\ H=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}F_1(z_0)\text{— const}.$$

Отсюда следует, что каждое определенное значение величины E или величины H распространяется в сторону положительной оси z со скоростью v, т. е. частные решения (10.5) представляют собой прямую волну, распространяющуюся (бегущую) в положительном направлении оси z.

Аналогично, частные решения

$$E=F_2(z+vt);\ H=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}F_2(z+vt)$$

определяют электромагнитную волну, движущуюся (бегущую) со скоростью v в отрицательном направлении оси z (обратную волну).

Прямая и обратная волны распространяются в пространстве со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. В пустоте (в воздухе) $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Абсолютные значения напряженностей МП и ЭП как в прямой, так и в обратной волне связаны соотношением

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E, \tag{9.6}$$

откуда получаем

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2}. \tag{9.7}$$

Если существует только прямая или только обратная волна, то энергии МП и ЭП равны друг другу.

9.3. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ПЛОСКАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

Монохроматическая волна (*моно* — один, *хромо* — цвет) представляет собой электромагнитную волну со строго постоянной частотой колебаний. Таким образом, в плоской монохроматической волне векторы E и H меняются во времени по синусоидальному (гармоническому) закону. Пусть

$$E = E_m(z)\cos(\omega t + \psi_1).$$

Подставив значение E в волновое уравнение (9.1), получим

$$-\omega^2 E_m(z)\cos(\omega t + \psi_1) - v^2\frac{d^2E_m(z)}{dz^2}\cos(\omega t + \psi_1) = 0. \tag{9.8}$$

Введем обозначение $\frac{\omega}{v} = k$ — волновое число.

$$\frac{2\pi}{Tv} = k;\ \frac{2\pi}{\lambda} = k.$$

Сократив (9.8) на $\cos(\omega t + \psi_1)$ и подставив k, найдем

$$\frac{d^2E_m(z)}{dz^2} + k^2E_m(z) = 0,$$

решением которого является

$$E_m(z) = E'\cos(kz + \psi_2).$$

Тогда

$$E = E'\cos(kz + \psi_2)\cos(\omega t + \psi_1) =$$
$$= \frac{E'}{2}[\cos(\omega t - kz + \psi_1 - \psi_2) + \cos(\omega t + kz + \psi_1 + \psi_2)]$$

или

$$\begin{aligned} E &= E_m\cos(\omega t - kz + \alpha) + E_m\cos(\omega t + kz + \beta),\\ H &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_m\cos(\omega t - kz + \alpha) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_m\cos(\omega t + kz + \beta). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Векторы E и H представляются в виде суммы бегущих прямых и обратных волн. Если существует только прямая волна, то

$$E = E_m \cos(\omega t - kz + \alpha),\ H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m \cos(\omega t - kz + \alpha).$$

Пусть $\alpha = 0$. Рассмотрим распределение волны в момент времени $\omega t = \frac{\pi}{2}$:

$$E = E_m \cos(90^\circ - kz) = E_m \cos(kz - 90^\circ) = E_m \sin kz,$$

$$H = H_m \sin kz;\ \ k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Распространение электромагнитной волны изображено на рис. 9.2.

Отношение

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_B$$

имеет размерность электрического сопротивления и может рассматриваться как волновое сопротивление среды. В случае распространения волны в пустоте (в воздухе)

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 120\pi = 377\ \text{Ом}.$$

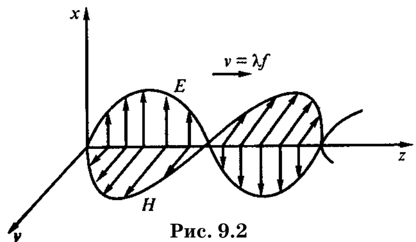


Рис. 9.2
Распространение электромагнитной волны в пространстве

9.4. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ СТОЯЧИХ ВОЛН

Выражения (9.9) описывают ЭМП с помощью бегущих волн (прямой и обратной). Если начала отсчета времени и координаты выбрать так, чтобы α и β были равны нулю, то суперпозиция прямой и обратной волны дает

$$E = E_m \cos(\omega t - kz) + E_m \cos(\omega t + kz) = 2E_m \cos kz \cdot \cos\omega t;$$
$$H = H_m \cos(\omega t - kz) + H_m \cos(\omega t + kz) = 2H_m \sin kz \cdot \sin\omega t \quad (9.10)$$

(из основных формул тригонометрии

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ \ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

Это и есть уравнения стоячей электромагнитной волны. Они состоят из двух стоячих волн — электрической и магнитной. Видно, что частота стоячей волны ω та же, что и у бегущих волн.

Амплитуда зависит от z.

В точках, где $|\cos kz| = 1$ или $|\sin kz| = 1$, мы имеем максимумы — пучности. А где $\cos kz = 0$ или $\sin kz = 0$ — минимумы (узлы). Интервалы между соседними пучностями или узлами равны половине длины волны (рис. 9.3).

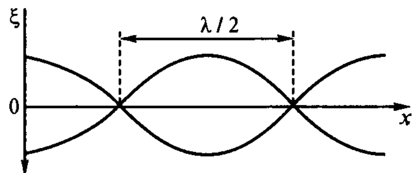


Рис. 9.3
Стоячая электромагнитная волна

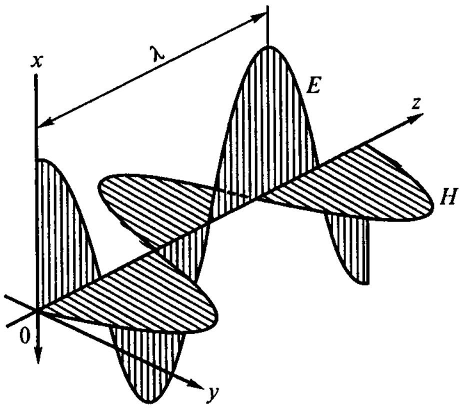


Рис. 9.4
Взаимосвязь ЭП и МП в пространстве

В стоячей волне колебания векторов E и H сдвинуты по фазе на $\pi/2$ как в пространстве, так и во времени (рис. 9.4) (в бегущей волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совпадают по фазе — см. формулу (9.9) и рис. 9.2). И, как видно из рис. 9.4, если в некоторый момент времени $E = E_{max}$, то в этот же момент времени $H = 0$, через четверть периода картина будет обратной: H достигает максимального значения, $E = 0$. Таким образом, в процессе колебаний ЭП постепенно переходит в МП, и наоборот.

Связь между амплитудами E_m и H_m остается прежняя:

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m.$$

9.5. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Как уже отмечалось, с электромагнитной волной связан перенос энергии. В обычной изотропной среде плотность энергии ЭМП — $W'_{\text{эм}}$ (энергия ЭМП, отнесенная к единице объема):

$$W'_{\text{эм}} = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}. \tag{9.11}$$

С учетом (9.6) и (9.7)

$$W'_{\text{эм}} = \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon\mu} EH = EH / v = \frac{\Pi}{v}, \tag{9.12}$$

где v — скорость волны, Π — величина вектора Пойнтинга, которую еще называют плотностью потока энергии.

В случае бегущей гармонической электромагнитной волны согласно (9.12)

$$W'_{\text{эм}} = \varepsilon E^2 = \varepsilon E_m^2 \cos^2(\omega t - kz).$$

Плотность потока энергии из (9.12):

$$\Pi = W'_{\text{эм}} \cdot v = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kz),$$

так как $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Интенсивность I такой волны по определению равна среднему значению плотности потока энергии: $I = \Pi_{\text{ср}}$. Так как среднее значение квадрата косинуса

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kz)dt = \frac{1}{2},$$

то

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_m^2}{2}. \qquad (9.13)$$

Перенос энергии электромагнитной волной сопровождается и переносом импульса. Согласно квантовой теории электромагнитные волны представляют собой поток элементарных частиц — фотонов, имеющих нулевую массу покоя и движущихся со скоростью света в вакууме (с). Энергия фотона $\varepsilon = \hbar f$, а его импульс $p = \hbar f / c$, где $\hbar$ — постоянная Планка, f — частота волны. В наших обозначениях $\varepsilon = W'_{\text{эм}}$, поэтому с учетом (9.12)

$$p' = W'_{\text{эм}} / c = \frac{\Pi}{c^2}, \qquad (9.14)$$

где p' — импульс частицы, или импульс электромагнитной волны, отнесенный к единице объема.

Электромагнитная волна при взаимодействии с поглощающей преградой перестает существовать. Ее энергия и импульс передаются преграде — электромагнитная волна полностью поглощается преградой. Энергия электромагнитной волны преобразуется в энергию теплового движения частиц преграды (преграда нагревается).

Если описывать взаимодействие электромагнитной волны с преградой с помощью импульса волны, то импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени $\frac{dp}{dt}$, равен давлению f на поверхность тела. При поглощении электромагнитной волны цилиндрическим телом с площадью сечения, равной единице, и высотой cdt

$$dp = \frac{W'_{\text{эм}}}{c} \cdot cdt; \quad \frac{dp}{dt} = W'_{\text{эм}},$$

т. е. для поглощающей поверхности давление

$$f = W'_{\text{эм}}, \ \text{Н/м}^2. \qquad (9.15)$$

В случае гармонической волны эта величина пульсирует с достаточно большой частотой, поэтому практически представляет интерес лишь ее среднее значение по времени:

$$f_{\text{ср}} = W'_{\text{эм ср}}. \qquad (9.16)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше. Для реальной, с учетом коэффициента отражения:

$$f_{\text{ср}} = W'_{\text{эм ср}}(1 + R), \qquad (9.17)$$

где R — коэффициент отражения, т. е. отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей волны.

Рассмотрим более детально механизм передачи импульса телу, т. е. как возникает давление. ЭП волны возбуждает в теле ток плотности $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, а МП волны будет действовать на $\vec{J}$ в соответствии с законом Ампера. Сила, отнесенная к единице объема:

$$\vec{f'} = i[\vec{dl}\cdot\vec{B}] = [\vec{J}\cdot\vec{B}] = \gamma\mu[\vec{E}\vec{H}],$$

откуда следует, что сила направлена в сторону распространения волны.

Давление, вычисленное по формуле (9.16), оказывается в обычных условиях очень малым. Например, давление солнечного света на полностью поглощающую поверхность ~ 5 мкПа (атмосферное давление ~ 10^5 Па). Измерить такое давление экспериментально очень трудно.

П р и м е р 9.1. Какое давление оказывает плоская электромагнитная волна на преграду с коэффициентом отражения $R = 0{,}8$, расположенную под углом $\varphi = 25°$ к поверхности распространения волны, если амплитуда магнитной составляющей волны $H_m = 4\cdot 10^{-4}$ А/м? Волна распространяется в среде с $\varepsilon_r = 1$; $\mu_r = 1$.

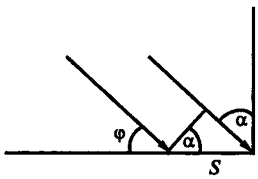


Рис. 9.5
Падение электромагнитной волны на площадку S

Р е ш е н и е. Волна действует на площадку S, расположенную на пути волны (рис. 9.5). Падающая волна приносит к поверхности импульс, который заключен в объеме поля (V) волны длиной λ см и сечением $S\cos\alpha$.

$$p = p'\cdot V = \frac{\Pi}{c^2} S\cos\alpha\cdot\lambda.$$

Сила, действующая на препятствие в направлении падения волны:

$$F = \frac{P}{T} = \frac{\Pi}{c^2}\cdot S\cos\alpha\cdot\lambda\cdot\frac{c}{\lambda} = \frac{\Pi}{c} S\cos\alpha$$

(отнесение к единице времени означает деление на период T, так как за этот период волна проходит расстояние λ; $T = \dfrac{\lambda}{c}$).

Давление излучения, перпендикулярное поверхности S, равно

$$f = \frac{F\cos\alpha}{S} = \frac{\Pi}{c}\cos^2\alpha.$$

Среднее значение вектора Пойнтинга для монохроматической волны:

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{E_m H_m}{2};\; E_m = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0.$$

При коэффициенте отражения R полное давление волны:

$$f = \frac{E_m H_m}{2c}\cos^2\alpha(1+R) = H_m^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\cos^2\alpha}{2c}(1+R) \approx 10^{-14}\ \text{Н/м}^2.$$

П р и м е р 9.2. Вдоль оси z в вакууме распространяется плоская электромагнитная монохроматическая волна. Амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 16$ В/м. Определить среднюю во времени плотность энергии волны $W'_{\text{эм ср}}$ и интенсивность волны.

Р е ш е н и е. Средняя во времени объемная плотность электромагнитной волны:

$$W'_{\text{эм ср}} = \frac{\varepsilon_0 E_{\text{ср}}^2}{2} + \frac{\mu_0 H_{\text{ср}}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{4} + \frac{\mu_0 H_m^2}{4} = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} \approx 1\cdot 10^{-9}\ \text{Дж/м}^3.$$

Интенсивность волны определяется как среднее значение вектора Пойнтинга:

$$I = П_{ср} = \frac{E_m H_m}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_m^2}{2} \approx 0{,}3 \quad Вт/м^3.$$

П р и м е р 9.3. Плоский конденсатор с круглыми пластинами заряжается постоянным током в течение времени t_0 до напряжения U_0. Расстояние между пластинами — d. Проведя между пластинами коаксиальную с ними воображаемую цилиндрическую поверхность радиусом r, меньшим радиуса пластин, определить модуль и направление вектора Пойнтинга в точках поверхности (рис. 9.6).

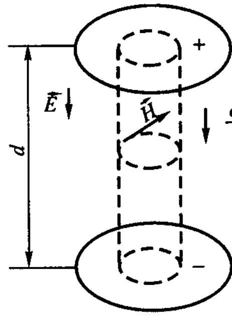


Рис. 9.6
Расчетная схема плоского конденсатора

Р е ш е н и е. При зарядке конденсатора постоянным током напряжение на обкладках конденсатора

$$U_c = \frac{1}{C}\int I dt = \frac{I}{C}t.$$

При $t = t_0$, $u_c = U_0$, поэтому $u_c = \frac{U_0}{t_0}t$.

Напряженность ЭП

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_0 t}{d t_0}.$$

При изменении ЭП возникает ток смещения. Плотность тока смещения

$$J_{см} = \frac{dD}{dt} = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d t_0}.$$

Направление тока смещения указано на рис. 9.6. Ток смещения возбуждает МП с напряженностью

$$H = \frac{\int J_{см} dS}{2\pi r} = \frac{\varepsilon_0 U_0 r}{2 t_0 d}.$$

Направление вектора $\vec{H}$ также показано на рис. 9.6. С учетом того, что $\int dS = \pi r^2$, вектор Пойнтинга запишем в виде

$$\vec{П} = E \cdot H = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 r t}{2 t_0^2 d^2}.$$

Вектор Пойнтинга направлен внутрь выбранной поверхности.

П р и м е р 9.4. Имеется длинный соленоид (отношение длины соленоида к диаметру $\frac{l}{d} \gg 1$). Число витков соленоида w на единицу длины $\frac{w}{l} = n$. Ток в соленоиде увеличивается от нуля до I_0 по линейному закону $i = \frac{I_0}{t_0}t$. Проведя внутри соленоида в средней его части коаксиальную с ним замкнутую поверхность длины l и радиуса r, определить количество энергии W, проникающей

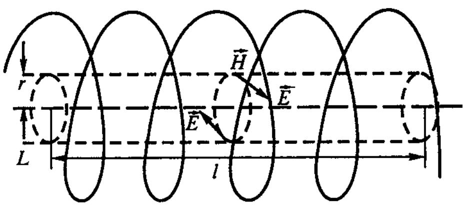


Рис. 9.7
Схема расчетного соленоида

через поверхность за время t_0, и сравнить эту энергию с энергией магнитного поля $W_м$, содержащейся в ограниченном поверхностью объеме V после установления тока I_0 (рис. 9.7).

Р е ш е н и е. Ток в соленоиде переменный, поэтому МП также переменное. По закону полного тока

$$Hl = iw;\ H = \frac{iw}{l} = ni = \frac{nI_0}{t_0}t;\ B = \frac{\mu_0 n I_0}{t_0}t.$$

(Направление вектора H показано на рис. 9.7.)

По закону электромагнитной индукции

$$\oint_L \vec E d\vec l = -\int_S \left(\frac{\partial \vec B}{\partial t}\right)_n dS;\ E\cdot 2\pi r = \mu_0 n\frac{I_0}{t_0}\pi r^2;\ \ E = \frac{\mu_0 n I_0 r}{2t_0}.$$

Направление векторов напряженностей МП $\vec H$ и ЭП $\vec E$ показано на рис. 9.7. Вектор Пойнтинга на боковой поверхности равен

$$|\vec \Pi| = EH = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 r}{2t_0^2}t$$

и направлен внутрь воображаемой поверхности. На торцах $\vec\Pi = 0$. Количество энергии, проникающей через выбранную поверхность ($S_0 = 2\pi rl$) в единицу времени,

$$\frac{dW}{dt} = \int_{S_0} \Pi dS = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 r\cdot 2\pi r l t}{2t_0^2}.$$

Количество энергии, проникающей через поверхность за время t_0,

$$W = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 r\cdot 2\pi r l}{2t_0^2}\int_0^{t_0} t dt = \frac{\mu_0 n_2 I_0^2\cdot \pi r^2 l}{2} = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{2}V.$$

Количество энергии МП, содержащейся в выбранном объеме за то же время,

$$W_м = \frac{\mu_0 H^2}{2}V = \frac{B^2}{2\mu_0}V = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{2}V,$$

а значит, энергии равны.

9.6. СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ

В однородной изотропной среде волна от точечного источника представляет собой сферически расходящееся возмущение вида

$$\xi = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

где r — расстояние от точечного источника. Если источник возбуждает монохроматические колебания, то предыдущее выражение принимает вид

$$\xi = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr),$$

где a_0 — постоянная, $\frac{a_0}{r}$ — амплитуда волны, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. Если учитывать поглощение среды, то в предыдущее выражение следует добавить множитель $e^{-\gamma r}$.

Другой важный вид симметричной волны — цилиндрическая, расходящаяся, например, от источников, равномерно распределенных вдоль оси в однородной среде.

На больших расстояниях R от источника цилиндрическую волну можно представить в виде

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}} f\left(t - \frac{R}{v}\right).$$

В частности, монохроматическая расходящаяся волна на расстояниях $\mathrm{R} \gg \lambda$ определяется выражением

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{R}}\cos(\omega t - kR),$$

где a — постоянная.

Цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать как сгущения, так и разряжения.

9.7. ИЗЛУЧЕНИЕ ДИПОЛЯ

Простейшей излучающей системой является осциллирующий электрический диполь, момент которого p изменяется с течением времени — элементарный вибратор и находится в виде

$$p = Ql,$$

где Q — заряд, l — расстояние между зарядами.

ЭП диполя спадает при удалении от него по закону $E \sim \frac{1}{r^3}$. У осциллирующего диполя с моментом

$$p = p_m \cos\omega t = Q_m l \cos\omega t \tag{9.18}$$

дело обстоит иначе. В непосредственной близости от диполя картина ЭМП очень сложна. Она упрощается в волновой зоне ($r \gg \lambda$). Быстро спадающее статическое поле практически исчезает и остается только поле излучения от осциллирующих зарядов — расходящаяся сферическая волна с той же частотой, что и у осциллятора. Амплитуда волны уменьшается с ростом расстояния r от диполя:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r}\sin\theta,$$

где θ — угол между осью диполя и радиус-вектором $\vec{r}$ точки, где наблюдается поле (рис. 9.8). Из рисунка видно,

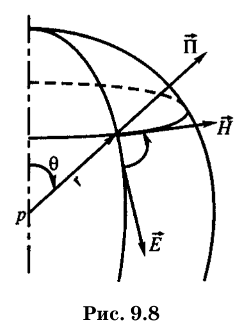


Рис. 9.8
Расходящаяся сферическая волна

что вектор $\vec{E}$ в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, вектор $\vec{H}$ — по касательной к параллели, а вместе с вектором $\vec{\Pi}$ векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют правую тройку векторов $\vec{\Pi}=[\vec{E}\cdot\vec{H}]$.

Интенсивность электромагнитной волны

$$I \sim E_m^2 \sim \frac{1}{r^2}\sin^2\theta.$$

Зависимость $I(\theta)$ изображают с помощью диаграммы направленности излучения диполя (рис. 9.9). Здесь длина отрезка OO', отсекаемого на луче под углом θ, дает интенсивность излучения под этим углом. Видно, что максимум излучения происходит в экваториальной плоскости $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$, а вдоль оси ($\theta = 0$) диполь не излучает совсем.

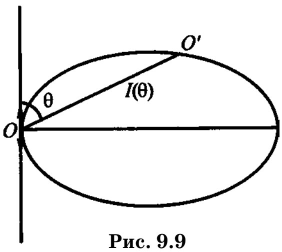


Рис. 9.9
Диаграмма направленности излучения диполя

Как показывает теория, мощность излучения P диполя, т. е. энергия, излучаемая в единицу времени по всем направлениям, пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$P=\alpha\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)^2,$$

где $\alpha=\frac{\mu_0}{6\pi c}$.

Подставив в выражение для P значение p из (9.18), получим

$$P=\alpha\omega^4 p_m^2\cos^2\omega t. \tag{9.19}$$

Средняя по времени мощность излучения диполя:

$$P_{\text{ср}}=\frac{\alpha}{2}\omega^4 p_m^2 \tag{9.20}$$

(среднее значение $\cos^2\omega t$ за период $T=\frac{2\pi}{\omega}$ равно $\frac{1}{2}$).

Выражение (9.20) показывает, что средняя мощность осциллирующего диполя зависит от квадрата амплитуды его дипольного момента и очень сильно — (ω^4) — от частоты. Отсюда следует, что радиостанции должны использовать высокие частоты, а излучение линий передач переменного тока (50 Гц) незначительно.

9.8. ИЗЛУЧЕНИЕ РАДИОВОЛН

Излучение радиоволн — процесс возбуждения бегущих электромагнитных волн радиодиапазона в пространстве, окружающем источник колебаний тока или заряда. При этом энергия источника преобразуется в энергию распространяющихся в пространстве электромагнитных волн.

Источником первичных электрических колебаний могут быть переменные токи, текущие по проводникам, переменные поля и т. п. Однако переменные токи относительно низкой частоты (например, f = 50 Гц) для излучения непригодны: на этих частотах нельзя создать эффективный излучатель. Действительно, если электрические колебания имеют место, например, в катушке индуктивности, размеры которой малы по сравнению с длиной волны λ, соответствующей частоте f тока в катушке, то в одной части ее витка ток направлен в одну сторону, а в другой — в противоположную. На больших расстояниях от витка волны, излучаемые обоими участками, ослабляют друг друга.

Также плохо излучает колебательный контур: в каждый момент времени заряды на обкладках конденсатора равны по величине и противоположны по знаку.

Для эффективного излучения радиоволн необходима незамкнутая (открытая) цепь, в которой нет участков с противофазными колебаниями тока или заряда либо расстояние между ними мало в сравнении с $\lambda/2$, обычно D $\gg \lambda$ (D — наибольший размер излучающего устройства). При этом условие квазистационарности не выполняется и часть энергии уходит в виде электромагнитных волн.

Простейший излучатель радиоволн состоит из двух отрезков A и B прямолинейного проводника, присоединенных к концам OO' двухпроводной линии (рис. 9.10).

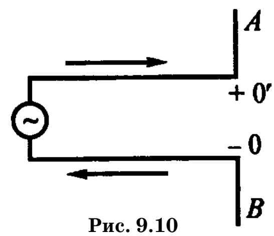


Рис. 9.10
Простейший излучатель радиоволн

В отрезках A и B возникает движение зарядов, т. е. переменный ток. В каждый момент времени заряды в точках O и O' равны по величине и противоположны по знаку, т. е. отрезки A и B образуют электрический диполь, что определяет конфигурацию создаваемого им ЭП. С другой стороны, токи в отрезках A и B совпадают по направлению, поэтому силовые линии МП, как и в случае прямолинейного тока, — окружности (рис. 9.11). В пространстве, окружающем диполь, возникает электромагнитное поле, в котором векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу (на рис. 9.11 точка O — точка наблюдения).

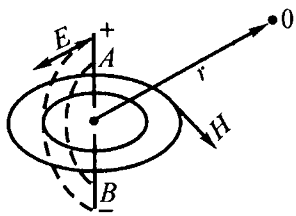


Рис. 9.11
Электромагнитное поле вокруг диполя

Переменное ЭМП распространяется от диполя во всех направлениях. Диполь излучает сферическую волну, которую на большом расстоянии от диполя можно считать локально плоской.

Описанный выше диполь является простейшей передающей антенной и называется симметричным вибратором (электрическим диполем). Впервые такой вибратор использовал Г. Герц (1888) в опытах, обнаруживших существование радиоволн. Электрические колебания в диполе Герца возбуждались с помощью искрового разряда.

Диполь Герца представлял собой медный стержень с металлическими шарами на концах, в разрыв которого (искровой промежуток) включалась катушка Румкорфа (см. рис. 9.12). В диполе возбуждались колебания с час-

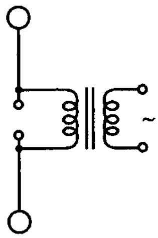


Рис. 9.12
Симметричный вибратор с катушкой Румкорфа

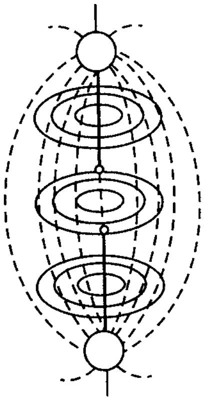


Рис. 9.13
ЭП и МП электрического диполя

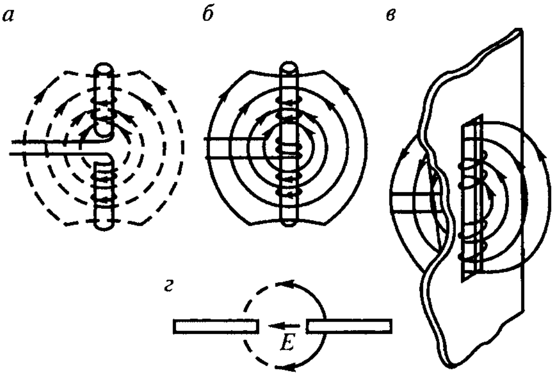


Рис. 9.14
ЭП и МП магнитного диполя

тотой ~$5 \cdot 10^8$ Гц, что соответствует $\lambda = 60$ см. ЭП и МП электрического диполя изображено на рис. 9.13, а также на рис. 9.14*а*.

Широкое применение получила магнитная антенна. Она представляет собой стержень из магнитного материала с высокой магнитной проницаемостью, на которой намотана катушка из тонкого провода. Силовые линии МП магнитной антенны повторяют картину силовых линий ЭП электрического диполя (рис. 9.14*б*).

Если в стенках волновода, где текут переменные поверхностные токи сверхвысоких частот, прорезать щель так, чтобы она пересекла направление тока, то электромагнитная энергия излучается наружу. Распределение полей щелевого излучателя подобно распределению полей магнитной антенны (рис. 9.14*в*). Поэтому щелевой излучатель называется магнитным диполем.

9.9. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ РАДИОВОЛН В ПОЛУПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Электромагнитные свойства полупроводящей среды характеризуются абсолютной диэлектрической проницаемостью ε (или относительной диэлектрической проницаемостью ε_r) и удельной электрической проводимостью γ. Будем рассматривать немагнитные среды, для которых $\mu = \mu_0$.

Наиболее простым случаем является распространение радиоволн в идеальном диэлектрике, для которого $\gamma = 0$, ε — const. Распространение плоской волны в такой среде описывается выражением

$$E = E_m \sin(\omega t - kr),$$

если волна прямая монохроматическая. В комплексной форме

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t - kr)} = \dot{E}_m e^{-jkr}; \;\; \dot{E}_m = E_m e^{j\omega t}.$$

С учетом

$$k=\frac{\omega}{v}=\frac{\omega}{\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}=\frac{\omega}{\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}}}=\frac{\omega}{c}\varepsilon_r,$$

$$\dot{E}_m=\dot{E}_m e^{-j\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}r}, \tag{9.21}$$

где r — расстояние, которое волна прошла в данной среде.

Комплексные амплитуды напряженностей магнитного $\dot{H}_m$ и электрического $\dot{E}_m$ полей связаны соотношением

$$\dot{H}_m=\frac{\dot{E}_m}{\rho}=\frac{\dot{E}_m}{120\pi}\sqrt{\varepsilon_r}, \tag{9.22}$$

где $\rho=\dfrac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ — волновое сопротивление среды.

ЭП и МП изменяются во времени синфазно.

Рассмотрим теперь, как изменится уравнение плоской волны в среде с потерями, т. е. в полупроводящей среде. Для сравнения запишем первое уравнение Максвелла соответственно для идеального диэлектрика и для диэлектрика с потерями:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}=j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}; \tag{9.23}$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}=j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}+\gamma\dot{\vec{E}}. \tag{9.24}$$

Если ввести понятие комплексной диэлектрической проницаемости

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon-j\frac{\gamma}{\omega}, \tag{9.25}$$

то уравнение (9.24) запишется формально точно так же, как и уравнение (9.23):

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}=j\omega\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}.$$

Использование комплексной диэлектрической проницаемости позволяет получить выводы, относящиеся к распространению радиоволн в полупроводящей среде, из соответствующих формул для идеального диэлектрика путем замены в них вещественной диэлектрической проницаемости ε на комплексное значение $\dot{\varepsilon}$. Эту величину можно записать иначе, выразив в уравнении (9.25) круговую частоту через длину волны и подставив числовое значение электрической постоянной:

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon\left(1-j\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right). \tag{9.26}$$

Действительно, воспользуемся известными соотношениями для частоты f, скорости c, волнового сопротивления $Z_{\text{в}}$ электромагнитной волны, распространяющейся в среде с $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$,

$$f=\frac{c}{\lambda};\ c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}};\ \frac{E}{H}=Z_{\text{в}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot36\pi}{10^{-9}}}=120\pi.$$

Тогда выражение (9.25)

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{2\pi f} = \varepsilon - j\frac{\gamma\lambda}{2\pi\cdot c} = \varepsilon - j\frac{\gamma\lambda}{2\pi}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma\lambda}{2\pi}\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) =$$

$$= \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma\lambda\cdot 120\pi}{2\pi\cdot\varepsilon_r}\right) = \varepsilon\left(1 - j\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right).$$

Величина $\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}$ имеет физический смысл отношения плотности тока проводимости к плотности тока смещения. Действительно, поскольку ток проводимости равен γE, а ток смещения — $\omega\varepsilon E$, то, поделив одно на другое, получим

$$\frac{\gamma|E|}{\omega\varepsilon|E|} = \left|\frac{J_{\text{пр}}}{J_{\text{см}}}\right| = \frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}. \qquad (9.27)$$

Следовательно, при $\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r} \ll 1$ в среде преобладает плотность тока смещения и среда по своим свойствам приближается к диэлектрику. Если же $\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r} \gg 1$, то в среде преобладает плотность тока проводимости и среда по своим свойствам приближается к проводнику.

Мгновенное значение напряженности ЭП при распространении плоской волны в полупроводящей среде записывается следующим образом:

$$\dot{E} = E_m\, e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{\dot{\varepsilon}_r}\, r\right)}. \qquad (9.28)$$

Обозначая

$$\frac{\omega}{c}\sqrt{\dot{\varepsilon}_r} = \beta - ja, \qquad (9.29)$$

перепишем выражение (9.28) с учетом условия (9.29):

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t - \beta r) - ar}. \qquad (9.30)$$

Подставляя в уравнение (9.22) условие (9.30) и определяя модуль и фазу полученного выражения, запишем

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{E}_m}{120\pi}\sqrt{\dot{\varepsilon}_r} = \dot{E}_m\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{120\pi}\cdot\frac{c}{\omega}e^{-j\varphi}, \qquad (9.31)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}. \qquad (9.32)$$

Из (9.32) следует, что составляющие ЭП и МП сдвинуты по фазе на угол φ.

Величина α характеризует потери мощности в среде и называется коэффициентом поглощения. Физические потери обусловлены переходом энергии электромагнитных волн в тепловую энергию движения молекул.

Величина β характеризует изменение фазы волны, т. е. скорость распространения волны в данной среде.

Фазовую скорость распространения волны $v_\Phi = dr/dt$ определяют как скорость перемещения точки постоянной фазы, для которой

$$\omega t - \beta r = \text{const}.$$

Записав полный дифференциал этого выражения:

$$\omega dt - \beta dr = 0,$$

можно определить v_{Φ}:

$$v_{\Phi} = \omega/\beta. \qquad (9.33)$$

При относительном перемещении передатчика и приемника с радиальной скоростью v_R (составляющая скорости источника в направлении распространения волны) фаза волн $(\omega t - \beta r)$ меняется, что можно рассматривать как изменение частоты колебаний. Принимаемая частота $\omega_{Д}$, называемая частотой Допплера, оказывается равной

$$\omega_Д = \omega - \beta \frac{\partial r}{\partial t} = \omega - \beta v_R.$$

Разницу в величинах частот передаваемых и принимаемых колебаний называют допплеровским смещением частоты и определяют как

$$\Delta\omega_Д = \omega_Д - \omega = -\beta u_R = -\omega \frac{v_R}{v_ф}.$$

Частота принимаемых колебаний зависит от свойств среды, возрастает при удалении передатчика и приемника и снижается при их сближении.

Отношение

$$n = \frac{c}{v_ф} = \frac{c}{\omega}\beta$$

называют коэффициентом преломления среды.

Длина волны в среде с учетом (9.33) равна

$$\lambda_{ср} = v_{\Phi}/f = 2\pi/\beta = \lambda/n.$$

Выразим коэффициенты α и β через параметры среды. Согласно условию (9.29) можно записать

$$\dot{\varepsilon}_r = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 (\beta - j\alpha)^2. \qquad (9.34)$$

С другой стороны, из (10.26) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \left(1 - j\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right). \qquad (9.35)$$

Правые части уравнений (10.34) и (10.35) равны. Приравнивая их действительные и мнимые части, а также решая совместно полученные уравнения, находим:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right)^2}}; \qquad (9.36)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{2}}\sqrt{+1 + \sqrt{1 + \left(\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right)^2}}. \qquad (9.37)$$

Перед внешними и внутренними радикалами берем положительные знаки, так как величины α и β считаем действительными и за направление распространения принимаем направление возрастания расстояния r.

В некоторых встречающихся на практике случаях формулы могут быть значительно упрощены.

При $\varepsilon \gg 60\gamma\lambda$, пренебрегая в (9.37) вторым слагаемым, получаем

$$\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_r}; \tag{9.38}$$

$$v_\text{ф} \approx c/\sqrt{\varepsilon_r};\ n \approx \sqrt{\varepsilon_r};\ \lambda_\text{ср} \approx \lambda/\sqrt{\varepsilon_r}. \tag{9.39}$$

В формуле (9.36) нельзя просто пренебречь вторым слагаемым. Применяя к внутреннему радикалу бином Ньютона, получаем

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{-1+1+\frac{1}{2}\left(\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right)^2} = \frac{60\pi\gamma}{\sqrt{\varepsilon_r}}. \tag{9.40}$$

При $\varepsilon_r \ll 60\gamma\lambda$ в выражениях (9.36) и (9.37) можно пренебречь единицей по сравнению с $\dfrac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}$. Тогда

$$\beta \approx \alpha \approx 2\pi\sqrt{\frac{30\gamma}{\lambda}}; \tag{9.41}$$

$$v_\phi \approx \frac{c}{\sqrt{30\gamma\lambda}};\ n \approx \sqrt{30\gamma\lambda};\ \lambda_\text{ср} = \sqrt{\frac{\lambda}{30\gamma}}. \tag{9.42}$$

9.10. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Если граница раздела сред обладает способностью полностью отражать электромагнитную волну, то можно создать устройства, способные направлять движение электромагнитной волны в заданном направлении. Такие устройства встречаются в различных областях радиотехники и называются направляющими системами. К их числу относятся всевозможные линии передачи. Некоторые из них показаны на рис. 9.15: двухпроводные линии (*а*); коаксиальная линия, применяемая на сверхвысоких частотах (*б*); полые волноводы (*г, д*); диэлектрические волноводы (*е, ж*); системы типа «полосковой линии» (*в*) и др.

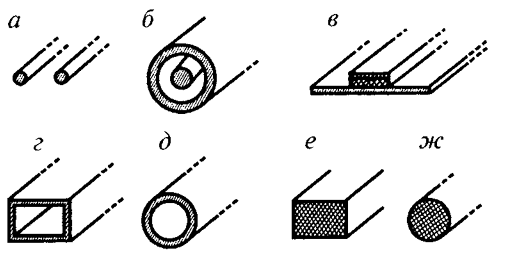


Рис. 9.15
Направляющие системы в радиотехнике

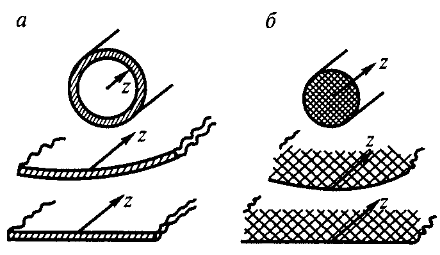


Рис. 9.16
Деформация границы в волноводе от плоской к круговой цилиндрической

Геометрически простейшим среди изображенных направляющих систем является волновод круглого поперечного сечения (*д, ж*). Нетрудно представить постепенный переход от плоской границы раздела сред к такому волноводу (рис. 9.16). Естественно допустить, что при показанной здесь деформации граница сохраняет способность направлять волну вдоль образующей сгиба (ось z), пока радиус кривизны еще достаточно велик.

Решение задач распространения электромагнитной энергии по направляющим системам (кабелям, волноводам, световодам) требует применения классической электродинамики на основе уравнений Максвелла. Так могут быть рассмотрены практически все вопросы передачи, излучения, влияния, поглощения, экранирования в любых направляющих системах при различных диапазонах частот и скоростях передачи. Ниже, в п. 9.11 на основе применения уравнений Максвелла рассмотрено распространение ЭМП по коаксиальному кабелю. Здесь будут приведены наиболее общие представления по распространению ЭМП вдоль направляющих систем.

В пространстве (в диэлектрике) $\vec{J}=0,\ \rho=0$, поэтому для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, меняющихся во времени по гармоническому закону,

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}; \tag{9.43}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}, \tag{9.44}$$

$\dot{\vec{E}},\ \dot{\vec{H}}$ — комплексные векторы.

Как известно, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\dot{\vec{N}}=0$ ($\dot{\vec{N}}$ — произвольный вектор), поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}=0;$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}=0.$$

Из этих уравнений легко исключить $\dot{\vec{H}}$ или $\dot{\vec{E}}$.

Возьмем ротор от обеих частей (9.44) и заменим $\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}$ его выражением из (9.43):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}),$$

или

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{E}} - \vec{\nabla}^2\dot{\vec{E}} = \frac{\omega^2}{v^2}\dot{\vec{E}},$$

где $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$.

Так как $\operatorname{div}\dot{\vec{E}}=0$, то получаем для вектора $\dot{\vec{E}}$ однородное волновое уравнение в комплексной форме:

$$\vec{\nabla}^2\dot{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{v^2}\dot{\vec{E}} = 0, \tag{9.45}$$

или, вводя обозначение

$$k = \frac{\omega}{v}, \tag{9.46}$$

$$\vec{\nabla}^2\dot{\vec{E}} + k^2\dot{\vec{E}} = 0. \tag{9.47}$$

Аналогично можно получить

$$\vec{\nabla}^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0. \tag{9.48}$$

Уравнения (9.45)–(9.48) справедливы и для полупроводящей среды (если использовать понятие комплексной электрической проницаемости $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\dfrac{\gamma}{\omega}$ (см. предыдущий пункт)).

В любой задаче ЭМП тем или иным способом ограничено в пространстве. Для его определения необходимо располагать сведениями о поведении поля на границе сред. Естественными границами могут быть металлические перегородки, соседство разнородных сред, например граница медь – диэлектрик (кабель, волновод), диэлектрик (ε_1) – диэлектрик (ε_2) – волоконный световод и др.

Состояние ЭМП на границах формулируется в виде граничных условий. Для ЭП (глава 4) $D_{1n} = D_{2n}$, $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Если на границе раздела сред расположен поверхностный заряд (σ), то нормальные составляющие векторов электрической индукции испытывают скачок на величину плотности поверхностного заряда:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \tag{9.49}$$

Для МП (гл. 4) $B_{1n} = B_{2n}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. При наличии поверхностного тока на границе раздела сред (I_S) касательная составляющая напряженности МП испытывает разрыв, равный его плотности:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = J_S. \tag{9.50}$$

ЭМП в проводящей среде подробно рассмотрено в гл. 8. Ниже приведены часто встречающиеся формулы для определения характеристик распространения поля в диэлектрике.

Уравнения Максвелла для гармонически изменяющегося поля:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};\ \ \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

На основе этих уравнений могут быть получены дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\nabla^2\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2};\ \ \nabla^2\vec{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Эти уравнения называются волновыми. В комплексной форме уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\mu\dot{\vec{E}};\ \ \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}.$$

Коэффициент распространения волны $\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Коэффициент фазы $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, коэффициент затухания $\alpha = 0$ (в идеальном диэлектрике), скорость распространения волны $v = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, волновое сопротивление $z_{\text{в}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$, в диэлектрике ($\mu r = \varepsilon r = 1$) $v = c = 3\cdot 10^8$ м/с, $z_{\text{в}} = 376{,}7$ Ом $= 120\,\pi$.

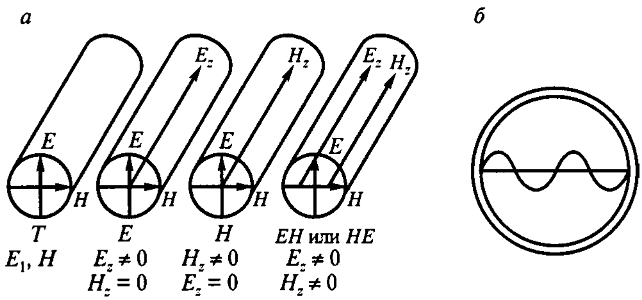


Рис. 9.17
Классификация волн, используемых для распространения энергии

Характер распространения электромагнитных волн в направляющих системах, структура поля и частотные характеристики систем зависят, прежде всего, от класса волны, используемой для распространения энергии. Существуют несколько классов волн (рис. 9.17*а*). T — поперечно-электромагнитная (в обозначениях волн T означает поперечность, трансверсальность, часто волна T также обозначается TEM). E — электрическая или поперечно-магнитная ТМ-волна. H — магнитная или поперечно-электрическая TE-волна. EH, HE — гибридные смешанные волны.

Волна *T* содержит только поперечные составляющие (электрического E и магнитного H полей), продольные составляющие E_z и H_z равны нулю, т. е. силовые линии поля целиком лежат в поперечных плоскостях и в точности повторяют картину силовых линий поля при статическом напряжении и постоянном поле. Волна T существует лишь в линиях, содержащих не менее двух изолированных проводников, находящихся под разными потенциалами. Она используется при передаче энергии в сравнительно ограниченном диапазоне частот по проводным системам, где определяющими являются токи проводимости $I_{\text{пр}}$, в частности при передаче по симметричным и коаксиальным цепям и полосковым линиям.

Волны *E* и *H* содержат, кроме поперечных электромагнитных ($E_\perp$ и $H_\perp$), по одной продольной составляющей поля; для волн E поле $E_z \neq 0$ и для волн H поле $H_z \neq 0$. Поэтому их силовые линии располагаются как в поперечных, так и в продольных сечениях направляющих систем. Эти волны возбуждаются в весьма высоком диапазоне частот, где определяющими являются токи смещения $I_{\text{см}}$. Они используются при передаче энергии по металлическим и диэлектрическим волноводам и однопроводным линиям.

Процесс передачи основных волн T связан с потенциальным полем, а волн высшего порядка E и H — с вихревым полем. Волны E и H можно передавать по однопроводным направляющим системам, например по волноводам. Для этих волн необходима продольная составляющая поля E и H, которая задает направление движению энергии вдоль линии. Разность потенциалов создается между полюсами и стенками волновода. Поэтому по волноводу передаются лишь очень короткие волны. Длина волн должна быть такой, чтобы в сечении волновода уложилось целое число полуволн (рис. 9.17*б*) или хотя бы одна полуволна.

Наряду с делением на классы электромагнитные волны делятся также по типам. Тип волны, или мода, определяется сложностью структуры, т. е. числом

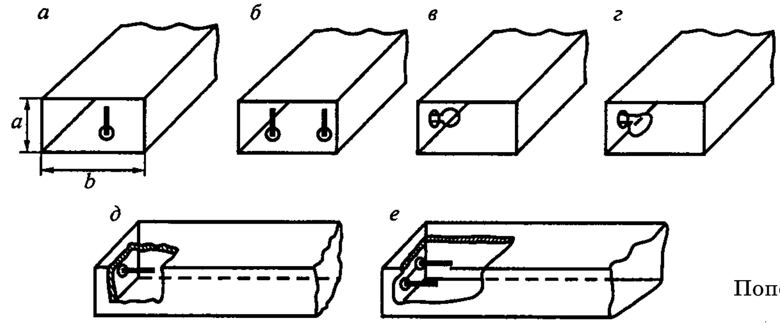


Рис. 9.18
Поперечные размеры волноводов

максимумов и минимумов поля в поперечном сечении. Мода обозначается двумя числовыми индексами m и n. Индекс n, например, в круглых волноводах означает число полных изменений поля по окружности волновода, а индекс m — число изменений поля по диаметру.

П р и м е р 9.5. Какие типы волн могут возникнуть в прямоугольном волноводе с поперечными размерами $0{,}034 \cdot 0{,}072$ м^2 при частотах: 1) 3000 МГц; 2) 9000 МГц? Найти при этих условиях длину волны в волноводе.

Возбуждение осуществляется: а) электрической антенной (штырем), расположенной в середине широкой стенки волновода (рис. 9.18*а*); б) рамкой с током (расположенной в середине узкой стенки), плоскость которой параллельна широкой стенке волновода (рис. 9.18*г*).

Р е ш е н и е. В волноводе могут возникнуть те типы волн, у которых критическая длина волны $\lambda_{кр}$ больше длины волны в свободном пространстве λ. Критическая длина волны определяется поперечными размерами волновода a и b (рис. 9.18):

$$\lambda_{кр} = \frac{1}{\sqrt{(m/2a)^2 + (n/2b)^2}},$$

где m и n — целые числа.

В табл. 9.2 приведены значения $\lambda_{кр}$ для разных значений m и n при $a = 0{,}034$ м и $b = 0{,}072$ м.

Из таблицы следует, что при $f = 3$ ГГц ($\lambda = 0{,}1$ м) в волноводе может распространяться только волна TE_{01}. При $f = 9$ ГГц ($\lambda = 0{,}033$ м) в том же волноводе могут распространяться волны, типы которых имеют индексы 01, 02, 10, 11, 12, 03, 13, 04, 21, 20.

Таблица 9.2

Критические значения $\lambda_{кр}$ для разных значений m и n

m	0	0	1	1	1	0	1
n	1	2	0	1	2	3	3
$\lambda_{кр}$	0,144	0,072	0,068	0,065	0,051	0,047	0,040
m	0	2	2	2	1	0	3
n	4	0	1	2	4	5	0
$\lambda_{кр}$	0,036	0,034	0,328	0,0325	0,0323	0,0288	0,023

При возбуждении волновода штырем в середине широкой стенки (случай a) могут возбуждаться типы колебаний с любым индексом m и нечетным индексом n, т. е. TE_{01} при $\lambda = 0{,}1$ м, и с индексами 01, 11, 03, 13, 21 при $\lambda = 0{,}033$ м.

А при возбуждении волновода рамкой (случай b) возбуждаются TM с нечетным индексом m. Следовательно, при $\lambda = 0{,}1$ м волны распространяться не будут, а при $\lambda = 0{,}033$ м могут быть волны TM_{11}, TM_{12}, TM_{13}.

П р и м е р 9.6. Часть прямоугольного волновода с поперечными размерами $0{,}034 \cdot 0{,}072$ м^2 заполнена диэлектриком $\dot{\varepsilon} = (2{,}5 - j0{,}02)\varepsilon_0$. Требуется определить мощность, проходящую в волновод за диэлектриком, если мощность падающей волны до диэлектрика $P_0 = 1$ кВт; частота $f = 3 \cdot 10^9$ Гц, тип колебаний TE_{01} в обеих частях волновода, длина заполненной диэлектриком части волновода 0,2 м.

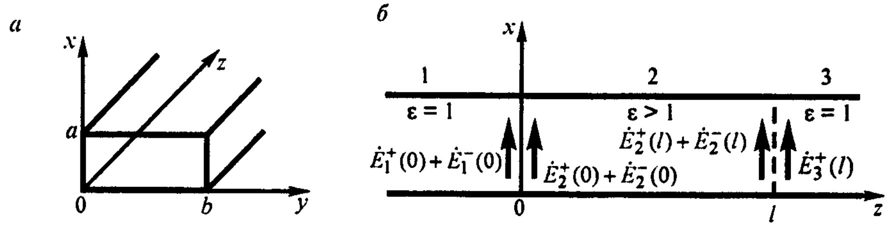


Рис. 9.19
Прохождение электромагнитной волны по прямоугольному волноводу через диэлектрик

Р е ш е н и е. Мощность, передаваемую по волноводу, выразим при помощи потока вектора Пойнтинга через поперечное сечение волновода. В системе координат (рис. 9.19a) для волны TE_{01}:

$$P = \int (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} = \frac{abE_0^2}{2Z_c}, \tag{9.51}$$

где E_0 — напряженность электрического поля в волноводе при $y = 0{,}5b$ (действующее значение); $Z_c = \dfrac{120\pi}{\sqrt{(\dot{\varepsilon}/\varepsilon_0) - (f_0/f)^2}}$ — характеристическое сопротивление волновода; $f = c/2b$ — критическая частота волновода при $\varepsilon = \varepsilon_0$; c — скорость света в вакууме.

В рассматриваемой задаче волновод состоит из трех частей (рис. 9.19$б$). Отношение мощностей падающих волн в 1-й и 3-й областях, как следует из формулы (9.51):

$$P_1^+ / P_3^+ = (E_{01}^+ / E_{03}^+)^2,$$

где знаком плюс отмечены волны, распространяющиеся вдоль оси z. Отношение (E_{01}^+ / E_{03}^+) зависит от условий на границах раздела частей 1–2, 2–3 и расстояния l между ними.

На границе 1–2:

$$\dot{E}_1^+(0) + \dot{E}_1^-(0) = \dot{E}_2^+(0) + \dot{E}_2^-(0); \quad \dot{H}_1^+(0) - \dot{H}_1^-(0) = \dot{H}_2^+(0) - \dot{H}_2^-(0)$$

или

$$\frac{\dot{E}_1^+(0)-\dot{E}_1^-(0)}{Z_{c1}}=\frac{\dot{E}_2^+(0)-\dot{E}_2^-(0)}{Z_{c2}}$$

(равенство тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей).

Аналогично на границе 2–3:

$$\dot{E}_2^+(l)+\dot{E}_2^-(l)=\dot{E}_3^+(l);\;\; \dot{H}_2^+(l)-\dot{H}_2^-(l)=\dot{H}_3^+(l)$$

или

$$\frac{\dot{E}_2^+(l)-\dot{E}_2^-(l)}{Z_{c2}}=\frac{\dot{E}_3^+(l)}{Z_{c3}}.$$

Далее,

$$\dot{E}_1^+(l)=\dot{E}_1^+(0)e^{-kl};\;\dot{E}_1^-(l)=\dot{E}_1^-(0)e^{kl},$$

где $k=\alpha+j\beta$.

Замечая, что в условиях данной задачи $Z_{c1}=Z_{c3}$, и обозначая $(Z_{c1}-Z_{c2})/(Z_{c1}+Z_{c2})$, из написанных уравнений находим

$$\frac{\dot{E}_{01}^+}{\dot{E}_{03}^+}=\frac{e^{k\ell}(1-N^2e^{-2k\ell})}{1-N^2};\;\; N=\frac{1-n}{1+n}.$$

Здесь

$$n=\sqrt{\frac{1-(f_0/f)^2}{(\dot{\varepsilon}/\varepsilon_0)-(f_0/f)^2}}\approx 0{,}5,$$

где

$$f_0/f=\frac{3\cdot 10^{10}}{2\cdot 7{,}2\cdot 3\cdot 10^9}=0{,}695;\; N=1/3;$$

$$kl=\frac{2\pi l}{\lambda_0}\sqrt{(\dot{\varepsilon}/\varepsilon_0)-(f_0/f)^2}=2\pi\cdot 2{,}84(1-j4{,}96\cdot 10^{-3});$$

$$\frac{\dot{E}_{01}^+}{\dot{E}_{03}^+}=1{,}3(\angle -62°30').$$

Отношение мощностей равно отношению квадратов модулей напряженностей полей. Таким образом,

$$P_3^+=1{,}3^{-2}P_1^+=592\,\text{Вт}.$$

9.11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПО КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

На рис. 9.20 изображена коаксиальная линия, образованная двумя круговыми коаксиальными металлическими цилиндрами, разделенными однородным идеальным диэлектриком. Примем длину линии неограниченной, а проводимость металла бесконечно большой. Если возбудить в диэлектрике кабеля электромагнитное поле, присоединив, например, этот кабель к источнику переменного тока с частотой ω, то электромагнитные волны будут распространяться по диэлектрику, не проникая в металл (при $\gamma = 0$ глубина проникновения $\delta = 0$). Токи проводимости будут существовать только на поверхностях проводников, ограничивающих внутренний слой диэлектрика. Вне кабеля электромагнитное поле не будет ощущаться.

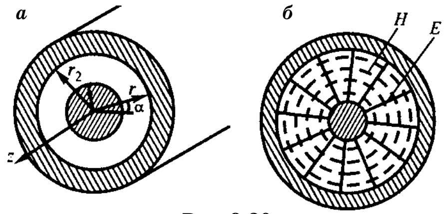


Рис. 9.20
Коаксиальная линия, образованная двумя круговыми коаксиальными металлическими цилиндрами

Рассмотрим случай, когда токи проводимости параллельны оси z кабеля. В этом случае поле удобно описать векторным магнитным потенциалом, также направленным по оси z и удовлетворяющим поэтому волновому уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \dot{A}_z + k^2 \dot{A}_z = 0. \qquad (9.52)$$

Это уравнение целесообразно записать в круговой цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{A}_z = 0. \qquad (9.53)$$

Решение будем искать по методу разделения переменных в виде произведения трех функций:

$$\dot{A}_z = \dot{R}(r)\dot{\Phi}(\alpha)\dot{Z}(z), \qquad (9.54)$$

каждая из которых зависит только от одной независимой переменной.

Внеся (9.53) в (9.52), после дифференцирования и деления на $\dot{R}\Phi\dot{Z}$ получаем уравнение в полных производных:

$$\frac{1}{\dot{R}r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\dot{R}}{dr}\right) + \frac{1}{\dot{\Phi}r^2}\frac{d^2\dot{\Phi}}{d\alpha^2} + \frac{1}{\dot{Z}}\frac{d^2\dot{Z}}{dz^2} + k^2 = 0.$$

Оно распадается на три независимых уравнения:

$$\frac{1}{\dot{Z}}\frac{d^2\dot{Z}}{dz^2} + k^2 = -m^2;$$

$$\frac{1}{\dot{\Phi}}\frac{d^2\dot{\Phi}^2}{d\alpha^2} = -n^2$$

и

$$\frac{r}{\dot{R}}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\dot{R}}{dr}\right) - (m^2 r^2 + n^2) = 0,$$

где m^2 и n^2 — постоянные разделения, которые характеризуют структуру поля и тип волны в кабеле.

При дальнейшем исследовании поля в кабеле ограничимся случаем, когда $m = 0$, $n = 0$, который выявит особое свойство коаксиальности кабеля: по кабелю может пройти волна широкого спектра частот, независимо от размеров поперечного сечения кабеля. В этом случае

$$\frac{1}{\dot Z}\frac{d^2\dot Z}{dz^2}+k^2=0;$$
$$\frac{1}{\dot\Phi}\frac{d^2\dot\Phi^2}{d\alpha^2}=0;$$
$$\frac{r}{\dot R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\dot R}{dr}\right)=0,$$

а их решения соответственно равны

$$\dot Z=\dot C_1e^{-jkz}+\dot C_2e^{jkz};$$
$$\dot\Phi=\dot C_3\alpha+\dot C_4;$$
$$\dot R=\dot C_5\ln r+\dot C_6.$$

Если ограничиться волной, распространяющейся в направлении положительных z, то нужно положить $\dot C_2=0$. Кроме того, $\dot C_3=0$, иначе решение получится многозначным, т. е. при изменении α на целое число 2π значение векторного потенциала будет изменяться.

Таким образом, для векторного потенциала получим (изменив обозначение постоянных)

$$\dot A_z=(-\dot C\ln r+\dot C_0)e^{-jkz}.$$

Для удобства расчетов положим $\dot{\vec H}=\mathrm{rot}\,\dot{\vec A}$. Из составляющих напряженности МП в соответствии с принятым $\dot{\vec H}=\mathrm{rot}\,\dot{\vec A}$ в цилиндрических координатах отличной от нуля будет только составляющая

$$\dot H_\alpha=-\frac{\partial\dot A_z}{\partial r}=\frac{\dot Ce^{-jkz}}{r}. \tag{9.55}$$

Напряженность ЭП определится из уравнения (9.43)

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec H}=j\omega\varepsilon\dot{\vec E},$$

откуда

$$\dot E_r=-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial\dot H_\alpha}{\partial z}=\frac{k}{\omega\varepsilon}\dot C\frac{e^{-jkz}}{r}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\dot H_\alpha; \tag{9.56}$$

$$\dot E_\alpha=0;\ \dot E_z=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot H_\alpha\right)=0.$$

Полученные решения для $\dot{\vec H}$ и $\dot{\vec E}$ показывают, что в диэлектрике кабеля распространяются электромагнитные волны, свойства которых во многом совпадают со свойствами волн в неограниченном однородном диэлектрике: векторы $\dot{\vec H}$ и $\dot{\vec E}$ взаимно перпендикулярны, лежат в поперечных плоскостях, образуя так называемую основную волну *TEM* (см. рис. 9.20) — поперечную электромагнитную, векторы которой не имеют продольной составляющей и совпадают по фазе. Их отношение равно волновому сопротивлению диэлектрика:

$$\frac{\dot E_r}{\dot H_\alpha}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=Z_\text{в}. \tag{9.57}$$

Скорость распространения волны в кабеле $v_{\text{ср}} = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$ и длина волны $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ определяются волновым числом $k = \dfrac{\omega}{v}$, не зависящим от размеров поперечного сечения.

Постоянную $\dot{C}$ можно найти, если известен ток какой-нибудь жилы кабеля, проходящий через заданное сечение, например через сечение $z = 0$, или же, если известно напряжение между обкладками кабеля в этом же сечении (заметим, что в поперечном сечении в случае волны типа TEM электрическое поле имеет потенциальный характер, и поэтому можно говорить об однозначности напряжения между двумя точками, лежащими в этом сечении). По закону полного тока

$$\dot{I} = \dot{H}_\alpha \cdot 2\pi r = 2\pi \dot{C} e^{-jkz}. \tag{9.58}$$

Напряжение между проводами линии (жилами кабеля):

$$\dot{U} = \int_{r_1}^{r_2} \dot{E}_r dr = \int_{r_1}^{r_2} z_{\text{в}} \frac{\dot{C} e^{-jkz}}{r} dr = z_{\text{в}} \dot{C} \ln \frac{r_2}{r_1} e^{-jkz}. \tag{9.59}$$

Для того чтобы в кабеле отсутствовала отраженная волна, его следует нагрузить сопротивлением, равным характеристическому сопротивлению кабеля, определяемому как

$$\underline{z}_c = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{z_{\text{в}}}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{9.60}$$

Из общей теории линий без потерь известно, что

$$\underline{z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Так как индуктивность кабеля на единицу длины:

$$L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

а емкость:

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}},$$

то нетрудно установить совпадение результатов расчета по (9.60) с известным из теории длинных линий.

Определив значение $\dot{C}$ из (9.58) или (9.59), легко найти распределение поверхностных токов и зарядов при $r = r_1$; r_2.

$$\dot{H}_\alpha = \pm \dot{J}_z; \ \ \dot{E}_z = \pm \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Контрольные вопросы

1. В чем отличие ЭМП от электромагнитной волны?
2. Разъясните понятия бегущая и стоячая волны.
3. Что может служить простым электрическим излучателем?
4. Какие вы можете назвать примеры симметричных волн?
5. Какие из направляющих систем вы можете назвать?

10

ГЛАВА 10

ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

10.1. ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

10.1.1. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ КОНТУРОВ С ТОКАМИ

Представим n контуров, по которым протекают токи I_1, I_2,...I_n. Определим МП этой системы контуров, для чего необходимо подсчитать работу, которая была затрачена на создание поля этой системы в процессе установления токов.

Рассмотрим k контур, питающийся от источника энергии с напряжением U_k (рис. 10.1), в процессе установления поля всей системы, т. е. в процессе нарастания токов во всех контурах, и в частности тока I_k k-го контура.

Элементарная энергия, которую совершает этот источник за бесконечно малый отрезок времени dt, можно записать в виде

$$dA_k = U_k I_k dt. \tag{10.1}$$

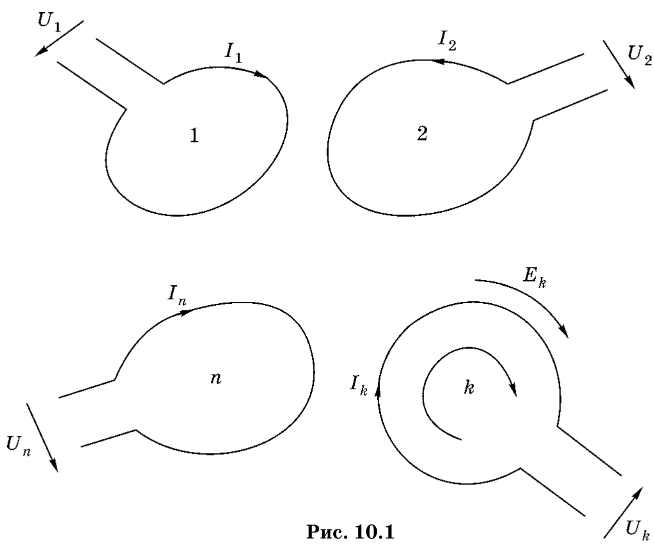


Рис. 10.1
Система контуров с токами

Сопоставим для этого контура уравнения по второму закону Кирхгофа, принимая во внимание, что при изменяющемся МП системы в каждом контуре, и в частности в i-контуре будет индуктироваться ЭДС E_k:

$$R_k I_k - U_k = E_k \tag{10.2}$$

где R_k — сопротивление контура.

Определяя из уравнения (10.2) напряжение U_k и выражая ЭДС E_k через изменение потокосцепления ϕ_k контура в виде

$$E_k = -\frac{d\phi_k}{dt},$$

получим

$$U_k = \frac{d\phi_k}{dt} + I_k R_k. \tag{10.3}$$

Подставляя (10.3) в (10.1), получим

$$dA_k = U_k I_k dt = \frac{d\phi_k}{dt} I_k dt + I_k{}^2 R_k dt$$

или

$$dA_k = d\phi_k I_k + I_k^2 R_k dt, \tag{10.4}$$

где $I_k^2 R_k dt$ — часть работы, направленной на нагревание k-го контура, $I_k d\phi_k = dA_{mk}$ — часть энергии, идущей на создание МП.

Тогда вся работа, идущая на создание МП, выразится в виде

$$A = \int_0^{\phi_k} I_k d\phi_k. \tag{10.5}$$

Для интегрирования необходимо установить связь между током I_k k-го контура и его потокосцеплением ϕ_k.

Для уединенного контура $\phi_k = L_k I_k$. Если i-контур находится в окружении $(n - 1)$ контуров, то

$$\phi_k = \phi_{Lk} + \phi_{mk1} + \phi_{mk2} + \ldots + \phi_{\min},$$

или

$$\phi_k = L_k I_k + M_{k1} I_1 + M_{k2} I_2 + \ldots + M_{kn} I_n.$$

Для простоты считаем, что токи во всех контурах нарастают пропорционально току I_k k-го контура:

$$I_j = \alpha_j I_j,$$

где $\alpha_j (j \in [1, n])$ — постоянные коэффициенты.

Тогда

$$\phi_k = (L_k + M_{1k}\alpha_1 + M_{2k}\alpha_2 + \ldots + M_{nk}\alpha_n) I_k = \alpha_{kk} I_k, \tag{10.6}$$

где $\alpha_{kk} = L_k + M_{1k}\alpha_1 + M_{2k}\alpha_2 + \ldots + M_{nk}\alpha_n$ — постоянный коэффициент.

Ток I_k можно представить в виде

$$I_k = \frac{\phi_k}{\alpha_{kk}},$$

тогда

$$\int_0^{\phi_k} \frac{\phi_k d\phi_k}{\alpha_{kk}} = 0{,}5\frac{\phi_{kk}^2}{\alpha_{kk}} = 0{,}5 I_k \phi_k.$$

Работа, затрачиваемая всеми n источниками системы контуров на создание МП:

$$A_м = \sum_k A_{мi} = \sum_{k=1}^{k=n} 0{,}5 I_k \phi_k. \tag{10.7}$$

Полагая, что в процессе установления поля в занятом ими пространстве не происходило никаких необратимых потерь энергии, работу $A_м$ можно приравнять энергии $W_м$ МП системы контуров с токами:

$$W_м = 0{,}5\sum_{k=1}^{k=n} I_k \phi_k. \tag{10.8}$$

Объемная плотность энергии МП:
средняя:

$$W'_{м\ \text{ср}} = \frac{W_м}{V},$$

где V — объем, в котором распределяется МП;
дифференциальная:

$$W'_м = \frac{dW_м}{dv},$$

где dv — изменение объема.

Пример 10.1. Рассчитаем энергию МП уединенного провода с током. Используя формулу (10.8) при $n = 1$, получим

$$W_м = 0{,}5I\phi = 0{,}5LI^2 = 0{,}5(\phi^2/L). \tag{10.9}$$

Пример 10.2. Рассчитаем энергию МП двух контуров с токами. Используя формулу (10.8) при $n = 1, 2$, найдем энергию МП двух катушек:

$$W_м = 0{,}5(I_1\phi_1 + I_2\phi_2). \tag{10.10}$$

Между катушками имеется индуктивная связь, поэтому суммарное потокосцепление будет складываться из потокосцепления индукции ϕ_L и потокосцепления взаимоиндукции ϕ_M:

$$\phi_1 = \phi_{L1} + \phi_{M12} = L_1I_1 + MI_2,$$
$$\phi_2 = \phi_{L2} + \phi_{M21} = L_2I_2 + MI_1,$$

т. е.

$$W_м = 0{,}5L_1I_1^2 + 0{,}5L_2I_2^2 + MI_1I_2. \tag{10.11}$$

Из выражения (10.11) следует, что энергия МП двух индуктивно связанных контуров определяется не только токами этих контуров и их собственными индуктивностями L_1 и L_2, но зависит и от взаимной индуктивности M между контурами.

10.1.2.
ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Выведем выражение для объемной плотности энергии ферромагнитного кольца с круглым сечением (рис. 10.2), с радиусами r_1 и r_2, по поверхности которого равномерно распределена обмотка с числом витков w, по которой протекает постоянный ток I.

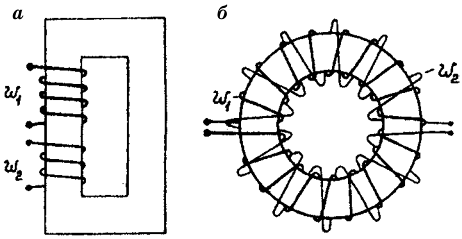


Рис. 10.2
Ферромагнитное кольцо с круговым сечением

Потокосцепление кольца

$$\phi = \Phi w = BSw,\ I = \frac{wI}{w} = \frac{Hl}{w};$$

$$W_м = 0{,}5\phi I = 0{,}5BSw \cdot \frac{Hl}{w} 0{,}5BHV;$$

$$W'_м = 0{,}5BH = 0{,}5\mu H^2 = 0{,}5(B^2/\mu). \tag{10.12}$$

10.1.3.
ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИЛ И МОМЕНТОВ В СИСТЕМЕ КОНТУРОВ С ТОКАМИ

Представим n контуров, по которым протекают токи I_1, I_2, ... I_n. Закрепим все контуры, кроме контура m, которому дадим возможность перемещаться (рис. 10.3). При этом совершается работа

$$dA = qdg,$$

где q — сила, действующая на контур, dg — перемещение контура.

За время перемещения контура относительно неподвижной системы контуров изменяется магнитная энергия, связанная с контурами. Внешние

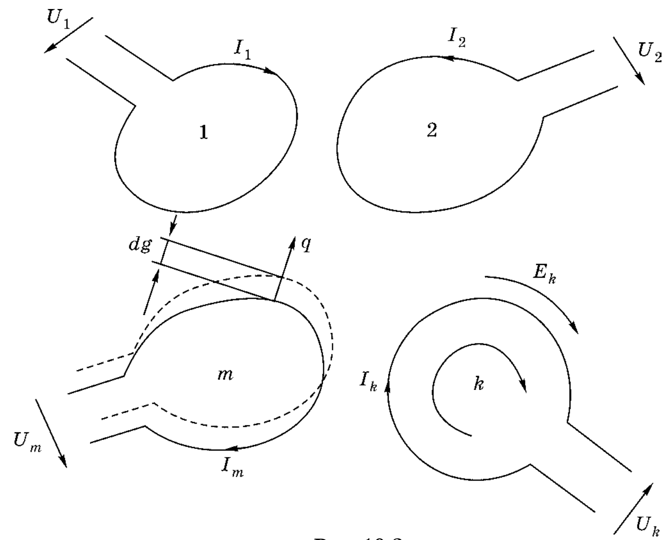


Рис. 10.3
Перемещение контура относительно системы контуров

источники, питающие контуры системы, совершают работу (если нет необратимых процессов превращения энергии):

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} R_k I_k^2 dt + dW_м + q dg, \tag{10.13}$$

где $\sum_{k=1}^{k=n} R_k I_k^2 dt$ — часть этой энергии, идущая на нагревание, $dW_м$ — приращение магнитной энергии.

Учитывая выражение $U_k = \frac{d\phi_k}{dt} + R_k I_k$, уравнение (10.13) преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k d\phi_k = dW_м + q dg. \tag{10.14}$$

Рассмотрим уравнение (10.14) для определения силы q, реализуя его в двух частных случаях.

Предположим, что в первом случае правильным изменением токов в контурах нам удалось, несмотря на перемещение m-контура, сохранить неизменность потокосцеплений ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_n всех контуров. Так как при этом изменение $d\phi_k$ потокосцепления любого контура равно нулю, то левая часть рассматриваемого уравнения обращается в нуль:

$$0 = dW_{мg} + q dg. \tag{10.15}$$

Дополнительный индекс g у приращения энергии МП поставлен здесь для того, чтобы подчеркнуть, что изменение энергии МП в этом частном случае, когда сохраняются неизменными потокосцепления контуров, связано только с изменением положения m контура, т. е. с изменением dg его координаты g. Из выражения (10.15) вытекает

$$q = -\frac{dW_{м\,g}}{dg} = -\frac{\partial W_м}{dg}, \tag{10.16}$$

т. е. сила, действующая на один из контуров системы, равна по абсолютной величине и противоположна по знаку частной производной от энергии МП этой системы контуров по координате, которая изменяется этой силой. В процессе вычисления производной потокосцепления контуров следует считать постоянными.

Во втором случае положим, что токи $I_1, I_2, ... I_n$ всех контуров сохраняются неизменными. Так как m-контур перемещается, то взаимные индуктивности между этим контуром и остальными будут изменяться. Вместе с ними будут изменяться и потокосцепления контуров, что приведет к сохранению всех членов уравнения (10.14). Однако и здесь имеется возможность упростить это равенство. Действительно, опираясь на общее выражение энергии системы контуров с токами (10.8), нетрудно убедиться, что при неизменности токов в контурах приращение энергии будет происходить только за счет изменения потокосцеплений. Оно выразится в виде

$$dW_м = 0{,}5 \sum_{k=1}^{k=n} I_k d\phi_k. \tag{10.17}$$

Подставляя (10.17) в исходное выражение (10.14), получим

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k d\phi_k = 0{,}5\sum_{k=1}^{k=n} I_k d\phi_k + qdg$$

или, после приведения подобных членов,

$$0{,}5\sum_{k=1}^{k=n} I_k d\phi_k = qdg,$$

т. е.

$$dW_{мg} = qdg. \tag{10.18}$$

Индексом g у приращения энергии МП подчеркиваем частность этого дифференциала: токи неизменны, и поэтому если бы не перемещение m контура (изменение его координаты g), то приращение энергии поля отсутствовало бы. Из соотношения (10.18) вытекает

$$q = +\frac{dW_{м\,g}}{dg} = +\frac{\partial W_м}{dg}, \tag{10.19}$$

т. е. силу, действующую на один из контуров системы, можно вычислить путем частного дифференцирования энергии МП этой системы по изменяемой этой силой координате, полагая постоянными токи в контурах. Но знак силы в этом случае необходимо принимать совпадающим со знаком производной.

Формулы (10.18) и (10.19) удобно объединить в одну:

$$q = \pm\frac{\partial W_м}{dg}, \text{ «+» при } I \text{ — const, «−» при } \phi \text{ — const.} \tag{10.20}$$

Естественно, что оба условия дифференцирования при расчете силы должны приводить к одному и тому же результату, так как сила в данной системе контуров вполне определена и не может зависеть от приемов расчета. С точки же зрения техники вычисления наличие двух условий дифференцирования весьма удобно, так как в зависимости от характера выражения энергии МП, которым располагаем, одно из дифференцирований может оказаться значительно проще другого. Например, если энергия МП выражена исключительно через потокосцепление, а токи в формуле энергии отсутствуют, то операция дифференцирования будет существенно облегчена, если эти потокосцепления считать постоянными величинами. И наоборот, когда энергия поля представлена как функция токов контуров, то для упрощения дифференцирования целесообразно принять постоянными именно токи системы.

При вычислении сил путем дифференцирования энергии МП важно выбрать координату, по которой следует выполнять дифференцирование, так как она определяет, какая из множества сил, действующих в системе контуров, будет определена в процессе дифференцирования. При выводе формул координата g определяет положение тех или иных элементов системы, которая изменялась под действием искомой силы. В реальности силы чаще всего не вызывают никаких перемещений элементов конструкции, значит, при расчете той или иной интересующей нас силы необходимо выявить координату, которую эта сила, по крайней мере, стремится изменить. По ней и следует дифференцировать выражение для энергии.

10.1.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СИЛ И МОМЕНТОВ

П р и м е р 10.3. Сила взаимодействия между проводами в двухпроводной линии может быть рассчитана исходя из выражения для внешней индуктивности линии [10.2]:

$$L' = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-r}{r},$$

которое позволит выразить энергию МП вне проводов линии:

$$W_м = 0{,}5L'I^2 = \frac{\mu_0 l I^2}{2\pi} \ln \frac{d-r}{r}.$$

Сила взаимодействия проводов линии стремится изменить расстояние d между проводами. Поэтому для вычисления этой силы выражение энергии следует дифференцировать именно по величине d. Выполняя дифференцирование, получим

$$f = +\frac{\partial W_м}{\partial d} = \frac{\mu_0 l I^2}{2\pi} \frac{r}{(d-r)} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 l I^2}{2\pi(d-r)}, \qquad (10.21)$$

причем из двух условий дифференцирования мы выбрали условие постоянства тока (об этом свидетельствует положительный знак перед производной) потому, что он присутствует в выражении для энергии и при дифференцировании его удобнее считать постоянным.

Так как при всех условиях $d > r$, то сила взаимодействия между проводами линии получается положительной, что свидетельствует о стремлении силы увеличить координату d. Иными словами, между проводами линии возникает сила отталкивания.

П р и м е р 10.4. Сила притяжения между двумя полюсами может быть рассчитана, полагая, что эти полюсы принадлежат простейшему магнитопроводу с воздушным зазором (рис. 10.4).

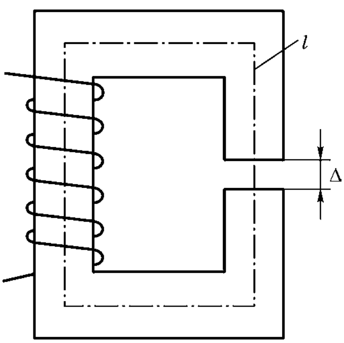


Рис. 10.4
Магнитопровод с воздушным зазором

Так как сила, приложенная к каждому из полюсов, стремится переместить их поверхности, то при вычислении этой силы необходимо дифференцировать энергию МП по длине Δ воздушного зазора, полагая при этом длину l магнитопровода также переменной величиной, связанной с длиной зазора соотношением $\Delta + l = l_0$, где l_0 — постоянная величина, равная суммарной длине магнитной цепи.

Суммарную энергию МП в магнитопроводе и зазоре можно подсчитать по объемным плотностям энергии $W'_м$ и объемам v этих элементов конструкции:

$$W_м = W_{м\,l} + W_{м\,\Delta} = W'_{м\,l} v_l + W'_{м\,\Delta} v_\Delta = 0{,}5\frac{B^2}{\mu} sl + 0{,}5\frac{B^2}{\mu_0} s\Delta =$$
$$= 0{,}5B^2 s\left(\frac{l}{\mu} + \frac{\Delta}{\mu_0}\right) = 0{,}5\frac{\phi^2}{s}\left(\frac{l_0 - \Delta}{\mu} + \frac{\Delta}{\mu_0}\right), \qquad (10.22)$$

где индексом l отмечены все величины, относящиеся к магнитопроводу, а индексом Δ — к воздушному зазору. При этом площадь поперечного сечения s, магнитная индукция B и магнитный поток ϕ лишены индексов, так как в обоих участках магнитной цепи в случае пренебрежения рассеянием и выпучиванием поля в зазоре они равны.

В выражении для энергии МП (10.22) присутствует магнитный поток, поэтому дальнейшее дифференцирование для определения величины силы, действующей между полюсами, удобно провести, считая поток постоянным при ϕ — const. Тогда

$$f = -0{,}5\frac{\phi^2}{s}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\frac{l_0 - \Delta}{\mu} + \frac{\Delta}{\mu_0}\right) = -0{,}5\frac{\phi^2}{s}\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right). \qquad (10.23)$$

Принимая во внимание, что магнитная проницаемость μ материала полюсов электромагнита (магнитопровода) обычно несоизмеримо больше магнитной постоянной μ_0, вторым слагаемым в скобках выражения (10.23) можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым. В результате для искомой силы получим

$$f = -0{,}5\frac{\phi^2}{\mu_0 s}, \qquad (10.24)$$

где ϕ — магнитный поток полюсов магнита, s — площадь полюса.

Знак «−» перед выражением для силы (10.24) показывает, что она стремится уменьшить длину зазора, т. е. полюса электромагнита притягиваются друг к другу.

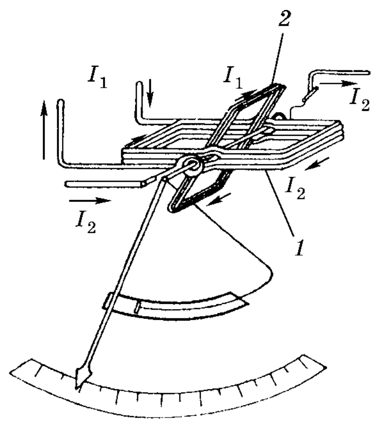


Рис. 10.5
Схема измерительного механизма электродинамического прибора

П р и м е р 10.5. Рассчитаем вращающий момент в электродинамическом приборе. В них для перемещения подвижной части используется энергия МП системы, состоящей из нескольких контуров с токами. В приборах этой системы всегда имеются две группы катушек: неподвижные катушки, создающие МП, и подвижные катушки, перемещающиеся в этом поле. На рис. 10.5 приведена схема измерительного механизма электродинамического прибора. Внутри неподвижной катушки 1, выполненной в виде двух секций, вращается укрепленная на оси бескаркасная катушка 2, намотанная изолированным проводом. Ток к подвижной части измерительного механизма обычно подводится через пружины. Для определенности допустим, что по неподвижной катушке прибора проходит ток I_1, а по подвижной — ток I_2. Магнитные потокосцепления ϕ_1 и ϕ_2, обусловленные этими токами, стремятся совпадать по направлению.

Вращающий момент, движущий подвижную катушку, определяется как изменение энергии общего МП обеих катушек:

$$M_{\text{вр}} = \frac{dW_м}{d\alpha}. \tag{10.25}$$

Энергия МП двух катушек определяется в виде (10.11). Дифференцируя это выражение по углу поворота, получим

$$M_{\text{вр}} = 0{,}5 I_1^2 \frac{dL_1}{d\alpha} + 0{,}5 I_2^2 \frac{dL_2}{d\alpha} + I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha}. \tag{10.26}$$

Индуктивности катушек L_1 и L_2 не зависят от положения катушек в пространстве и являются постоянными, т. е.

$$\frac{dL_1}{d\alpha} = \frac{dL_2}{d\alpha} = 0.$$

Следовательно, вращающий момент, создаваемый в электродинамическом измерительном приборе, выражается формулой

$$M_{\text{вр}} = I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha}. \tag{10.27}$$

Пример 10.6. Рассчитаем момент реактивного двигателя применительно к конструкции, показанной на рис. 10.6. При включении тока в обмотку w и возникновении магнитного потока ϕ, замыкающегося по ярму *Я*, полюсным наконечникам П и ротору Р, выполненным из стали, на последний действует момент, стремящийся повернуть ротор вокруг оси О–О. Для определения этого момента необходимо выражение для энергии МП двигателя продифференцировать по углу α, определяющему положение ротора. При этом с целью облегчения последующих расчетов выберем в качестве этого угла угол α, опирающийся на дугу перекрытия цилиндрических поверхностей полюсных наконечников и ротора.

Энергию МП двигателя рассчитаем через индуктивность обмотки, которую запишем в виде

$$L = \frac{w^2}{R_м} = \frac{w^2}{R_{м\,l} + R_{м\,\Delta}},$$

где $R_{мl}$, $R_{м\Delta}$ — магнитные сопротивления соответственно участков магнитопровода и воздушных зазоров между полюсными наконечниками и ротором. Пренебрежем магнитным сопротивлением $R_{мl}$ путей магнитного потока по стальным участкам магнитопровода (ярмо, полюсные наконечники и ротор) из-за их малости по сравнению с магнитным сопротивлением $R_{м\Delta}$ воздушных зазоров. Тем самым упростим выражение для индуктивности

$$L \approx \frac{w^2}{R_{м\,\Delta}},$$

причем для суммарного магнитного сопротивления двух воздушных зазоров имеем

$$R_{м\,\Delta} = 2\frac{\Delta}{\mu_0 s} = 2\frac{\Delta}{\mu_0 br\alpha},$$

где s — площадь перекрытия полюсных наконечников и ротора, Δ — длина каждого зазора, r — средний радиус ротора и расточки полюсных наконечников, b — толщина магнитопровода (рис. 10.6).

Таким образом, для энергии МП двигателя имеем

$$W_м = 0{,}5LI^2 = 0{,}5\frac{w^2}{R_{м\,\Delta}}I^2 = \frac{w^2 I^2}{4\Delta}\mu_0 br\alpha. \qquad (10.28)$$

Выполняя дифференцирование при условии постоянства тока, для момента реактивного двигателя получим

$$m = +\frac{\partial W_м}{\partial \alpha} = \frac{w^2 I^2 \mu_0 br}{4\Delta}. \qquad (10.29)$$

Положительный ответ показывает, что момент стремится увеличить угол α, т. е. стремится повернуть ось ротора до совпадения с осью полюсов.

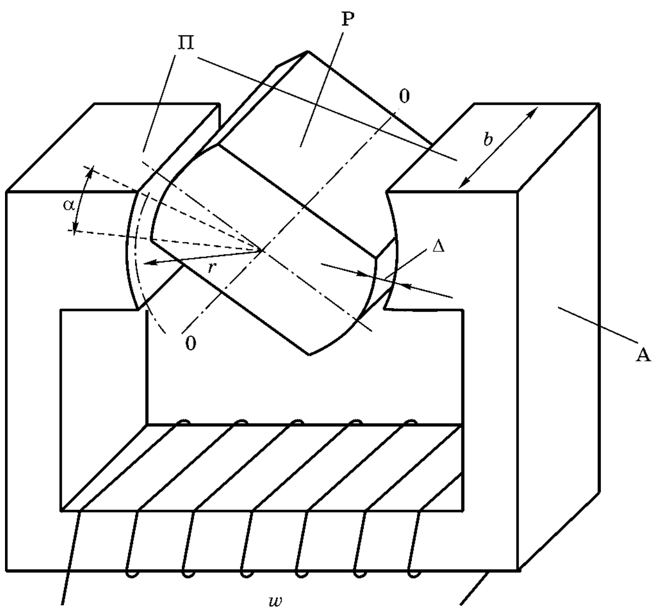


Рис. 10.6
Принципиальная конструкция реактивного двигателя

10.2. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

10.2.1. ЭНЕРГИЯ ИНДУКТИВНОЙ КАТУШКИ С НЕЛИНЕЙНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

При выводе общего выражения энергии МП системы контуров с токами (п. 10.1.1) предполагалось, что индуктивности контуров являлись постоянными величинами. Поэтому полученный результат (10.8) и вытекающие из него частные случаи (10.9–10.10) непригодны для расчета энергии поля при наличии в его области нелинейных сред, когда принятое в выводе условие постоянства индуктивностей не выполняется. Соответственно несправедливыми при нелинейной среде оказываются и выражения для объемной плотности энергии МП, которые выведены в п. 10.1.2 на основе общей формулы (10.8) для энергии поля, т. е. при условии тех же оговорок. Поэтому при решении задач, связанных с расчетом энергии МП в нелинейных средах, приходится обращаться к исходному выражению (10.7) работы, затрачиваемой внешними источниками энергии на создание поля системы контуров с токами (п. 10.1.1):

$$A_м = \sum_k A_{м\,k} = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\phi_k} I_k d\phi_k. \qquad (10.30)$$

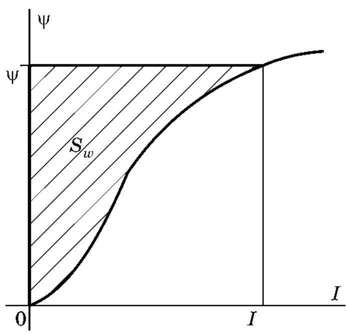


Рис. 10.7
Характеристика катушки с магнитопроводом

Нелинейная зависимость между потокосцеплениями контуров и их токами, характерная для систем с нелинейными средами, существенно осложняет задачу интегрирования. Она может быть успешно выполнена лишь для ограниченного круга примеров.

Так, для системы, состоящей из одного контура (катушки), выражение (10.27) записывается в виде

$$A_м = \int_0^{\phi} I d\phi$$

без знака суммы и индексов у тока I и потокосцепления ϕ катушки.

Обращаясь к магнитной характеристике катушки (рис. 10.7), которую в данном случае удобнее рассматривать как зависимость $I = f(\phi)$ тока от потокосцепления, и помня геометрический смысл определенного интеграла, нетрудно убедиться, что записанный выше интеграл определится площадью S_w фигуры, ограниченной кривой $I = f(\phi)$, осью потокосцеплений ϕ (осью аргумента) и перпендикулярами, восстановленными к этой оси в точках, соответствующих пределам интегрирования, т. е. в начале координат ($\phi = 0$) и в точке конечного значения потокосцепления ϕ (на рисунке эта площадь заштрихована). Если в процессе намагничивания магнитопровода не наблюдалось необратимых процессов поглощения энергии, в частности отсутствовало явление гистерезиса, то вычисленная таким образом работа может быть приравнена к запасу энергии $W_м$ в МП катушки:

$$W_м = A_м = kS_w,$$

где k — коэффициент, связывающий энергию с упомянутой площадью S_w и зависящий от масштабов m_I и m_ϕ графического изображения магнитной характеристики катушки ($k = m_I m_\phi$).

Запас энергии в МП катушки при наличии гистерезиса в магнитопроводе определится не работой, которая затрачена внешними источниками на образование МП, а работой, которую можно получить от катушки при ее выключении, т. е. в процессе убывания тока в обмотке от исходного значения до нуля.

Очевидно, что эта работа может быть вычислена путем интегрирования выражения

$$dA_м = Id\phi$$

в пределах от начального значения ϕ потокосцепления, соответствующего начальному току I катушки (рис. 10.8), до остаточного потокосцепления ϕ_r, определяющегося остаточной индукцией поля в магнитопроводе

$$A_м = \int_{\phi}^{\phi_r} Id\phi.$$

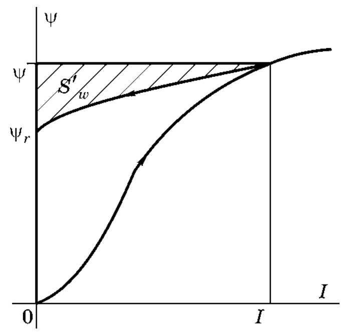


Рис. 10.8
К расчету энергии катушки с магнитопроводом

Нетрудно прийти к заключению, что запас энергии МП в катушке с учетом явления гистерезиса в магнитопроводе будет определяться площадью S'_w, показанной на рисунке штриховкой и ограниченной нисходящей ветвью магнитной характеристики катушки. Как следует из сопоставления рис. 10.7 и 10.8, площадь S'_w меньше площади S_w, т. е. при наличии гистерезиса работа, первоначально затрачиваемая на создание МП при включении тока катушки, больше, чем энергия, получаемая от него при выключении тока. Это свидетельствует о необратимом процессе преобразования энергии при намагничивании магнитопроводов из материала, в котором наблюдаются явления магнитного гистерезиса.

10.2.2. МОЩНОСТИ ПОТЕРЬ В МАГНИТОПРОВОДЕ

10.2.2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Переходя к подробному рассмотрению вопроса о потерях энергии в магнитопроводе, обратим внимание на его исключительную важность для практической электротехники. Помимо того что эти потери ведут к снижению коэффициента полезного действия электротехнических устройств, они вызывают нагрев магнитопровода. Это резко осложняет эксплуатацию оборудования, потому что требуются специальные меры для охлаждения магнитопроводов. А в некоторых случаях нагрев приводит к аварийным ситуациям, полностью выводящим оборудование из строя. Поэтому инженеры как в процессе конструирования электротехнических устройств, так и при их эксплуатации всегда стремятся к уменьшению этих потерь.

Перед дальнейшим рассмотрением прежде всего подчеркнем, что при разговоре о потерях в магнитопроводах следует различать три понятия, обычно объединяемых общим названием *магнитные потери*: *потери энергии, мощность потерь* и *удельную мощность потерь*. Первая из этих величин оценивает энергию, затраченную на нагревание магнитопровода за определенный отрезок времени. Вторая отражает интенсивность процесса выделения тепла в магнитопроводе в данный момент времени. А третья является одной из важнейших характеристик магнитного материала при его использовании в переменных МП. О каждой из этих величин можно говорить, касаясь только потерь на гистерезис, или только потерь на вихревые токи, или рассматривая полные потери, складывающиеся из двух упомянутых составляющих. В частности, для наиболее широко используемого на практике понятия удельной мощности потерь имеем

$$P'_{м} = P'_{Г} + P'_{В}. \tag{10.31}$$

Напомним, что удельная мощность потерь определяется как отношение мощности $P_{м}$ потерь во всем магнитопроводе к его объему $V: P'_{м} = \frac{P_{м}}{V}$. Она измеряется в ваттах на кубический метр (Вт/м^3).

В инженерной практике предпочитают пользоваться мощностью потерь, отнесенной не к объему, а к массе m магнитопровода: $P''_{м} = \frac{P_{м}}{m}$, также называемой удельной мощностью потерь, но измеряемой в ваттах на килограмм (Вт/кг).

Очевидно, что оба понятия легко связываются друг с другом соотношением $P'_{м}V = P''_{м}m$, вытекающим из равенства потерь в данном магнитопроводе объемом V и массой m, подсчитанных через удельные мощности $P''_{м}$ и $P'_{м}$. Отсюда для вычисления удельной мощности $P''_{м}$ по удельной мощности $P'_{м}$ получим

$$P''_{м} = P'_{м}\frac{V}{m} = P'_{м}/\gamma,$$

где γ — плотность материала магнитопровода, равная отношению массы магнитопровода к его объему ($\gamma = m/V$).

10.2.2.2. ПОТЕРИ НА ГИСТЕРЕЗИС

При намагничивании ферромагнитного вещества в нем происходит необратимый процесс преобразования электромагнитной энергии в тепло, т. е. процесс, приводящий в большинстве практических случаев к бесцельной потере части электромагнитной энергии, сокращенно называемой потерями на гистерезис. Они зависят от интенсивности и характера изменения намагничивающего МП, а также от свойств самого ферромагнитного материала. Для их оценки принято обращаться к удельным потерям на гистерезис, т. е. к энергии, расходуемой на единицу объема вещества за один полный цикл его перемагничивания по симметричной петле гистерезиса с оговоренной максимальной индукцией в вершине петли.

Удельные потери энергии на гистерезис измеряют в джоулях на кубический метр (Дж/м^3). Они представляют собой одну из важных характеристик ферромагнитных материалов при их использовании в переменных МП. При постоянном МП потери на гистерезис играют сугубо второстепенную роль.

При работе катушки в цепи переменного тока ее магнитопровод претерпевает периодические перемагничивания с частотой f. Это значит, что удельные потери энергии в единицу времени, т. е. удельная мощность потерь на гистерезис, будут равны

$$P'_{\text{Г}} = W'_{\text{Г}} f$$

или

$$P'_{\text{Г}} = \eta B_m^n f, \tag{10.32}$$

где η, n — коэффициенты, зависящие от физико-химических свойств материала, а показатель степени n к тому же зависит еще и от максимальной индукции B_m.

Таким образом, удельная мощность потерь на гистерезис пропорциональна частоте и максимальной индукции в степени $n(n \in [1{,}6 \div 2{,}0])$.

Мощность потерь на гистерезис во всем магнитопроводе можно рассчитать по удельной мощности, используя очевидное соотношение

$$P_{\text{Г}} = P'_{\text{Г}} V,$$

где V — объем магнитопровода.

10.2.2.3. ПОТЕРИ НА ВИХРЕВЫЕ ТОКИ

Потери на вихревые токи связаны с нагреванием магнитопровода вихревыми токами, и поэтому мощность этих потерь согласно формуле $P = RI^2$ для мощности, расходуемой на нагревание резистора с сопротивлением R протекающим по нему током I, будет пропорциональна квадрату вихревого тока и, следовательно, квадрату индуктирующейся в магнитопроводе вихревой ЭДС. Поскольку же ЭДС индукции, в свою очередь, согласно формуле

$$E = 4k_{\Phi} f w s B_m$$

пропорциональна частоте f и максимальной индукции B_m, можно утверждать, что мощность потерь на вихревые токи будет пропорциональна квадрату этих величин. В частности, для удельной мощности потерь на вихревые токи можно написать

$$P'_{\text{В}} = \sigma B_m^2 f^2, \tag{10.33}$$

где σ — коэффициент, зависящий от удельной электрической проводимости материала магнитопровода и его конструкции.

Мощность потерь на вихревые токи во всем магнитопроводе рассчитывают по удельной мощности потерь и объему V магнитопровода, пользуясь соотношением

$$P_{\text{В}} = P'_{\text{В}} V.$$

10.2.2.4.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНЫХ ПОТЕРЬ ПО ПЕТЛЕ ГИСТЕРЕЗИСА

Удельные потери в магнитном материале складываются из удельных потерь на перемагничивание и на вихревые токи. Они пропорциональны площади $S_Г$ его петли гистерезиса в заданном режиме перемагничивания:

$$W'_Г = kS_Г. \qquad (10.34)$$

Это обстоятельство широко используется на практике для определения удельных потерь на гистерезис, используя экспериментально полученные петли гистерезиса, и дает возможность, сопоставляя петли гистерезиса различных материалов, вычерченных в одном масштабе, наглядно сравнить эти материалы по удельным потерям.

Заметим, что коэффициент пропорциональности k в выражении (10.31) равен произведению принятых при построении петли масштабов $m_Н$ по оси напряженностей и $m_В$ по оси индукций

$$k = m_Н m_В. \qquad (10.35)$$

При этом под масштабом какой-либо физической величины подразумевается число единиц этой величины, условно принятое в единице длины.

10.2.2.5.
РАЗДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНЫХ ПОТЕРЬ

При испытаниях ферромагнитных материалов удается измерить только полные магнитные потери, хотя в ряде случаев необходимо отдельно знать и их доли, т. е. потери на гистерезис и потери на вихревые токи. Отсюда и возникает задача о разделении магнитных потерь, решение которой становится возможным благодаря тому, что потери на гистерезис пропорциональны первой степени частоты, а потери на вихревые токи пропорциональны квадрату частоты.

Обращаясь к выражениям (10.32) и (10.33) для удельной мощности потерь на гистерезис и вихревые токи, составим из них удельную мощность полных магнитных потерь:

$$P'_м = P'_Г + P'_В = \eta B_m^n f + \sigma B_m^2 f^2 \qquad (10.36)$$

и разделим ее на частоту f:

$$\frac{P'_м}{f} = \frac{P'_Г}{f} + \frac{P'_В}{f} = \eta B_m^n + \sigma B_m^2 f. \qquad (10.37)$$

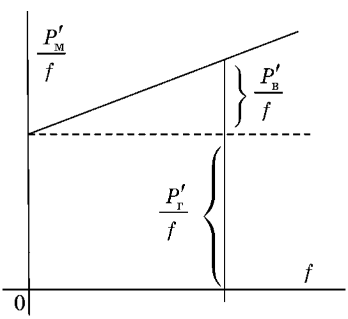


Рис. 10.9
Разделение мощности потерь в стали

Полученное выражение показывает, что отношение полных потерь к частоте представляет собой линейную функцию частоты. Поэтому если измерить удельную мощность полных потерь при нескольких частотах, сохраняя неизменной максимальную индукцию B_m, и построить по этим данным график зависимости отношения $P'_м / f$ от частоты, то он будет представлять собой прямую линию (рис. 10.9), отсекающую на оси ординат отрезок

$$\eta B_m^n = \frac{P'_\Gamma}{f},$$

равный отношению потерь на гистерезис к частоте. Разность же ординат построенной прямой и ее начальной ординаты при любой частоте будет равна отношению $P'_В / f$ потерь на вихревые токи к этой частоте. Таким образом, рассмотренное графическое построение позволяет раздельно определить отношения P'_Γ / f и $P'_В / f$ для любой интересующей нас частоты, умножив которые на частоту, мы получим и сами составляющие P'_Γ и $P'_В$ полных потерь.

Естественно, что задача о разделении потерь может быть решена и чисто аналитически, если будут достоверно известны полные потери при двух разных частотах, но одинаковых максимальных индукциях.

10.2.2.6. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОТЕРЬ В МАГНИТОПРОВОДЕ

Выполним расчет мощности потерь в магнитопроводе, расположенном в полости катушки, питающейся переменным напряжением частотой 50 Гц. На рис. 10.10 изображена петля гистерезиса, соответствующая материалу магнитопровода, снятая при заданном напряжении. Вершина петли соответствует следующим значениям: $B_S = 1{,}2$ Тл, $H_S = 100$ А/м. Площадь петли гистерезиса (данные получаем из рис. 10.10) $S = 6$ см^2, масштаб индукции — $m_В = 0{,}4$ Тл/см, масштаб напряженности — $m_Н = 50$ А/м/см.

Тогда

$$W_м = m_Н m_В S = 0{,}4 \cdot 50 \cdot 6 = 120 \text{ Дж/м}^3.$$

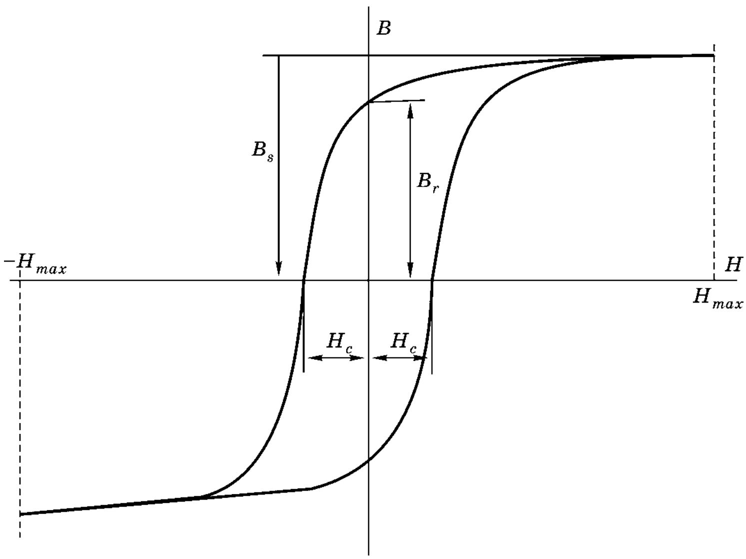


Рис. 10.10
Пример петли гистерезиса ферромагнитного материала

Учитывая, что плотность ферромагнитного материала $\gamma = 7800$ кг/м^3, определим магнитную энергию в кг материала:

$$W'_м = W_м / \gamma = 120/7800 = 0{,}0154 \text{ Дж/кг.}$$

Мощность потерь в кг материала:

$$P'_м = W'_м \cdot f = 0{,}0154 \cdot 50 = 0{,}769 \text{ Вт/кг}$$

10.3. ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

10.3.1. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Простейшими примерами ЭП могут служить поля, связанные с неподвижными в пространстве (относительно наблюдателя) и неизменными во времени электрическими зарядами. Такие поля часто называют электростатическими полями (ЭСП), но в дальнейшем для упрощения используем термин ЭП.

На практике, подразумевая энергию ЭП, созданного системой заряженных тел (зарядов), часто говорят об энергии именно таких тел, не уточняя, что эта энергия связана не столько с телами и их зарядами, сколько с самим полем этих заряженных тел.

Рассмотрим энергию ЭП уединенного заряженного проводящего тела. Для этого рассмотрим весь процесс зарядки этого тела от источника, начиная с нулевого заряда и до состояния, в котором тело получило определенный заряд Q. Подсчитав работу, которую совершит источник энергии в течение всего процесса зарядки, и условившись, что этот процесс происходил без каких-либо потерь энергии, мы, на основании закона сохранения энергии, сможем принять найденную работу за энергию поля этого тела.

Предположим, что зарядка тела заключается в перенесении на него зарядов в бесконечности, где потенциал поля принимается равным нулю. Тогда за бесконечно малый отрезок времени dt, в течение которого телу был дополнительно сообщен заряд dQ, источник совершил работу

$$dA = \varphi dQ,$$

где φ — потенциал заряженного тела в рассматриваемый момент времени.

Всю работу, затраченную источником при сообщении телу заряда Q, определим интегрированием бесконечно малой работы за весь период зарядки

$$A = \int_0^Q \varphi dQ,$$

т. е. от значения заряда, равного нулю, до его конечного значения Q.

Для того чтобы выполнить интегрирование, необходимо выразить подынтегральную функцию φ через независимую переменную Q. Сделать это нетрудно, прибегая к понятию потенциального коэффициента тела:

$$\varphi = \alpha Q.$$

Подставляя это выражение для потенциала под знак интеграла, получим

$$A = \int_0^Q \alpha Q dQ = 0{,}5\alpha Q^2$$

или, заменяя обратно произведение αQ на φ, приходим к выражению для работы в виде

$$A = 0{,}5\varphi Q.$$

Энергия системы заряженных тел может быть определена как сумма энергий отдельных входящих в систему заряженных тел:

$$W_e = 0{,}5\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k Q_k. \qquad (10.38)$$

П р и м е р 10.7. Рассчитаем энергию заряженного конденсатора. Так как конденсатор представляет собой систему из двух заряженных тел, то энергия его ЭП представляется двумя слагаемыми:

$$W_e = 0{,}5(\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2).$$

Заряды обкладок конденсатора всегда одинаковы по величине и противоположны по знаку:

$$Q_1 = -Q_2 = Q,$$

поэтому для его энергии можно написать

$$W_e = 0{,}5(\varphi_1 - \varphi_2)Q.$$

Принимая во внимание, что разность потенциалов обкладок представляет собой напряжение между ними, т. е. напряжение U, до которого заряжен конденсатор, для энергии конденсатора (энергии его ЭП) получим

$$W_e = 0{,}5UQ = 0{,}5CU^2 = 0{,}5(Q^2/C). \qquad (10.39)$$

10.3.2.
ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Каждый элемент пространства, занятого ЭП, несет в себе определенный запас энергии, обусловленный этим полем и зависящий от его интенсивности. В связи с этим вводят понятие об объемной плотности энергии ЭП, представляющей собой отношение энергии W_e, запасенной в данной области поля, к объему v этой области:

$$W'_e = W_e / v.$$

Если же говорить об области бесконечно малого объема dv, с которой связан бесконечно малый запас энергии dW_e, то мы аналогичным отношением определим понятие об объемной плотности энергии в данной точке поля:

$$W'_e = dW_e / dv. \qquad (10.40)$$

Очевидно, что в равномерном поле понятия о средней объемной плотности энергии и объемной плотности энергии в данной точке совпадают.

Выражение для объемной плотности энергии ЭП можно вывести на примере плоского конденсатора. Этот пример удобен тем, что, во-первых, поле плоского конденсатора равномерно, а во-вторых, оно четко ограничено областью между пластинами (пренебрежем искажением поля у краев пластин конденсатора).

Представив энергию ЭП конденсатора в виде

$$W_e = 0{,}5UQ.$$

Выразим его напряжение U через напряженность поля E и расстояние d между пластинами:

$$U = Ed,$$

а заряд Q — через поверхностную плотность σ заряда пластин, равную электрическому смещению D, и площадь s пластины:

$$Q = \sigma s = Ds.$$

Тогда для энергии конденсатора имеем

$$W_e = 0{,}5Ed \cdot Ds = 0{,}5EDv, \tag{10.41}$$

где v — объем пространства между пластинами.

Отсюда для объемной плотности энергии ЭП получим

$$W_e' = W_e / v = 0{,}5ED.$$

Пользуясь известным соотношением $D = \varepsilon E$, последнее выражение можно представить еще в двух формах:

$$W_e' = 0{,}5\varepsilon E^2 = 0{,}5D^2 / \varepsilon. \tag{10.42}$$

10.3.3. ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИЛ В СИСТЕМЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Рассмотрим систему, состоящую из n заряженных тел, соединенных с внешними источниками энергии, которые осуществляют их непрерывную подзарядку (рис. 10.11). В результате взаимодействия ЭП этих тел возникает ряд механических сил, действующих на каждое тело в отдельности. Сосредоточим внимание на одной из таких сил, например на силе q, приложенной к телу m, которое, допустим, имеет возможность перемещаться в направлении действия этой силы, в то время как все остальные тела жестко закреплены.

В течение бесконечно малого времени dt сила q переместит тело на бесконечно малое расстояние dg и совершит при этом элементарную работу qdg. Вместе с тем при движении m тела будет меняться картина ЭП системы, а в результате непрерывной подзарядки тел — возрастать его интенсивность. Поэтому за время dt произойдет изменение энергии ЭП системы на величину

dW_e. За это же время внешние источники, осуществляя подзарядку тел, совершат работу

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k dQ_k,$$

где φ_k — потенциал k тела, dQ_k — приращение его заряда Q_k.

Все эти явления в совокупности описываются уравнением, отражающим закон сохранения энергии в системе заряженных тел в пределах времени dt:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k dQ_k = dW_e + qdg. \quad (10.43)$$

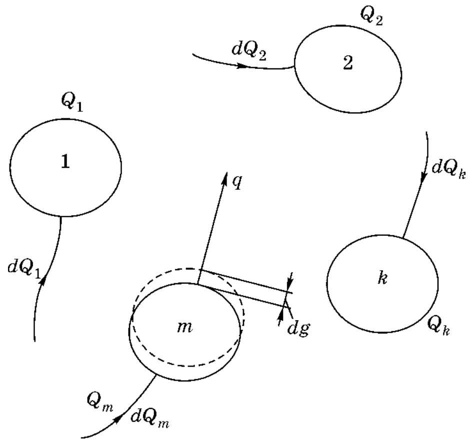


Рис. 10.11
Система заряженных контуров с токами

Согласно ему работа внешних источников энергии идет внутри системы на изменение запаса энергии в ЭП и совершение механической работы силой q.

Уравнение (10.43) справедливо только при условии, что подзарядка тел осуществляется без потерь энергии (по сверхпроводящим проводам), а в пространстве, где существует ЭП, не происходит необратимых процессов преобразования энергии.

Рассмотрим два частных случая. В первом случае предположим, что все тела отсоединены от источников. При этом изменений их зарядов Q_1, Q_2, … ,Q_n происходить не может и, следовательно, приращения зарядов равны нулю ($dQ_k = 0$). Тогда левая часть уравнения обращается в нуль и оно приобретает вид

$$0 = d_g W_e + qdg, \quad (10.44)$$

причем индексом g у знака дифференциала энергии ЭП подчеркивается, что в рассматриваемом случае речь идет о частном дифференциале: когда заряды тел сохраняются неизменными, изменение энергии ЭП вызвано только изменением положения m тела, т. е. только за счет изменения dg его координаты g.

Из упрощенного уравнения (10.34) вытекает

$$q = -\frac{d_g W_e}{dg} = -\frac{\partial W_e}{\partial g}, \quad (10.45)$$

т. е. сила, действующая на одно из тел системы, равна по абсолютной величине и противоположна по знаку частной производной от энергии ЭП этой системы тел по координате, которая изменяется этой силой. При этом в процессе вычисления производной заряды тел следует считать постоянными.

Во втором случае положим, что все тела присоединены к источникам энергии и с их помощью потенциалы тел удерживаются неизменными. При движении одного тела системы, когда емкости между телами меняются, потенциалы тел удерживаются неизменными только при соответствующем изменении зарядов тел. То есть в этом случае приращения dQ_k зарядов уже нельзя считать равными нулю и в уравнении энергий (10.43) сохраняются все его члены. Однако возможно упростить равенство, используя выражение энергии системы заряженных тел:

$$W_e = 0{,}5\sum_{k=0}^{k=n}\varphi_k Q_k.$$

При неизменности потенциалов приращение энергии поля определится приращением зарядов и выразится в виде

$$dW_e = 0{,}5\sum_{k=0}^{k=n}\varphi_k dQ_k. \tag{10.46}$$

Подставляя (10.46) в (10.43), получим

$$\sum_{k=1}^{k=n}\varphi_k dQ_k = 0{,}5\sum_{k=0}^{k=n}\varphi_k dQ_k + qdg$$

или, после приведения подобных членов,

$$0{,}5\sum_{k=0}^{k=n}\varphi_k dQ_k = qdg.$$

Возвращаясь к сокращенной записи приращения энергии ЭП, имеем

$$d_g W_e = qdg,$$

откуда

$$q = +\frac{d_g W_e}{dg} = +\frac{\partial W_e}{\partial g}, \tag{10.47}$$

т. е. силу, действующую на одно из тел системы, можно вычислить путем частного дифференцирования энергии ЭП этой системы по изменяемой этой силой координате, полагая потенциалы тел неизменными. Но знак силы в этом случае необходимо принимать совпадающим со знаком производной.

Обе выведенные формулы удобно объединить в одну:

$$q = \pm\frac{\partial W_e}{\partial g}\ (\text{«+» при } \varphi_i \text{ — const, «−» при } Q_i \text{ — const}), \tag{10.48}$$

помня, что знак «+» берется, если при дифференцировании постоянными принимаются потенциалы, а знак «−», когда частная производная взята при условии постоянства зарядов.

Возможности расчета механических проявлений ЭП с помощью изложенного метода значительно расширяются, если в формуле (10.48) под величинами q и g понимать соответственно так называемые обобщенные силы и координаты. При этом под каждой парой «обобщенная сила − обобщенная координата» следует понимать две физические величины, приводящие к механическому проявлению ЭП. Например, наряду с обычной механической силой f и длиной l в качестве обобщенных пар можно рассматривать момент силы m и угол α, давление и объем, силу поверхностного напряжения и площадь. Из названных примеров наибольшее практическое значение имеют первые два, которые раскрывают возможность расчета не только линейных сил путем дифференцирования по линейному размеру

$$f = \pm\frac{\partial W_e}{\partial l}, \qquad (10.49)$$

но и моментов, действующих в различных электротехнических устройствах. Для получения момента необходимо прибегнуть к дифференцированию по угловым координатам этих конструкций:

$$m = \pm\frac{\partial W_e}{\partial \alpha}. \qquad (10.50)$$

10.3.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СИЛ И МОМЕНТОВ

Пример 10.8. Сила притяжения пластин плоского конденсатора может быть рассчитана путем дифференцирования энергии его ЭП по расстоянию d между пластинами, так как искомая сила стремится сблизить пластины, т. е. изменить координату d.

Используя выражение для энергии заряженного конденсатора в виде

$$W_e = 0{,}5CU^2,$$

целесообразно выполнить дифференцирование, полагая потенциалы пластин конденсатора постоянными, т. е.

$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial d},$$

так как при этом условии постоянным будет и напряжение U (оно равно разности потенциалов), фигурирующее в формуле энергии.

Если учесть, что

$$C = \frac{\varepsilon s}{d},$$

то

$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial d} = 0{,}5U^2\frac{\partial C}{\partial d} = -0{,}5\frac{\varepsilon s U^2}{d^2}. \qquad (10.51)$$

Отрицательный знак результата показывает, что искомая сила стремится уменьшить координату d, т. е. сблизить пластины, что соответствует хорошо известному явлению притяжения разноименно заряженных тел.

Пример 10.9. Рассчитаем вращающий момент электростатического вольтметра. Для примера рассмотрим электростатический вольтметр, конструкция которого представляет собой систему из двух неподвижных плоских полукруглых пластин и одной подвижной пластины той же формы, укрепленной на оси

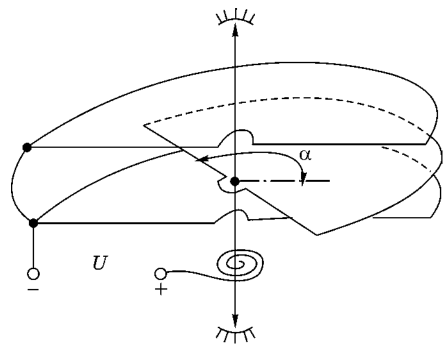


Рис. 10.12
Принципиальная схема электростатического вольтметра

так, что при повороте подвижная пластина входит в промежуток между параллельно расположенными неподвижными пластинами (см. рис. 10.12). Измеряемое напряжение U подается между подвижной пластиной и электрически соединенными друг с другом неподвижными пластинами. Заряжаясь разноименно, подвижные и неподвижные пластины притягиваются, в результате чего возникает вращающий момент, стремящийся втянуть подвижную пластину глубже в пространство между неподвижными пластинами.

Для вычисления этого момента необходимо продифференцировать энергию ЭП вольтметра по углу α, определяющему положение подвижной пластины:

$$m = \pm\frac{\partial W_e}{\partial \alpha},$$

причем в качестве такого угла удобно взять так называемый угол перекрытия пластин, определяющий сектор подвижной пластины, находящийся между неподвижными пластинами.

Видно, что вольтметр представляет собой плоский конденсатор с воздушным диэлектриком, емкость которого определяется выражением

$$C = 2C' = 2\frac{\varepsilon_0 s}{d},$$

где d — расстояние между соседними пластинами, s — площадь упомянутого выше сектора подвижной пластины.

Эту площадь нетрудно выразить через радиус r пластин и угол α:

$$s = \frac{\pi r^2}{2\pi}\alpha = 0{,}5 r^2 \alpha.$$

Тогда для энергии ЭП конденсатора имеем

$$W_e = 0{,}5CU^2 = 0{,}5\frac{\varepsilon_0 r^2 U^2}{d}\alpha.$$

Поскольку энергию ЭП мы выразили через напряжение, ее дифференцирование по углу удобно выполнить при условии U — const, т. е. рассчитать момент по формуле с положительным знаком перед производной

$$f = +\frac{\partial W_e}{\alpha d} = \frac{\varepsilon_0 r^2 U^2}{2d}. \qquad (10.52)$$

Контрольные вопросы

1. Как рассчитывается сила в системе тел, образующих МП?
2. Как рассчитывается сила в системе тел, образующих ЭП?
3. Что такое гистерезис? Как образуется мощность потерь на гистерезис?
4. Как образуются вихревые токи? Как образуется мощность потерь на вихревые токи?
5. Как рассчитывается мощность потерь на гистерезис и на вихревые токи?
6. Как осуществляется разделение потерь на гистерезис и вихревые токи по петле гистерезиса?
7. Рассчитайте момент вращения на оси электростатического вольтметра.
8. Рассчитайте момент вращения на оси реактивного двигателя.

11

ГЛАВА 11

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

11.1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

11.1.1. ОСОБЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Уравнения Максвелла для движущихся сред получаются из аналогичных уравнений для неподвижных сред путем замены частных производных по времени полными производными, определяющими изменение данной величины в точке, движущейся со скоростью v вместе со средой.

Из векторного анализа известно, что в так называемой символической векторной форме записи для любой скалярной величины a:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})a, \qquad (11.1)$$

для векторной величины $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})\vec{A}. \qquad (11.2)$$

В первом случае

$$(\vec{v}\,\mathrm{grad})a = \vec{v}\,\mathrm{grad}\,a,$$

во втором —

$$(\vec{v}\,\mathrm{grad})\vec{A} \neq \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\vec{A}.$$

В большинстве технических задач выполняются следующие условия:

1) скорость движения среды v значительно меньше скорости света $c(v \ll c)$, что позволяет пренебречь членами высшего порядка малости и не требует привлечения теории относительности;

2) материальные параметры среды — диэлектрическая и магнитная проницаемости и удельная проводимость — являются постоянными величинами.

11.1.2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Для неподвижной проводящей среды уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J},\ \vec{J} = \gamma\vec{E},\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Для проводящей среды, движущейся со скоростью $\vec{v}$, замена частных производных полными дает

$$\operatorname{rot}\vec{H}' = \gamma\vec{E}',\ \operatorname{rot}\vec{E}' = -\frac{d\vec{B}'}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t} - (\vec{v}\operatorname{grad})\vec{B}',\ \operatorname{div}\vec{B}' = 0, \qquad (11.3)$$

где значения векторов со штрихами относятся к движущейся среде, т. е. к системе координат, движущейся вместе со средой.

В силу принятых условий

$$(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{B}' = \vec{v}\operatorname{div}\vec{B}' - \operatorname{rot}[\vec{v}\vec{B}'],$$

уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot}\vec{H}' = \gamma\vec{E}',\ \operatorname{rot}(\vec{E}' - [\vec{v}\vec{B}']) = -\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{B}' = 0. \qquad (11.4)$$

Сопоставление этих уравнений с уравнениями для неподвижной среды показывает, что $\vec{B}' = \vec{B}$ и $\vec{E}' - [\vec{v}\vec{B}'] = \vec{E}$. Следовательно, уравнения Максвелла для движущейся проводящей среды могут быть записаны через величины векторов поля в неподвижной системе координат:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_u) = \gamma(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]),\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (11.5)$$

Из этих уравнений следует, что движение проводящей среды не изменяет МП, а ЭП изменяется на величину $\vec{E}_u = [\vec{v}\vec{B}]$ — поля, возникающего при движении проводящей среды в МП.

11.1.3. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Уравнения Максвелла для неподвижной диэлектрической среды:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho,\ \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (11.6)$$

Для среды, движущейся со скоростью $\vec{v}$, и введения для нее значений векторов со штрихами уравнения (11.6) приобретают вид

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\vec{H}' = \frac{d\vec{D}'}{dt} = \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t} + (\vec{v}\operatorname{grad})\vec{D}',\\ &\operatorname{rot}\vec{E}' = -\frac{d\vec{B}'}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t} - (\vec{v}\operatorname{grad})\vec{B}',\\ &\operatorname{div}\vec{B}' = 0,\ \operatorname{div}\vec{D}' = \rho.\end{aligned} \qquad (11.7)$$

Преобразование, аналогичное приведенному в п. 11.1.2 этого раздела, приводит к уравнениям

$$\operatorname{rot}(\vec{H}'+[\vec{v}\vec{D}'])=\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t}+\rho\vec{v},\ \operatorname{rot}(\vec{E}'-[\vec{v}\vec{B}'])=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\vec{B}'=0,\ \operatorname{div}\vec{D}'=\rho. \tag{11.8}$$

Сопоставление с уравнениями для неподвижной среды приводит к соотношениям

$$\vec{E}=\vec{E}'-[\vec{v}\vec{B}'],\ \vec{H}=\vec{H}'+[\vec{v}\vec{D}'] \tag{11.9}$$

или

$$\vec{D}'=\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}'],\ \vec{B}'=\vec{B}-\mu[\vec{v}\vec{D}']. \tag{11.10}$$

Из (11.9) – (11.10) можно выразить величины со штрихами через величины без штрихов:

$$\vec{D}'=\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}']=\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}]-\varepsilon\mu[\vec{v}[\vec{v}\vec{D}']]=$$
$$=\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}]-\varepsilon\mu\{\vec{v}(\vec{v}\vec{D}')-\vec{v}^2\vec{D}'\}=\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}]-\frac{1}{c^2}\{\vec{v}(\vec{v}\vec{D}')-\vec{v}^2\vec{D}'\}. \tag{11.11}$$

Так как по принятому выше условию скорость света

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\gg v,$$

то последними членами, пропорциональными квадрату малого отношения $(v/c)^2$, можно пренебречь, и тогда

$$\vec{D}'=\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}]. \tag{11.12}$$

Аналогично получается соотношение

$$\vec{B}'=\vec{B}-\mu[\vec{v}\vec{D}]. \tag{11.13}$$

Таким образом, уравнения Максвелла для движущейся диэлектрической среды, выраженные через значения векторов в неподвижной системе координат, получают вид

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}[\vec{v}\vec{B}]+\rho\vec{v},\ \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial t}[\vec{v}\vec{D}],$$
$$\operatorname{div}(\vec{D}+\varepsilon[\vec{v}\vec{B}])=0,\ \operatorname{div}(\vec{B}-\mu[\vec{v}\vec{D}])=0. \tag{11.14}$$

Появление новых членов в этих уравнениях означает, что МП создается не только изменением ЭП во времени, но и движением намагниченной среды и движением вместе со средой свободных зарядов, а ЭП определяется, помимо изменения МП во времени, еще и движением поляризованной среды.

11.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

11.2.1. ОСОБЕННОСТИ ТРАНСПОРТНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Транспортные электроэнергетические установки представляют особую разновидность автономных энергоустановок. К ним предъявляются специфические требования. Основными требованиями являются:

1) надежность работы в течение заданного срока службы;

2) стойкость к сложным условиям окружающей среды (переменной влажности, давлению и температуре);

3) противостояние вибрациям;

4) возможность восприятия кратковременных перегрузок по мощности (току);

5) обеспечение заданных показателей качества электроэнергии при работе в транспортной системе электроснабжения;

6) электромеханическое и электромагнитное быстродействие;

7) улучшенные удельные массогабаритные и повышенные энергетические показатели;

8) точность работы элементов электрооборудования, относящихся к информационной группе;

9) электромагнитная совместимость элементов электроэнергетических систем;

10) достаточная степень резервирования;

11) высокие технико-экономические показатели, в том числе простота обслуживания в процессе регламентных работ, легкость монтажа и замены, пониженная стоимость изготовления и эксплуатации с учетом обеспечения эффективности и безопасности перемещения, включая электробезопасность.

11.2.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ

Электромеханическое преобразование энергии является одной из важнейших проблем, определяющих состояние и темпы развития электроэнергетики в целом. Механическая и электрическая формы энергии обладают высокой степенью упорядоченности, относительно легко управляемы и поэтому широко используются на практике для самых различных целей. А значит, проблема взаимного преобразования этих видов энергии остается актуальной. Возникают новые задачи в связи с дальнейшим развитием науки и техники. Сейчас расширяются границы электромеханики: появляются новые актуальные проблемы, связанные с разработкой сверхпроводниковых ЭМ, магнитогидродинамических устройств, емкостных машин, накопителей энергии и других объектов, обладающих заметной спецификой по сравнению с классическими ЭМ. Несмотря на то что общие принципы работы электромеханических преобразователей энергии хорошо известны, теоретическая основа продолжает непрерывно совершенствоваться как при описании соответствующих физических процессов, так и при создании аналитических методов их расчета, оптимизации, автоматизации проектирования и т. п. Существенное углубление представлений о работе электромеханического преобразователя энергии связано с проявляющимся стремлением унифицировать описание различных типов ЭМ на базе единой обобщенной теории. Помимо описания основных характеристик ЭМ, обобщенная теория способствует накоплению знаний по электромеханическим преобразователям в единую систему, выявляющую фундаментальный характер электромеханических процессов в современной науке.

Действие электромеханического преобразователя основано на движении проводников в ЭП и МП, которые описываются уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \tag{11.15}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \tag{11.16}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0; \tag{11.17}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \tag{11.18}$$

где $\vec{H}$ — вектор напряженности МП; $\vec{J}$ — вектор плотности тока проводимости; $\vec{D}$ — вектор электрического смещения; $\vec{E}$ — вектор напряженности ЭП; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции; ρ — объемная плотность электрических зарядов.

Уравнения (11.15)–(11.18) следует дополнить уравнениями

$$\vec{B} = \mu\vec{H}; \tag{11.19}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \tag{11.20}$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость; ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость рассматриваемой среды.

В уравнении (11.15) при исследовании электромеханических процессов в преобразователях током смещения $\partial\vec{D}/\partial t$ можно пренебречь. Оставшиеся члены описывают связь между электрическим током и созданным им МП. Уравнение (11.16) характеризует зависимость между изменяющимся во времени МП и создаваемым им ЭП. Уравнения (11.17) и (11.18) характеризуют структуру МП и ЭП. Из них следует, что линии магнитной индукции не имеют начала и конца, а силовые линии ЭП начинаются и оканчиваются на электрических зарядах. Поэтому у однородного МП в какой-либо односвязной рабочей зоне часть каждой линии магнитной индукции будет располагаться в окружающем эту зону пространстве. Чтобы уменьшить затраты энергии на создание МП в рабочей зоне, часто приходится размещать вне ее ферромагнитный сердечник, по которому замыкаются линии магнитной индукции.

Если же необходимо иметь в аналогичной зоне ЭП, то внешние элементы не нужны, так как это поле может быть создано электрическими зарядами на границах зоны.

Дифференциальные уравнения (11.15)–(11.18) устанавливают связь между электромагнитными параметрами в каждой точке пространства.

При исследовании электромеханических преобразователей часто приходится иметь дело с дискретными элементами, для анализа которых более удобной оказывается интегральная форма электродинамических уравнений.

Если имеется контур L, с которым сцеплены линейные токи i_1, i_2, ..., i_n, то с помощью теоремы Стокса, примененной к (11.15), получим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} i_k, \; k \in [1, n], \tag{11.21}$$

т. е. циркуляция магнитной напряженности по замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром. Во многих случаях контур L, охватывающий токи, можно разбить на дискретные участки, в пределах которых $\vec{H} \to \text{const}$. Пусть $\Phi_k = B_k S_k$ — магнитный поток k-го участка, имеющего поперечное сечение S_k и длину l_k, и в контуре L имеется m участков. Учитывая, что $H_k = B_k/\mu_k$, и вводя магнитное сопротивление участка $R_{мk} = l_k/\mu_k S_k$, получаем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^{m} H_k l_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\Phi_k l_k}{\mu_k S_k} = \sum_{k=1}^{m} \Phi_k R_{мk}.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} i_k$ по определению есть МДС контура, обозначаемая F, то получим

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi_k R_{мk} = F. \tag{11.22}$$

Соотношение (13.22) представляет собой второй закон Кирхгофа для магнитной цепи: МДС в контуре равна алгебраической сумме магнитных напряжений $\Phi_k R_{мk}$ в том же контуре. Такая форма записи закона полного тока (11.21) отражает аналогию между электрическими и магнитными цепями: МДС аналогична электродвижущей силе (ЭДС), магнитный поток — электрическому току, магнитное сопротивление — электрическому сопротивлению.

Аналогично можно получить интегральное представление уравнения (11.16). Для этого учтем, что при движении среды в стационарном МП с индукцией $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$ в каждой точке, помимо приложенного стороннего ЭП с напряженностью $\vec{E}$, наводится ЭП с напряженностью $\vec{E}_v = \vec{v} \times \vec{B}$, и полная напряженность ЭП составит $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\vec{B}$. Далее, добавляя к обеим частям (11.16) $\text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$ и учитывая, что при $\vec{v} \to \text{const}$ согласно правилам векторного анализа

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \cdot \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

получаем видоизмененную форму второго уравнения Максвелла:

$$\text{rot}\, \vec{E}' = -d\vec{B}/dt.$$

Интегрируя его по площади S, ограниченной контуром L, и используя теорему Стокса, получаем

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где e — ЭДС:

$$e = \int_L \vec{E}' d\vec{l}. \qquad (11.23)$$

Если контур содержит w витков, то, вводя потокосцепление $\psi = w\Phi$, получаем

$$e = -w\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \qquad (11.24)$$

Соотношение (11.24) выражает закон электромагнитной индукции Фарадея: ЭДС в контуре определяется взятой со знаком минус полной производной по времени от потокосцепления контура.

Знак минус в формулах для e ставим из-за инерционного характера электромагнитной индукции: наведенная ЭДС направлена так, что создаваемый ею ток препятствует изменению магнитного потока (правило Ленца).

Применим формулу (11.24) к плоской рамочной катушке с w витками, которая вращается с угловой скоростью ω в однородном стационарном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 11.1). При $t = 0$ плоскость катушки перпендикулярна $\vec{B}$ и ее потокосцепление ψ максимально, т. е. $\psi = \psi_m = wBS$, где S — площадь, охватываемая витком катушки. Очевидно, что ψ меняется во времени как

$$\psi(t) = \psi_m \cos\omega t. \qquad (11.25)$$

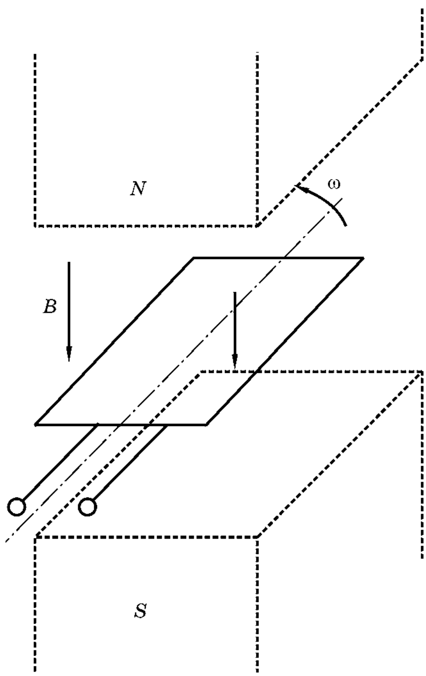


Рис. 11.1
Рамочная катушка в МП

В системе координат, связанной с катушкой, имеем

$$e(t) = -\frac{d\Psi}{dt} = E_m \sin\omega t; \qquad (11.26)$$

$$E_m = \omega\Psi_m. \qquad (11.27)$$

Формулы (11.26), (11.27) справедливы и для случая, когда рамка неподвижна, а с угловой скоростью ω вращаются полюсы, создающие МП.

Часто необходимо найти ЭДС e_l между концами линейного проводника длиной l, движущегося со скоростью $\vec{v}$ в стационарном МП с индукцией $\vec{B}$. Будем считать, что концы проводника скользят по неподвижным направляющим, соединенным с пассивной внешней цепью. Тогда для всей цепи, охватываемой контуром L, получим

$$e = \oint_L \vec{E}' d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}.$$

Первый интеграл по замкнутому контуру равен нулю, так как при стационарном МП стороннее электрическое поле — потенциальное. Во втором интеграле пределы интегрирования ограничены длиной проводника, поскольку у остальных элементов цепи скорость равна нулю. Таким образом,

$$e_l = \int_0^l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{l}. \tag{11.28}$$

Если проводник неподвижен, а движутся полюсы, создающие $\vec{B}$, получим тот же результат. Под $\vec{v}$ всегда следует понимать относительную скорость проводника в МП.

Из (11.28) следует, что ЭДС максимальна, когда векторы $\vec{v}, \vec{B}, \vec{l}$, взаимно ортогональны. Для этого случая

$$e_l = Blv \text{ при } \partial B/\partial t = 0. \tag{11.29}$$

Направление e_l определяется «правилом правой руки»: если большой отогнутый палец направлен по относительной скорости проводника, а линии МП входят в ладонь, то четыре остальных пальца указывают направление e_l.

Кроме уравнений Максвелла, фундаментальным соотношением для описания ЭМП является закон Ома, устанавливающий связь между ЭП и МП, с одной стороны, и электрическим током — с другой. В отсутствие эффекта Холла он имеет вид

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \tag{11.30}$$

т. е. плотность тока пропорциональна и параллельна полной напряженности $\vec{E}'$, складывающейся из напряженности внешнего ЭП с напряженностью $\vec{E}$ и наведенной за счет движения напряженности, равной $\vec{v} \cdot \vec{B}$. Коэффициент пропорциональности γ между $\vec{J}$ и $\vec{E}'$ есть удельная электрическая проводимость среды.

Интегральное представление закона Ома получается простым интегрированием (11.30) по сечению проводника. Если к проводнику с сопротивлением R (проводимостью $G = 1/R$) приложено напряжение U и в нем наводится ЭДС e, то по нему потечет ток

$$I = G(U \pm e). \tag{11.31}$$

Знак «$+$» означает согласную полярность U и e, знак «$-$» — противоположную.

Помимо ЭП и МП, во всех ЭМП существуют электрические токи, взаимодействующие с полями, что проявляется в создании объемных электромагнитных сил, действующих на активную зону и обеспечивающих взаимное преобразование механической и электрической энергии.

Основное соотношение для удельной электромагнитной силы, действующей на единичный объем среды, имеет вид

$$f_э = \vec{J} \times \vec{B}. \tag{11.32}$$

Полная электромагнитная сила $\vec{F}_э$, действующая на линейный проводник $\vec{l}$ с током i в поле с индукцией $\vec{B}$, определяется интегрированием $f_э$ по объему проводника:

$$F_э = i(\vec{l} \times \vec{B}). \tag{11.33}$$

Наиболее эффективное преобразование механической энергии в электрическую будет при максимальном значении $\vec{F}_э$, когда векторы $\vec{l}$ и $\vec{B}$ взаимно ортогональны и

$$F_э = \vec{B}\vec{l}i. \tag{11.34}$$

Направление $\vec{F}_э$ легко определить при помощи «правила левой руки»: большой отогнутый палец левой руки укажет направление $\vec{F}_э$, если линии магнитной индукции $\vec{B}$ входят в ладонь, а остальные четыре пальца направлены по току.

Во многих ЭМП приходится рассматривать момент, действующий на рамочную катушку с током, вращающуюся в МП. Такая катушка изображена на рис. 11.2 в координатах d и q. Пусть МП направлено по оси q, в катушке имеется w витков с током i, а ось катушки наклонена под углом γ к оси d. Катушка создает МДС $F = iw$ и с ней сцеплен магнитный поток Φ, зависящий от ее положения. На каждую сторону катушки длиной l согласно (11.34) действует сила $B_q ilw$, создающая электромагнитный момент:

$$M_э = 2(B_q ilw)r\cos\gamma = (B_q \cdot 2rl)(iw\cos\gamma) = \Phi_q F_d,$$

где Φ_q — полный максимальный магнитный поток для катушки по оси q; F_d — МДС катушки по оси d. При произвольном направлении МП с составляющими индукции B_q и B_d получим

$$M_э = \Phi_q F_d - \Phi_d F_q, \tag{11.35}$$

где $\Phi_q = B_q \cdot 2rl$; $\Phi_d = B_d \cdot 2rl$; $F_q = F\sin\gamma$; $F_d = F\cos\gamma$.

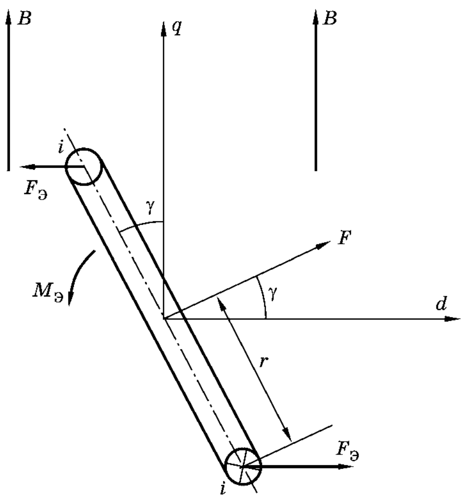


Рис. 11.2
Силы, действующие на катушку в МП

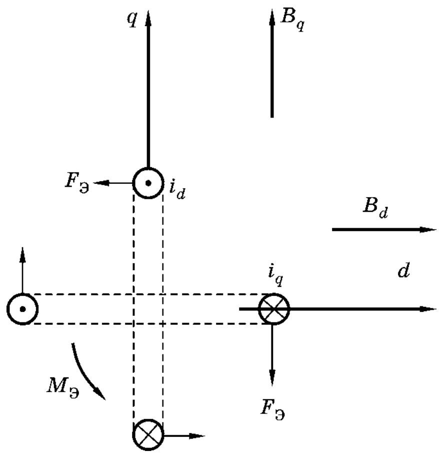


Рис. 11.3
Система из двух равновеликих механически связанных катушек

Формулу (11.35) можно переписать в виде

$$M_э = \psi_q i_d - \psi_d i_q, \tag{11.36}$$

где $i_d = i\cos\gamma$; $i_q = i\sin\gamma$.

Формула (11.36) непосредственно применима для системы из двух равновеликих механически связанных катушек, изображенных на рис. 11.3. Индекс d в этом случае относится к параметрам катушки, ось которой направлена по d, а индекс q — к параметрам катушки с осью вдоль q.

В линейных системах электромагнитную силу $F_{э\xi}$, действующую на контур с током, перемещающийся в направлении ξ, можно определить по формуле

$$\left|F_{э\xi}\right| = \partial W_м / \partial\xi, \tag{11.37}$$

где $W_м$ — магнитная энергия системы, которую при $\mu \to \text{const}$ или кусочно-постоянной μ можно вычислять как

$$W_м = \int\limits_V (B^2 / 2\mu) dv,$$

где V — объем, занятый МП.

В электромеханических системах, где обычно имеется конечное число дискретных контуров с токами, магнитную энергию системы удобно вычислять по формуле

$$W_м = 0{,}5\sum_{k=1}^{n} i_k \Psi_k, \tag{11.38}$$

где i_k и ψ_k — электрический ток и потокосцепление k-го контура.

Для m индуктивно связанных контуров потокосцепление ψ_k находится как

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{n=1, n\neq k}^{m} M_{kn} i_n, \tag{11.39}$$

где L_k — индуктивность контура; M_{kn} — взаимная индуктивность между контурами k и n.

В некоторых случаях электромагнитную силу можно рассчитать по разности магнитных давлений на границах области. Пусть, например, имеется проводящий слой с токами, слева и справа от которого магнитные индукции равны соответственно B_1 и B_2. Тогда удельное магнитное давление на слой справа будет $B_2^2 / (2\mu_0)$, а слева — $B_1^2 / (2\mu_0)$. Разность этих величин, умноженная на площадь одной стороны слоя, даст полную силу, действующую на слой.

Электромеханические преобразователи, использующие эффект электромагнитной индукции, назовем индуктивными.

Известен принцип электростатической индукции, согласно которому при внесении проводника во внешнее ЭП его свободные заряды перераспределяются так, что полное ЭП внутри проводника становится равным нулю. Работающие на этом принципе электромеханические преобразователи назовем емкостными.

Известно, что заряд проводника q линейно связан с его потенциалом φ через коэффициент пропорциональности C, называемый емкостью проводника:

$$q = C\varphi. \tag{11.40}$$

Емкость системы проводников зависит от формы проводников и их относительного положения в пространстве. Для каждого из n проводников системы заряд определяется как

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k, \tag{11.41}$$

где C_{ik} — коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения проводников и называемые емкостными коэффициентами, а φ_k — потенциал k-го проводника.

В емкостном электромеханическом преобразователе емкость C или емкостные коэффициенты C_{ik} периодически меняются во времени благодаря движению проводников; при этом меняется q и в цепи, связывающей проводники и нагрузку, возникает электрический ток

$$i = dq/dt. \tag{11.42}$$

Энергия, которая выделяется в цепи с током i, компенсируется механической энергией, затрачиваемой на преодоление электростатических сил между перемещающимися проводниками.

В линейных системах силу $F_{э\xi}$, действующую со стороны ЭП на проводник, перемещающийся в направлении ξ, можно вычислить по формуле (11.37), в которой $W_э$ — энергия ЭП, которая при постоянной диэлектрической проницаемости (ε — const) или кусочно-постоянной ε равна

$$W_э = \int_V 0{,}5\varepsilon E^2 dv,$$

где V — объем, занятый ЭП.

При исследовании электромеханических устройств удобнее пользоваться формулой

$$W_э = 0{,}5\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi_k, \tag{11.43}$$

где q_k, φ_k — заряд и потенциал проводника; суммирование проводится по всем заряженным проводникам.

Поскольку емкостные электромеханические преобразователи в основном состоят из конденсаторов с подвижными элементами, часто используется формула для энергии конденсатора:

$$W_э = 0{,}5CU^2 = 0{,}5(q^2/C),\ C = \varepsilon S/d, \tag{11.44}$$

где U — напряжение на обкладках; S — площадь противолежащих участков пластин; d — расстояние между пластинами.

11.2.3. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ. ИХ ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОБРАТИМОСТЬ

Электромеханические преобразователи можно разбить на две группы: кондукционные и индукционные. Рассмотрим их простейшие модели.

Простейшая модель кондукционного преобразователя показана на рис. 11.4. Под действием некоторой внешней силы проводник длиной l движется со скоростью $\vec{v}$ в поперечном МП с индукцией $\vec{B}$. Его концы с помощью контактного устройства подсоединены к внешней электрической цепи с нагрузкой $R_н$. Внутреннее сопротивление проводника R.

В проводнике наводится ЭДС $e = Blv$, и в цепи течет ток $I = e/(R + R_н)$. Взаимодействие тока и МП создает тормозную электромагнитную силу $F_э = Bil$. Часть механической энергии, затрачиваемой на преодоление этой силы, преобразуется в полезную электрическую энергию, которая потребляется нагрузкой $R_н$. Все процессы в модели не изменятся, если проводник будет неподвижен, а магнитные полюсы, создающие МП, будут перемещаться со скоростью v. Мощность электромеханического преобразователя

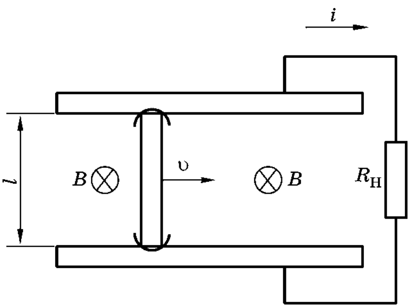


Рис. 11.4
Кондукционный электромеханический преобразователь

$$P = I^2R_н = v^2B^2l^2R_н/(R + R_н)^2. \quad (11.45)$$

Можно показать из условия $dP/dR_н = 0$, что максимум P достигается при $R = R_н$. При этом половина генерируемой электрической мощности теряется на внутреннем сопротивлении, и электрический коэффициент полезного действия модели $\eta_э = I^2R_н/I^2(R + R_н)$, равный отношению полезной электрической мощности к полной электрической мощности, составляет всего 0,5. Если увеличить $R_н$, то $\eta_э$ возрастает. Таким образом, режимы максимальной мощности и максимального коэффициента полезного действия в электромашинном преобразователе не совпадают.

Простейшая модель индукционного преобразователя показана на рис. 11.5. Под действием внешней силы замкнутый одновитковый контур движется с линейной скоростью v в поперечном МП, в котором индукция $B(x)$ имеет форму синусоидальной волны, бегущей со скоростью v в направлении движения контура. Такое поле $B(x)$ может быть создано, например, распределенной трехфазной обмоткой. Пусть $v > v_B$, т. е. контур опережает поле. Тогда в нем наводится ЭДС и потечет ток, который при взаимодействии с индукцией

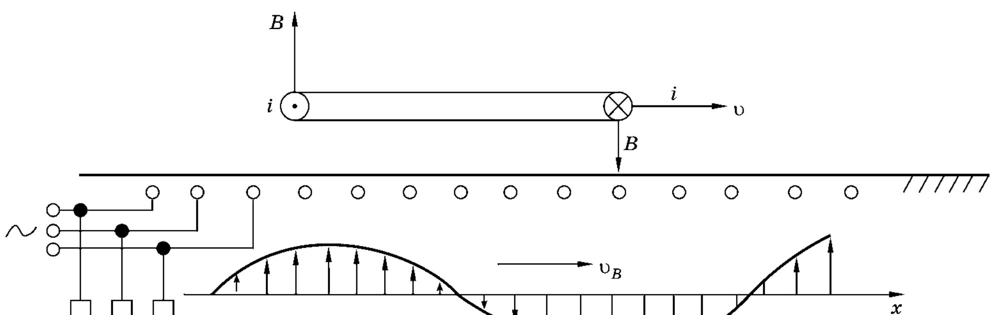


Рис. 11.5
Индукционный электромеханический преобразователь

$B(x)$ создаст тормозящую силу. Часть подводимой энергии, затрачиваемой на преодоление этой силы, будет индукционным путем (т. е. через МП) передаваться в обмотку в виде активной мощности, которая может питать нагрузки, подключаемые к той же обмотке, разгружая частично другие генераторы сети. Упрощенно процесс можно представить так: ток в контуре создает меняющийся во времени магнитный поток, который наводит в основной обмотке ЭДС и ток, питающий нагрузки.

В грубом приближении действующее значение ЭДС в одном проводнике контура будет: $e \approx Bl(v - v_B) = Blv(1 - v_B/v)$, где B — действующее значение индукции; ток в контуре $I = 2e/Z$, где Z — полное сопротивление контура; сила, действующая на контур, $F_э = 2BlI$; мощность привода, затрачиваемая на движение контура, $P = F_э v$; полезная электрическая мощность $P = P_1\eta_э$. С учетом записанных соотношений имеем

$$P = 4\eta_э v^2 B^2 l^2 \left(1 - \frac{v_B}{v}\right) / Z. \tag{11.46}$$

Из формул (11.45) и (11.46) следует, что мощность электромеханического преобразователя возрастает при увеличении скорости вращения и магнитной индукции в зазоре (при v_B/v — const зависимость P от v и B квадратичная). Отсюда следует, что наиболее эффективный путь увеличения P при заданных габаритах преобразователя — повышение магнитной индукции и скорости перемещения проводников. Кроме того, возрастания мощности преобразователя можно добиться за счет снижения его внутреннего сопротивления.

Важной особенностью электромеханических преобразователей является их обратимость. Так, если в модели, изображенной на рис. 11.4, вместо нагрузки $R_н$ подключить ЭДС и создать в проводнике ток, то возникнет электромагнитная сила, которая будет ускорять проводник. Устройство при этом работает в двигательном режиме, т. е. преобразует электрическую энергию источника в механическую энергию. Аналогично во второй модели (рис. 11.5) режим с $v < v_B$ приведет к изменению направления тока в контуре, а действующая на контур электромагнитная сила также изменит знак и будет ускорять контур. При этом подводимая электрическая энергия индукционным путем преобразуется в механическую энергию контура, и устройство работает в двигательном режиме.

11.2.4. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Несмотря на большое разнообразие ЭМ, все они основаны на физических явлениях, возникающих при движении проводника в МП. Это позволяет построить единую теорию обобщенной ЭМ, на базе которой как частные случаи могут быть исследованы конкретные типы машин в стационарных и переходных режимах работы.

В основе теории обобщенной ЭМ лежит замена реальной m-фазной многополюсной машины двухфазной двухполюсной машиной с взаимно ортогональными обмотками на статоре и аналогичными обмотками на роторе. Эта замена связана со следующими соображениями. Во-первых, всегда можно

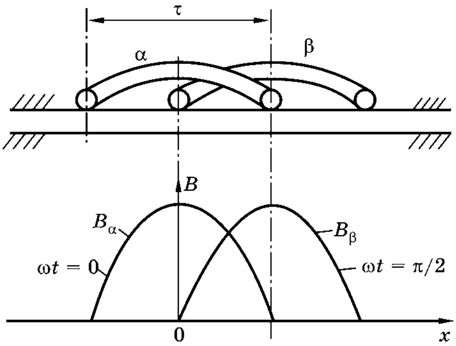


Рис. 11.6
Две ортогональные обмотки, создающие магнитное поле

выбрать ортогональные обмотки так, чтобы они создавали такой же электромагнитный момент $M_э$, что и реальные обмотки со сложной геометрией. При этом для нахождения $M_э$ используется простая и наглядная формула (11.36). Во-вторых, с помощью двух ортогональных обмоток можно создавать основные виды МП, реализуемые в ЭМП. Так, при питании двух ортогональных обмоток постоянным током получим результирующее стационарное МП, при питании их переменным током с одинаковой фазой получим результирующее пульсирующее поле, при питании обмоток переменным током со сдвигом фаз тока в обмотках на 0,25 периода получим бегущее или вращающееся поле. Если первые два утверждения очевидны, третье легко доказывается.

Пусть имеются две обмотки α и β каждая шириной τ, сдвинутые на $\tau/2$ в пространстве и питаемые переменным током со сдвигом фаз на $\pi/2$ (рис. 11.6). Рассмотрим первую пространственную гармонику поля обмоток. Начало отсчета выберем так, что

$$B_\alpha = B_\alpha(t)\cos\frac{\pi}{\tau}x.$$

Тогда

$$B_\beta = B_\beta(t)\cos\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Благодаря сдвигу фаз, имеем

$$B_\alpha(t) = B_m \sin\omega t,\quad B_\beta(t) = B_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Результирующее поле равно

$$B = B_\alpha + B_\beta = B_m\left[\sin\omega t\cos\frac{\pi}{\tau}x + \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\tau}x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ = B_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right). \tag{11.47}$$

Выражение (11.47) описывает бегущую вдоль оси x синусоидальную волну магнитного поля. Действительно, проследим за положением точки x', где индукция остается постоянной и, следовательно, $\omega t - \frac{\pi}{\tau}x' = \text{const}$. Имеем $x' = \frac{\tau}{\pi}(\omega t - \text{const})$, т. е x' должно расти линейно по времени. Так как выбранная точка является произвольной, приходим к выводу, что вся пространственная синусоида индукции смещается по x пропорционально времени, т. е. движется со скоростью

$$v_B = \frac{dx'}{dt} = \frac{\omega\tau}{\pi} = 2\tau f, \tag{11.48}$$

где f — частота тока.

Таким образом, модель ЭМ с двумя ортогональными обмотками на статоре и двумя аналогичными обмотками на роторе позволяет имитировать практически любую реальную машину по значению электромагнитного момента и структуре МП.

В общем случае на ортогональных осях статора и ротора может размещаться произвольное число обмоток, эквивалентных как основным обмоткам (якорным, возбуждения), так и вспомогательным (демпферным, управляющим и т. п.). Более подробные сведения об обобщенных моделях с взаимно вращающимися координатными осями статора и ротора и с взаимно неподвижными координатными осями статора и ротора можно найти в литературе [11.1–11.2].

11.3. УНИПОЛЯРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

11.3.1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ УНИПОЛЯРНОЙ МАШИНЫ

Действие униполярной машины основано на принципе электромагнитной индукции, открытом М. Фарадеем еще в 1831 г. В результате исследований явления электромагнитной индукции М. Фарадей построил лабораторную модель, которую можно считать прообразом современных униполярных машин. Эта модель состояла из медного диска, приводящегося во вращение между полюсами подковообразного магнита, и двух скользящих контактов. Для получения наибольшего напряжения на контактах один из них расположен у края диска, а второй — около оси вращения (рис. 11.7).

На рис. 11.8 схематически показан другой возможный вариант модели, когда цилиндрический магнит вращается вокруг своей оси. С боковой поверхности цилиндра и вала напряжение снимается при помощи двух щеток.

В XIX в. по поводу принципа действия подобной системы велась длительная дискуссия. Дело в том, что напряженность МП в пространстве для

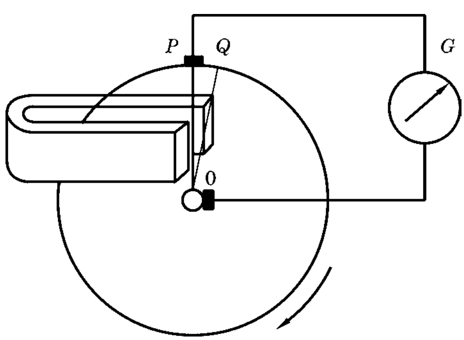


Рис. 11.7
Схема дисковой модели униполярной машины

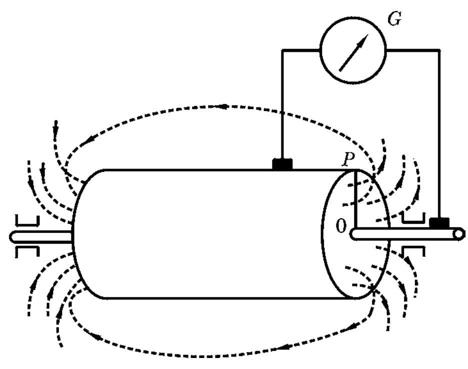


Рис. 11.8
Схема цилиндрической модели униполярной машины

рассматриваемого случая не изменяется во времени, поэтому трудно объяснить возникновение ЭДС в контуре *PGO*. В то же время многие ошибочно отождествляли вращение магнита с вращением его силовых линий.

Для строгого обоснования принципа действия приведенных выше схем необходимо воспользоваться понятием о силе Лоренца. Однако мы воспользуемся здесь упрощенным объяснением.

Используем общепризнанное упрощенное рассмотрение физических явлений в униполярных преобразователях, которое, тем не менее, дает правильные количественные результаты.

Предположим, что диск с радиусом R (рис. 11.7) вращается с равномерной угловой скоростью ω, а МП направлено вдоль оси и распределено равномерно по всей поверхности диска с индукцией, равной B. Если в некоторый момент времени воображаемый луч занимал положение OP (рис. 11.7), а спустя промежуток времени dt переместился в положение OQ, то изменение магнитного потока в результате преображения контура OPQ в OQG составит

$$d\Phi = -B \cdot 0{,}5Rv \cdot dt = -B \cdot 0{,}5R(\omega R)dt = -0{,}5BR^2\omega dt.$$

Тогда ЭДС, наведенная в контуре, будет

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0{,}5BR^2\omega. \tag{11.49}$$

Здесь $v = \omega R$ — линейная скорость на окружности диска. Заменяя ωR на v, получим

$$e = 0{,}5BRv. \tag{11.50}$$

Аналогичный результат получается, если определить ЭДС из условия пересечения магнитного потока отрезком радиуса ΔR, а именно

$$e = \int_0^R B \cdot \omega R \cdot dR = 0{,}5BRv.$$

Если линейную скорость вращения выразить через частоту вращения диска в секунду, то $v = 2\pi Rn$, а

$$e = BnS = n\Phi, \tag{11.51}$$

где S — площадь диска, пронизываемая магнитным потоком; $\Phi = BS$ — магнитный поток.

Таким образом, ЭДС, которая индуктируется во вращающемся диске, пропорциональна скорости вращения диска и пронизывающего его магнитного потока. Например, если $\Phi = 0{,}1$ Вб, $n = 50$ 1/с, то $e = 5$ В.

Как уже отмечалось, несмотря на вращение цилиндрического магнита, его поле не изменяется во времени. Воспользовавшись ранее высказанными соображениями относительно перемещения луча OP (рис. 11.8) вместе с ротором относительно поля, придем к выводу, что во внешнем контуре должен протекать постоянный ток.

При рассмотрении схем, изображенных на рис. 11.7 и 11.8, предполагалось, что вращение диска является заданным. Схемы подобного типа обратимы: они могут работать как в генераторном, так и в двигательном режимах. Электромагнитный вращающий момент, развиваемый машиной, пропорционален произведению тока на рабочий магнитный поток.

Электрические машины, построенные по принципу схем, изображенных на рис. 11.7 и 11.8, получили название «униполярные». Это название обусловлено тем, что здесь магнитное поле сохраняет постоянную величину и направление вдоль окружности воздушного зазора, что позволяет получить постоянный ток без коммутации.

Название «униполярные» неоднократно подвергалось критике и в ряде стран уступило место названию «униполярные ациклические». Этим названием стремятся передать то обстоятельство, что как распределение индукции в рабочей зоне ротора, так и направление протекающего тока характеризуются одним направлением, в отличие от многополюсных машин, у которых в обмотках якоря имеют место знакопеременные потоки и электрические токи.

Униполярные преобразователи являются низковольтными. Так, униполярный генератор, как правило, используется для генерирования больших токов (5000–50000 А) низкого напряжения (5–40 В). Понятно, что при генерировании таких больших токов возникают трудности с токосъемом.

11.3.2. УНИПОЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР

Принципиальная схема электрического генератора постоянного тока изображена на рис. 11.9.

Здесь МП сохраняет постоянную величину и направление вдоль окружности воздушного зазора, что позволяет получить постоянный ток без коммутации. На статоре расположены катушки возбуждения концентрически с валом машины, создающие по окружности воздушного зазора постоянный магнитный поток. Якорь машины выполняется массивным (без обмотки), в виде медного цилиндра, укрепленного на стальном сердечнике. Съем тока осуществляется контактными щетками, расположенными на якоре вблизи его торцов. В связи с тем, что через контакты должны быть переданы значительные токи (5000–50000 А), возникают трудности с токосъемом.

Повышение напряжения достигается значительным усложнением конструкции машины. При этом теряются основные достоинства — простота и надежность. Ротор униполярного генератора является как бы обмоткой с витками, которые всегда соединены параллельно, в отличие от коллекторного генератора постоянного тока, где последовательное соединение проводников обмотки может обеспечить необходимое высокое напряжение.

Если принять во внимание, что индукция в магнитной цепи униполярного генератора по условию насыщения стали может быть допущена не более 2 Тл, а линейная окружная скорость литого диска (по соображению

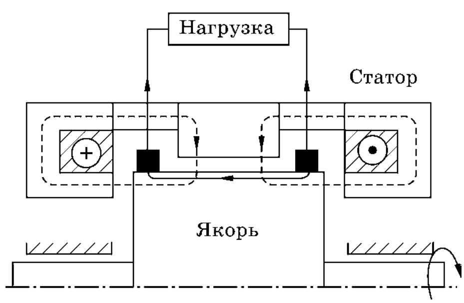


Рис. 11.9
Схема униполярного генератора

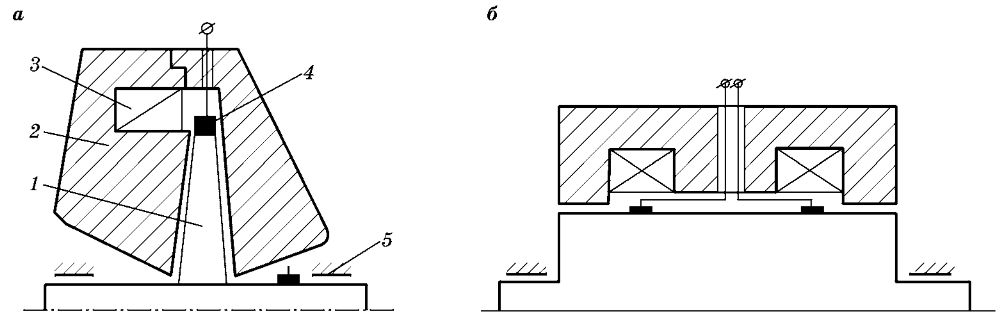


Рис. 11.10
Конструктивные схемы дисковой (*а*) и цилиндрической (*б*)

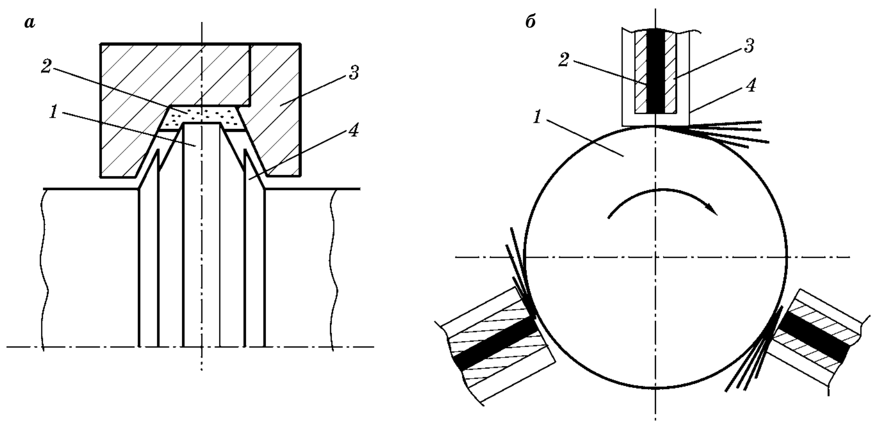


Рис. 11.11
Схемы выполнения сплошного кольцевого (*а*)
и зонального струйного (*б*) токосъемного устройства:
1 — вращающийся электрод; *2* — жидкий металл; *3* — неподвижный электрод; *4* — отражатели.

механической прочности) не должна превосходить 200 м/с, то при радиусе диска в 1 м согласно выражению (11.50) для максимальной ЭДС генератора получим величину, равную 200 В.

Дальнейшее увеличение выходного напряжения генератора возможно при использовании последовательного соединения электрических цепей отдельных дисков, что потребует дополнительных скользящих контактов (токосъемных устройств).

Токосъемные устройства, обеспечивающие прохождение тока между взаимно перемещающимися частями машин, играют важную роль при создании надежных униполярных генераторов. В качестве них могут использоваться твердые скользящие контакты, жидкометаллические контакты или их комбинация.

На рис. 11.10 показаны принципиальные схемы униполярных генераторов дискового (рис. 11.10*а*) и цилиндрического (рис. 11.10*б*) типов с твердым скользящим контактом.

Работа щеток, используемых в современных коллекторных машинах, достаточно хорошо описана [11.3]. Различные марки щеток допускают на коллекторе относительную скорость в подвижном контакте $v = 10–90$ м/с и плотность тока $\delta = 60–200$ кА/м^2. В крупных униполярных генераторах для обеспечения необходимого уровня генерируемого напряжения линейная скорость может превышать 200 м/с при токах, достигающих сотен килоампер. Из-за низкой допустимой плотности тока в щетках число их в токосъемном устройстве велико. В связи с этим трудно обеспечить равномерное распределение тока между ними, поскольку оно приводит к перегрузкам отдельных щеток. Кроме того, при повышенных скоростях нарушается устойчивость работы контакта из-за вибраций. Возрастают потери на трение в связи с необходимостью увеличения удельного нажатия.

Повысить удельные нагрузки щеточных систем можно, если изготовить щетки из более прочных материалов. В качестве таковых используются металлизированные угольно-волокнистые щетки. Однако радикальное преодоление недостатков щеточного контакта возможно с помощью жидкометаллического съемочного контакта.

Жидкометаллический токосъем возможен двух видов: сплошной (рис. 11.11*а*) и зональный струйный (рис. 11.11*б*). Струйные устройства можно рассматривать как частный случай кольцевых с зональной подачей жидкого металла в контактную зону без формирования жидкометаллического кольца. Они характеризуются повышенным расходом жидкого металла, необходимым для обеспечения высокой надежности и стабильности контакта. Уменьшение количества прокачиваемого металла при неизменной площади струи достигается путем размещения в проточке неподвижного контакта отражателей или установкой на соплах вогнутых, по отношению к подвижному электроду, насадок [11.4].

11.4. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

11.4.1. ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В конце XX в. интенсивно развивалась магнитная гидродинамика. Эта область знаний касается движения проводящей жидкой или газообразной среды во внешнем МП.

Движение проводящей среды в МП, в отличие от рассмотренного в п. 11.3 движения без внешнего поля, сопровождается появлением токов, создающих дополнительное МП. Взаимодействие этих токов с суммарным МП обусловливает особый характер движения среды. Расчет этого движения и составляет основную задачу магнитной гидродинамики.

МГД явления встречаются и в условиях Земли (например, перемещение морской воды в МП Земли), и в космосе. Звезды, солнце и ядра планет представляют собой жидкие и газообразные среды, движущиеся в МП, в динамике межпланетных ионизованных газовых сред (например, в ионосфере

Земли, находящейся в земном МП). В условиях космоса даже малые силы электромагнитного характера могут вызвать заметные результаты, так как время действия этих сил весьма велико.

Много усилий потрачено на использование МГД явлений для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую в МГД генераторах, не имеющих вращающихся частей и заменяющих систему «котел — турбина — генератор». МГД явления используются также в работах по созданию управляемой термоядерной реакции, для перекачки расплавленного металла, плазменных реактивных двигателей космических аппаратов и т. д.

Теория МГД явлений развивается как для несжимаемых, так для и сжимаемых сред. Здесь необходимо решать и уравнения ЭМП в движущейся проводящей среде (п. 11.1), и уравнения гидродинамики, дополненные членами, соответствующими силам электромагнитного происхождения.

Выведенные в п. 11.1 уравнения ЭМП в движущейся проводящей среде удобно записать несколько иначе, исключив из них вектор напряженности ЭП.

Применение операции rot для обеих частей уравнения (11.4) и подстановки вектора $\vec{E}$ из уравнения (11.9) дают

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} + \operatorname{rot}[\vec{v}\vec{B}] = -\frac{1}{\gamma}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H}) + \\ + \operatorname{rot}[\vec{v}\vec{B}] = \frac{1}{\gamma}\Delta\vec{H} + \operatorname{rot}[\vec{v}\vec{B}] \tag{11.52}$$

при $\operatorname{div}\vec{H} = 0$.

Так как $\vec{B} = \mu\vec{H}$, то

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu}\Delta\vec{H} + \operatorname{rot}[\vec{v}\vec{H}]. \tag{11.53}$$

Основными уравнениями гидродинамики для среды с плотностью вещества ρ, движущейся со скоростью $\vec{v}$, являются уравнение непрерывности и уравнение движения.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \tag{11.54}$$

отражает закон сохранения массы: изменение ее в данном объеме равно массе, прошедшей через поверхность, ограничивающую этот объем.

Уравнение движения (уравнение Навье–Стокса)

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho g + \rho\vec{v}\Delta\vec{v} + \vec{F}, \tag{11.55}$$

где ρ — плотность среды, p — давление среды, отражает закон Ньютона: произведение массы на ускорение равно действующей силе. Здесь все члены отнесены к единице объема. Первый член правой части соответствует силе, возникающей из-за градиента давления; второй член — силе тяжести, где g — ускорение силы тяжести; третий член — силе вязкости, где v — кинематический коэффициент вязкости; четвертый член — силе $\vec{F}$ электромагнитного происхождения.

Величина $\vec{F}$ может быть получена из выражения

$$\vec{F} = \frac{d\vec{f}}{dV} = \frac{[id\vec{l}\vec{B}]}{d\vec{l}d\vec{S}} = [\vec{\delta}\vec{B}], \tag{11.56}$$

где $d\vec{f}$ — сила, действующая в магнитном поле на элемент тока $id\vec{l}$, $i = \vec{\delta}d\vec{S}$ — ток, протекающий в объеме $dV = d\vec{l}d\vec{S}$.

Для сжимаемой среды основные уравнения гидродинамики должны быть дополнены уравнением состояния, связывающим между собой плотность ρ, давление p и температуру T:

$$p = p(\rho, T), \tag{11.57}$$

и уравнением теплового баланса, связывающим тепловую энергию W_T единицы массы, плотность ρ и полное количество тепла α в единице объема, обусловленное теплопроводностью, вязкостью и электрическим током:

$$\rho\frac{dW_T}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \alpha. \tag{11.58}$$

В большинстве случаев основную роль играет теплопроводность. Тогда $\alpha = \beta\Delta T$, где β — коэффициент теплопроводности.

Уравнения (11.57) и (11.58) должны использоваться лишь тогда, когда изменение давления, плотности и температуры оказывает существенное влияние на движение проводящей среды, как это, например, имеет место при рассмотрении МГД явлений в плазме и газовых средах.

Таким образом, полная система уравнений магнитной гидродинамики состоит из следующих уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu}\Delta\vec{H} + \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}], \\
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0, \\
\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p + \rho g + \rho\vec{v}\Delta\vec{v} + [\vec{\delta}\vec{B}], \\
p = p(\rho, T), \\
\rho\frac{dW_T}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \alpha.
\end{gathered} \tag{11.59}$$

Как видно из системы уравнений магнитной гидродинамики (11.59), процессы зависят от многих факторов, в том числе от скорости перемещения среды и от ее проводимости. Так как значения скорости и проводимости среды в различных устройствах меняются в весьма широких пределах, решение этой системы уравнений в общем виде представляет значительные сложности.

11.4.2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР

МГД-генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 11.12, представляет собой канал К с двумя стенками из электроизоляционного материала; две другие стенки Э изготовлены из электропроводящего материала и служат электродами. Если по каналу в направлении, указанном стрелкой, со скоростью $\vec{v}$ пропустить электропроводящую среду (жидкую или газообразную), а перпендикулярно изоляторным стенкам приложить МП с индукцией $\vec{B}$, то в движущейся среде будет индуктироваться ЭП напряженностью $\vec{E}=[\vec{v}\vec{B}]$, перпендикулярное направлению движения и направлению приложенного МП (правило правой руки). Это индуктированное ЭП определяет ЭДС МГД генератора, снимаемую с электродов Э.

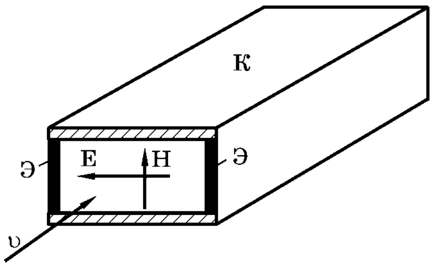


Рис. 11.12
Принципиальная схема МГД-генератора

Если в качестве рабочего тела в канале МГД-генератора используется газообразная среда, то на ее движение и нагрев до электропроводного состояния затрачивается тепловая энергия, которая затем в генераторе преобразуется в электрическую. Работа генератора на нагрузку связана с появлением силы на единицу объема $\vec{F}=[\vec{\delta}\vec{B}]$, направленной против движения рабочей среды. Увеличение нагрузки генератора сопровождается уменьшением скорости рабочего тела в канале. МП, необходимое для работы МГД-генератора, так же как и в обычных индуктивных генераторах, сохраняет свою энергию неизменной: в электрическую энергию она не преобразуется.

11.4.3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ДВИГАТЕЛЬ

МГД-генератор обратим, т. е. при подаче напряжения постороннего источника на Э в проводящей среде возникает ЭП. Оно взаимодействует с МП, созданным системой возбуждения. Возникает сила, которая перемещает электропроводящую среду. Машина работает в двигательном режиме.

В таких устройствах возможно как преобразование энергии движущейся электропроводящей среды при наличии постоянного МП в постоянное ЭП, так и перемещение проводящей электрический ток среды в скрещенных постоянных МП и ЭП. Аналогичный эффект наблюдается и в случае использования такого принципа преобразования энергий и при приложении переменных МП. Так, для перекачки жидкого металла применяются насосы трехфазного тока. В них аналогично вращающемуся МП (в обычных ЭМ) создается бегущее МП, увлекающее за собой металл. Подобные машины могут быть использованы и в генераторном режиме.

Аналогично МГД-машинам возможно создание электрогидродинамических машин, основанных на движении не проводящих электрический ток сред в ЭП.

11.5. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ СРЕДАХ

11.5.1. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

Задача 11.1. Источник заряженных частиц создает пучок, в котором все частицы с зарядом q и массой m имеют одно и то же направление скорости: вдоль оси x (рис. 11.13). При движении частицы попадают в зазор постоянного магнита, в котором создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, которое направлено перпендикулярно движению частиц за плоскость чертежа.

Требуется определить:

1) при каких наибольших скоростях $v_{\max}$ заряженные частицы еще отражаются от «магнитной стенки»;

2) зависит ли условие отражения от знака заряда;

3) на какой угол изменится траектория заряженных частиц, движущихся со скоростями $v = 10v_{\max}$ после пролета «магнитной стенки»?

Решение.

1. Заряженные частицы в однородном магнитном поле будут двигаться по окружностям (рис. 11.14), радиусы которых определяются условием равенства центростремительной силы и силы Лоренца:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

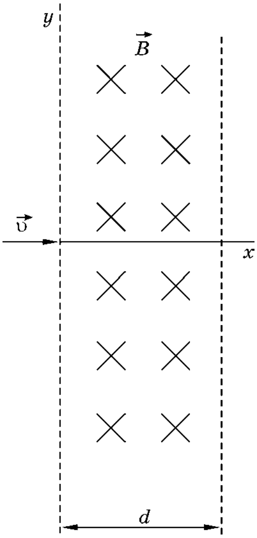


Рис. 11.13
Пучок заряженных частиц в поперечном МП

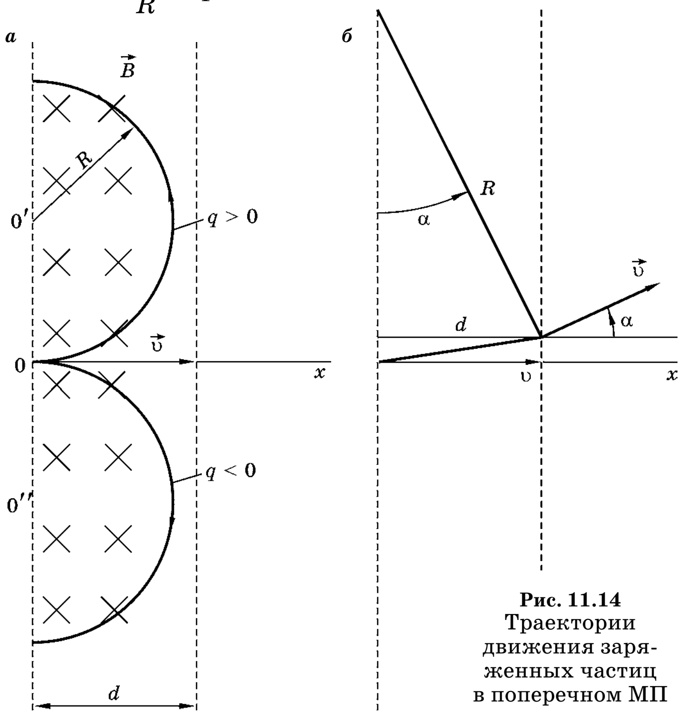


Рис. 11.14
Траектории движения заряженных частиц в поперечном МП

Следовательно, $R = (mv/qB)$. Центры окружности O' для $q > 0$ и O'' для $q < 0$ лежат на оси y. Условие отражения выполняется, если $R < d$, т. е. при $v = v_{\max} < (qBd/m)$.

2. Условие отражения не зависит от знака заряда (см. рис. 11.14*а*).

3. Если $v = 10v_{\max}$, то $R = 10d$. Угол отклонения (рис. 11.14*б*) после пролета частицей «магнитной стенки» можно определить из выражения: $\alpha = \arcsin(d/R) \approx 0{,}1$ рад, так как $\sin\alpha \approx \alpha$ при малых α.

З а д а ч а 11.2. В однородном МП с индукцией $\vec{B}$ в точке O помещен источник, испускающий одинаковые частицы с зарядом q и массой m. Источник испускает частицы под углом α к направлению силовых линий (рис. 11.15).

Требуется:

1) определить траекторию движения частиц;

2) показать, что при малых углах α магнитное поле обладает фокусирующим действием;

3) определить, будет ли движение частиц при $\alpha = 0$ устойчивым.

Р е ш е н и е.

1. Движение заряженных частиц можно представить как суперпозицию двух независимых движений: равномерного перемещения вдоль силовых линий МП со скоростью $v_{\text{пер}} = v\cos\alpha$ и равномерного вращения по окружности радиуса $R = (qv_{\text{вр}}/mB)$ вокруг силовой линии, где $v_{\text{вр}} = v\sin\alpha$. В совокупности оба движения приводят к перемещению частиц по винтовым линиям. Так как время одного оборота частицы (период ее вращения) $T = (2\pi R/v_{\text{вр}}) = (2\pi m/qB)$, шаг винтовой линии $l = v_{\text{вр}}T = (2\pi m/qB)v\cos\alpha$.

2. При малых α $\cos\alpha \approx 1 - (\alpha^2/2)$ и, следовательно, все частицы с одинаковыми q/m и v, испущенные из точки O под малыми углами α к силовым линиям, соберутся на той же линии на расстоянии $l_0 \approx (2\pi m/qB)v$ (разброс порядка $\alpha^2/2$).

3. При $\alpha = 0$ разброс траекторий отсутствует, а значит, движение устойчиво.

З а д а ч а 11.3. Для определения массы m заряженных частиц используется трохотрон (один из типов масс-спектрометров), названный так потому, что в нем частицы под действием взаимно перпендикулярных однородных

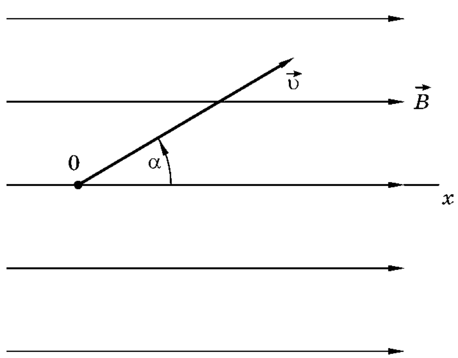


Рис. 11.15
Источник, испускающий заряженные частицы в присутствии МП

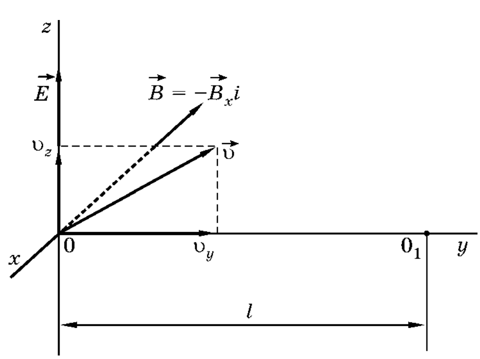


Рис. 11.16
Пучок заряженных частиц в присутствии скрещенных ЭП и МП

электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{B}$) полей движутся по трохоидальным траекториям.

Требуется:

1) показать, что пучок с одинаковым отношением q/m при любых значениях начальной скорости $\vec{v}$, вектор которой лежит в плоскости yOz (рис. 11.16), под действием скрещенных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ вновь пересечет ось y в точке O_1;

2) найти зависимость фокусного расстояния l от величины E, B и q/m;

3) определить, зависит ли фокусное действие скрещенных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ от знака заряда.

Р е ш е н и е.

1. Уравнение движения частицы в скрещенных полях $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}])$$

в данном случае разбивается на два уравнения:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = qB\frac{dz}{dt}; \tag{11.60}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = qE - qB\frac{dy}{dt}. \tag{11.61}$$

Перейдя к системе координат, движущейся в направлении оси y с постоянной скоростью $v = E/B$, т. е. введя новую переменную $y_1 = y - vt$, из выражений (13.60) и (13.61) получим

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = (qB/m)\frac{dz}{dt}; \tag{11.62}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(qB/m)\frac{dy_1}{dt}. \tag{11.63}$$

В уравнениях (11.62) и (11.63) отсутствует $\vec{E}$. Это означает, что в движущейся системе координат на частицу оказывает воздействие только однородное МП, под действием которого в системе координат y_1, z она будет двигаться по окружности. Результирующее движение частицы есть наложение вращения в плоскости yOz и поступательного (дрейфового) движения со скоростью $v = E/B$ вдоль оси y. Через время T, равное одному обороту (периоду вращения), частица пройдет вдоль оси y расстояние $l = vT$ и вновь пересечет ось y.

2. Так как скорость дрейфа $v = E/B$ и период $T = 2\pi m/qB$ (см. задачу 11.2) не зависят от начальной скорости, все частицы с одинаковым отношением q/m попадут в точку O_1, отстоящую от начала координат на расстояние $l = 2\pi mE/qB^2$.

3. Направление дрейфа частиц при $q > 0$ и $q < 0$ одно и то же, так как с изменением знака заряда меняется и направление действия электрической силы.

З а д а ч а 11.4. В некоторой области пространства создано аксиально симметричное нарастающее во времени МП с индукцией $\vec{B}(t)$, которое индуцирует вихревое ЭП с напряженностью $\vec{E}(t)$ (см. рис. 11.17). Считая, что в момент начала возбуждения поля электрон в точке A находился в состоянии покоя, найти условие его движения по круговой орбите со скоростью $v \ll c$.

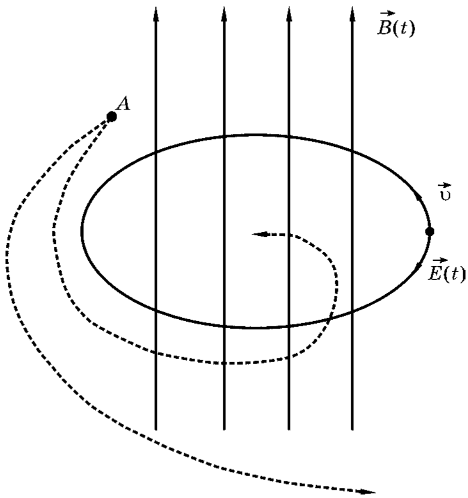


Рис. 11.17
Вихревое ЭП

Р е ш е н и е.

Характер траектории зависит от соотношения между электрическими и магнитными силами. Если силовое действие МП в зоне движения электрона мало по сравнению с действием ЭП, то вихревое поле $\vec{E}$ заставляет электрон двигаться по раскручивающейся спирали. В противоположном случае электрон будет двигаться по сжимающейся спирали к центру. Следовательно, при определенных соотношениях между $\vec{E}$ и $\vec{B}$ возможно движение по окружности. Допустим, что эти соотношения выполняются. Тогда при круговом движении

$$mv^2/R = qvB,\ mv/R = qBR, \quad (11.64)$$

где R — радиус окружности.

При движении электрона по окружности изменение импульса обусловлено электрическими силами:

$$\frac{d(mv)}{dt} = -qE,$$

где $E = -\frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{d\Phi}{dt}$, отсюда $mdv = (q/2\pi R)d\Phi$ и, следовательно,

$$mv(t) = \frac{q}{2\pi R}\Phi(t). \quad (11.65)$$

По условию начальная скорость $v(0) = 0$ и поток $\Phi(0) = 0$. Используя уравнение (11.64), получим

$$B(t) = \frac{\Phi(t)}{2\pi R^2} = 0{,}5\, B_{\text{ср}}(t),$$

где $B_{\text{ср}}(t) = \Phi(t)/\pi R^2$ — среднее значение.

Последнее условие означает, что электрон может вращаться по круговой орбите, если поле $B(t)$ на орбите в два раза меньше среднего поля внутри нее.

11.5.2. ДВИЖЕНИЕ СПЛОШНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

З а д а ч а 11.5. Медный тонкий лист поступательно движется со скоростью $\vec{v}$ ($v \ll c$) в перпендикулярно направленном однородном магнитном поле $\vec{B}$ (рис. 11.18).

Требуется:

1) найти плотность индуцированного заряда на поверхности и индуцированное ЭП;

2) определить показания вольтметра, присоединенного через щетки к боковым поверхностям листа, считая $d \ll l$ и сопротивление вольтметра $R_v \to \infty$;

3) определить, изменятся ли показания вольтметра, если движущийся лист выполнен из магнитного материала с μ_r — const?

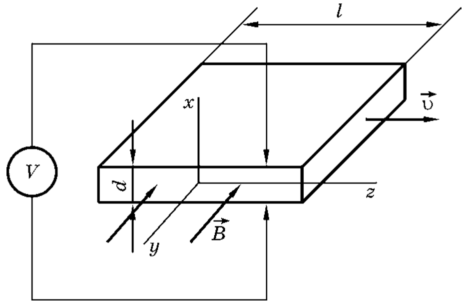


Рис. 11.18
Перемещение металлического листа в МП

Р е ш е н и е.

1. При движении листа индуцируется стороннее поле $\vec{E}_{cm} = [\vec{v}\vec{B}_0]$, направленное по оси x. Под действием $\vec{E}_{cm}$ в проводящем листе должен протекать ток плотностью $\vec{J} = \gamma(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}_0])$. Так как цепь не замкнута ($Rv \to \infty$), $\vec{J} = 0$ и, следовательно, $\vec{E} = -[\vec{v}\vec{B}_0]$. Эта напряженность обусловлена появлением поверхностных зарядов плотностью $\sigma = \varepsilon_0 E$ (на верхней плоскости $+\sigma$, на нижней $-\sigma$).

2. Составим циркуляцию $\vec{E}$ по контуру с вольтметром. Поток через контур не меняется, поэтому $\oint \vec{E}dl = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial l} = 0$. Отсюда $Exd + Uv = 0$; $Uv = vB0d$.

3. Показания вольтметра U_v не меняются. Действительно, $\oint \vec{E}d\vec{l} \neq 0$, так как поток через контур уменьшается со скоростью v: $-\partial\Phi/\partial t = (B - \mu_0 H)vd$, где $B = \mu_0 H$. Следовательно, $U_v = -E_x d + \partial\Phi/\partial t = Bvd - Bvd + B_0 vd = B_0 vd$.

З а д а ч а 13.6. В плоском канале шириной d вдоль оси z (рис. 11.19) движется в поперечном МП с плотностью $\vec{B}$ вязкая несжимаемая проводящая жидкость.

Требуется найти распределение скоростей по сечению канала, считая течение жидкости установившимся. Краевыми эффектами пренебречь.

Р е ш е н и е.

При движении жидкости во внешнем МП с плотностью B_x индуцируются токи плотностью J_y. В свою очередь индуцированные токи создают собственное

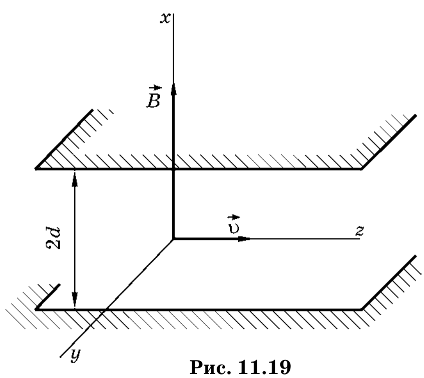


Рис. 11.19
Движение несжимаемой проводящей жидкости в плоском канале в поперечном МП

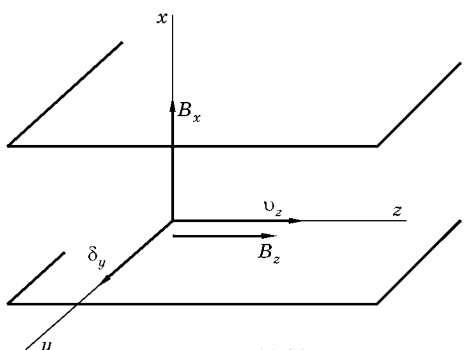


Рис. 11.20
Токи и магнитное поле, индуцируемые при движении несжимаемой жидкости в поперечном МП

МП B_z (см. рис. 11.20). Поле B_z создает объемные силы, которые уравновешиваются поперечным к потоку градиентом давления ($-\partial p/\partial z$). В силу стационарности течения $\partial p/\partial z$ — const.

Из уравнения движения $\nabla p = [\vec{J}\vec{B}] + \eta \nabla^2 \vec{v}$ получим

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -J_y B_x + \eta \frac{d^2 v_z}{dx^2}.$$

По закону Ома $J_y = \gamma(E_y + v_z B_x)$, где E_y — const, так как $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. Отсюда

$$\eta \frac{d^2 v_z}{dx^2} - \gamma B_x^2 v_z = \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma E_y B_x = -\gamma B_x^2 v_0,$$

где $v_0 = v_z\big|_{x=0}$.

С учетом граничных условий ($v = 0$; $B_z = 0$) при $x = \pm d$ найдем

$$v_z(x) = v_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(d_0/d)x}{\operatorname{ch} d_0}\right),$$

где $d_0 = dB_x\sqrt{\gamma/\eta}$.

11.5.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИНДУКТОРА

З а д а ч а 11.7. Рассмотрим бесконечно длинный цилиндрический индуктор [11.7] с полостью, образованной двумя магнитопроводами: внешним с внутренним радиусом r_1 и внутренним с внешним радиусом r_2 (рис. 11.21). Сделаем допущения, указанные ниже.

1. Длина индуктора в направлении оси z в обе стороны бесконечно велика, т. е. продольные краевые эффекты отсутствуют.
2. Поверхности магнитопроводов не имеют пазов и зубцов.
3. Магнитная проницаемость магнитопроводов $\mu_c = \infty$, а электрическая проводимость $\gamma_c = 0$.
4. Обмотки расположены на поверхностях магнитопроводов, их радиальные размеры бесконечно малы, и они несут токи, которые замыкаются по

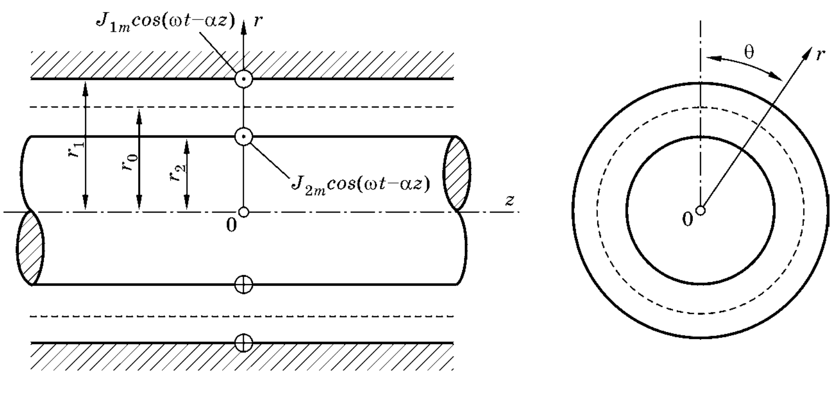


Рис. 11.21
Эскиз индуктора цилиндрической индукционной МГД-машины

кольцевым нитям с $r = r_1$ и $r = r_2$, причем в направлении оси z распределение токов представляет собой синусоидальную волну с полюсным делением τ.

Выберем правовинтовую цилиндрическую систему координат R, θ, z (на рисунке). Линейные плотности токов внешней J_1 и внутренней J_2 обмотки будут

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= J_{1m}\cos(\omega t) - \alpha z; \\ J_2 &= J_{2m}\cos(\omega t - \alpha z). \end{aligned}\right\} \tag{11.66}$$

Р е ш е н и е.

МП в областях, где протекают электрические токи, можно определять через скалярный магнитный потенциал $U_м$. В случае, показанном на рисунке, во всей области $r_2 \le r \le r_1$ величина $U_м$ определяется уравнением Лапласа, которое в цилиндрических координатах имеет вид (в силу круговой симметрии $U_м$ не зависит от координаты θ)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_м}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U_м}{\partial z^2} = 0. \tag{11.67}$$

При принятых допущениях поле вдоль оси z изменяется синусоидально и представляет собой бегущую волну. Поэтому можно положить (точки над комплексными величинами опускаем)

$$U_м = \mathrm{Re}\left[U_{м\,m} e^{j(\omega t - \alpha z)}\right], \tag{11.68}$$

где $U_{мm}$ — амплитуда магнитного потенциала; $\alpha = \pi/\tau$, $j = \sqrt{-1}$.

При подстановке $U_м$ из (11.68) в (11.67) получим уравнение для $U_{мm}$:

$$\frac{\partial^2 U_{м\,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{м\,m}}{\partial r} - \alpha^2 U_{м\,m} = 0.$$

Решением этого уравнения будет [11.12]

$$U_{мm} = C_1 I_0(\alpha r) + C_2 K_0(\alpha r), \tag{11.69}$$

где $I_0(\alpha r)$; $K_0(\alpha r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка соответственно первого и второго рода от аргумента αr; C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Для определения C_1 и C_2 используем существующие физические граничные условия поля на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$. Согласно этим условиям касательные составляющие $\vec{H}$ на этих поверхностях равны линейным плотностям токов на этих поверхностях. Поэтому

$$\begin{aligned} H_{z1} &= +J_{1m}\cos(\omega t - \alpha z); \\ H_{z2} &= +J_{2m}\cos(\omega t - \alpha z) \end{aligned}$$

или, в комплексной форме,

$$H_{z1} = +J_{1m} e^{j(\omega t - \alpha z)};\ H_{z2} = -J_{2m} e^{j(\omega t - \alpha z)}. \tag{11.70}$$

С другой стороны, $\vec{H} = -\mathrm{grad}\,U_м$, поэтому

$$H_r = -\frac{\partial U_м}{\partial r};\ H_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_м}{\partial \theta};\ H_z = -\frac{\partial U_м}{\partial z}. \tag{11.71}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial U_м}{\partial z}\bigg|_{r=r_1} = -J_{1m}e^{j(\omega t-\alpha z)};$$
$$\frac{\partial U_м}{\partial z}\bigg|_{r=r_2} = +J_{2m}e^{j(\omega t-\alpha z)}.$$

Подставив сюда значения $U_м$ из (11.68) и (11.69), получим для определения C_1 и C_2 уравнения

$$-j\alpha(C_1 I_{01} + C_2 K_{01}) = -J_{1m};$$
$$-j\alpha(C_1 I_{02} + C_2 K_{02}) = -J_{2m},$$

причем здесь и ниже для краткости обозначим $I_{01} = I_0(\alpha r_1)$; $I_{02} = I_0(\alpha r_2)$; $K_{01} = K_0(\alpha r_1)$; $K_{02} = K_0(\alpha r_2)$.

Из этих уравнений получим

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= +\frac{J_{1m}K_{02} + J_{2m}K_{01}}{j\alpha(I_{01}K_{02} - I_{02}K_{01})};\\ C_2 &= -\frac{J_{1m}I_{02} + J_{2m}I_{01}}{j\alpha(I_{01}K_{02} - I_{02}K_{01})}.\end{aligned}\right\} \quad (11.72)$$

Таким образом, потенциал $U_м$ определен и задачу можно считать решенной. Можно найти дополнительно величину магнитодвижущей силы (МДС) на один полюс или на один зазор. Намагничивающая сила равна разности значений $U_м$ на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$:

$$F = U_{мm}\Big|_{r=r_1} - U_{мm}\Big|_{r=r_2}.$$

После использования равенств (11.69) и (11.72) получим

$$F = -\frac{j(J_{1m} + J_{2m})}{\alpha}.$$

На основании этого равенства модуль амплитуды намагничивающей силы

$$F = \frac{\tau}{\pi}(J_{1m} + J_{2m}). \quad (11.73)$$

Справедливость равенства (11.73) вытекает также из простых физических представлений, поскольку величина намагничивающей силы на два полюса равна интегралу линейной токовой нагрузки на протяжении полюсного деления.

Индуктор с односторонней обмоткой. Когда обмотка расположена только на внешнем магнитопроводе, следует положить $J_{1m} = J_m$; $J_{2m} = 0$. Тогда на основании (11.69) и (11.72)

$$U_{мm} = -\frac{jJ_m}{\alpha}\frac{K_{02}I_0(\alpha r) - I_{02}K_0(\alpha r)}{I_{01}K_{02} - I_{02}K_{01}}, \quad (11.74)$$

и амплитуда МДС согласно (11.73)

$$F = \frac{\tau}{\pi}J_m. \quad (11.75)$$

На основании (11.74) при $r = r_2$ имеем $U_{м\,m} = 0$. При дальнейших операциях учтем, что [11.16]

$$\frac{d}{dr} I_0(\alpha r) = \alpha I_1(\alpha r);$$

$$\frac{d}{dr} K_0(\alpha r) = -\alpha K_1(\alpha r),$$

где $I_1(\alpha r)$, $K_1(\alpha r)$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка. Тогда на основании (11.68), (11.71) и (11.74) амплитуды магнитной индукции

$$B_r = j\mu_0 J_m \frac{K_{02} I_1(\alpha r) + I_{02} K_1(\alpha r)}{I_{01} K_{02} - I_{02} K_{01}};$$

$$B_z = \mu_0 J_m \frac{K_{02} I_1(\alpha r) - I_{02} K_0(\alpha r)}{I_{01} K_{02} - I_{02} K_{01}}. \qquad (11.76)$$

Из (11.76) на поверхности $r = r_1$

$$B_{z1} = B_1 = B_z\big|_{r=r_1} = \mu_0 J_m, \qquad (11.77)$$

что соответствует элементарным физическим представлениям.

При анализе режимов работы электрической машины интерес представляет величина B_r на поверхности внешнего магнитопровода: $B_{r1} = B_r\big|_{r=r_1} = B_0$, которую можно принять за исходную расчетную величину, и величина B_r в средней части слоя жидкого металла, при $r = r_0$ (см. рис. 11.21): $B_\Delta = B_r\big|_{r=r_0}$.

Введем также дополнительно следующие сокращенные обозначения:

$$I_{11} = I_1(\alpha r_1);\ I_{12} = I_1(\alpha r_2);\ I_{10} = I_1(\alpha r_0);$$
$$K_{11} = K_1(\alpha r_1);\ K_{12} = K_1(\alpha r_2);\ K_{10} = K_1(\alpha r_0);$$
$$a = I_{01} K_{10} + K_{01} I_{10};\ b = I_{02} K_{10} + K_{02} I_{10};$$
$$c = I_{01} K_{02} - K_{01} I_{02};\ \ d = I_{02} K_{11} + K_{02} I_{11};\ \ e = I_{01} K_{12} + K_{01} I_{12}.$$

С учетом этих обозначений на основании (11.76) получим

$$B_0 = \frac{\mu_0 J_m d}{c};\ B_\Delta = \frac{\mu_0 J_m b}{c}. \qquad (11.78)$$

Согласно равенствам (11.78) коэффициент ослабления радиальной составляющей индукции в средней части слоя жидкого металла

$$k_\Pi = \frac{B_0}{B_\Delta} = \frac{d}{b}. \qquad (11.79)$$

Амплитуду МДС целесообразно выразить через B_Δ и величину зазора $\delta = r_1 - r_2$. Тогда на основании (11.75) и (11.79)

$$F = \frac{\delta k''_\delta B_\Delta}{\mu_0}, \qquad (11.80)$$

где

$$k''_\delta = \frac{\tau}{\pi\delta}\frac{c}{b}. \qquad (11.81)$$

Для упрощения можно принять $r_0 = 0{,}5(r_1 + r_2)$ и тогда получим кривые k_Π и k''_δ [11.7], изображенные на рис. 11.22, 11.23. На рис. 11.22 прерывистой линией для сравнения изображена кривая k_Π для плоского индуктора

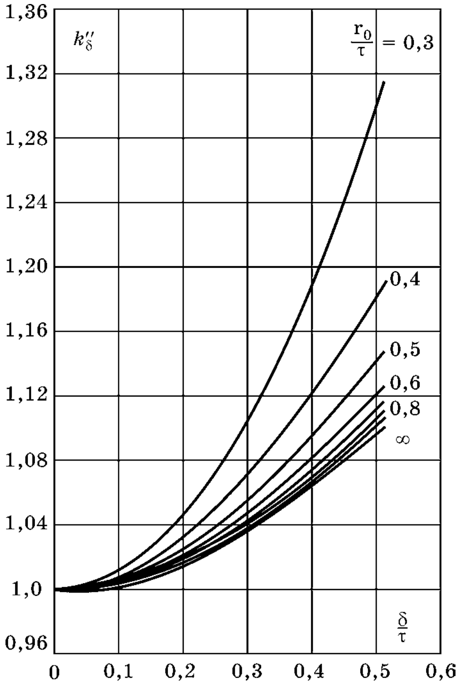


Рис. 11.22
Кривые коэффициента k_Π
цилиндрического индуктора

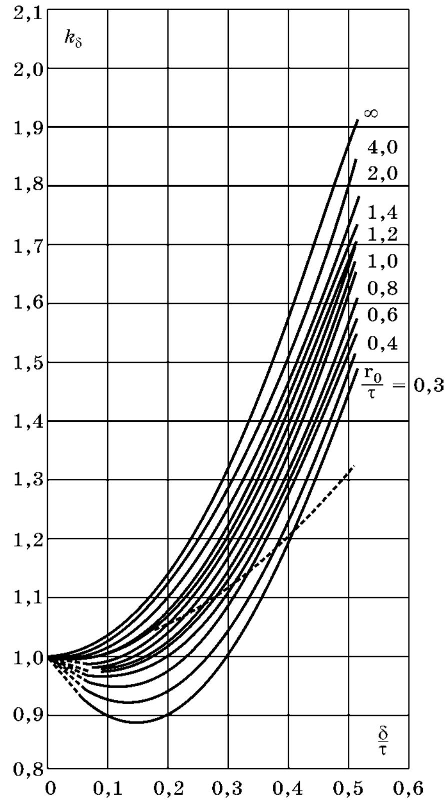


Рис. 11.23
Кривые коэффициента k''_δ
цилиндрического индуктора

с двухсторонней обмоткой. Для индуктора с односторонней обмоткой действительны кривые на рис. 11.22 и 11.23 при $r_0/\tau = \infty$.

Индуктор без внутреннего магнитопровода. Выражения для этого случая получим, если положим $r_2 = 0$ и соответственно этому $I_{02} = 0$ и $K_{02} = \infty$. Тогда на основании (11.76)

$$B_r = j\mu_0 J_m \frac{I_1(\alpha r)}{I_{01}};\ B_z = \mu_0 J_m \frac{I_0(\alpha r)}{I_{01}}. \tag{11.82}$$

Контрольные вопросы

1. Назовите основные электротехнические устройства, которые используют при работе перемещение ЭМП в пространстве?
2. Какие основные уравнения содержит аналитическая модель такого технического устройства?
3. Расскажите о принципе действия МГД-преобразователей энергии.
4. Какие вы можете назвать перспективные области использования МГД-преобразователей энергии?
5. Расскажите о принципе действия униполярных преобразователей энергии.
6. Расскажите о принципе действия линейных синхронных двигателей и области их перспективного использования.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

12

ГЛАВА 12

РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ, ИНДУКТИВНОСТЕЙ И ЕМКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

12.1. ПОНЯТИЕ О СОПРОТИВЛЕНИИ И ИНДУКТИВНОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТОКОВ

При рассмотрении электрических цепей мы имеем дело с проводниками, поперечные размеры которых малы по сравнению с их длиной.

Пространственное расположение геометрически линейного проводника определяет однозначно направление вектора плотности тока. Для системы таких проводников уравнения поля записываются просто, а протекающие электромагнитные процессы однозначно характеризуются напряжением, током в проводнике, омическим сопротивлением и индуктивностью. Зная сопротивление R, можно весьма просто подсчитать мощность джоулевых потерь Ri^2 и падение напряжения Ri, а по известной индуктивности — энергию магнитного контура $0{,}5Li^2$ и падение напряжения в нем — Ldi/dt.

При решении задач, связанных с электродинамикой, должно быть найдено пространственное распределение электрической и магнитной напряженностей $(\vec{E}, \vec{H})$, электрической и магнитной индукций ЭМП $(\vec{D}, \vec{B})$, а также плотность пространственного тока $(\vec{\delta})$. Если эти величины известны, то можно ответить на все возникающие вопросы. Так, мощность джоулевых потерь в заданном объеме выражается интегралом

$$P_w = \int_V \frac{\delta^2}{\gamma} dv, \tag{12.1}$$

запасенная в том же объеме энергия МП находится по формуле

$$W_м = 0{,}5 \int_V \vec{H}\vec{B} dv. \tag{12.2}$$

12.2. РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

12.2.1. ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ ИНДУКТИВНЫХ КАТУШЕК

При решении теоретических и инженерных задач в электротехнике часто приходится интересоваться магнитными потоками, сцепляющимися с контурами, по которым протекает электрический ток. Такие потоки принято называть потокосцеплениями, а обозначают их буквой Ψ. Потокосцепление совпадает с магнитным потоком по размерности и также измеряется в веберах (Вб).

Рассмотрим потокосцепление контура с электрическим током, выполненного из достаточно тонкого проводника, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с другими размерами контура, так что ими можно пренебречь. При этом реальный электрический контур в первом приближении можно принять за идеальный математический контур, а его потокосцепление — за магнитный поток, проходящий сквозь поверхность, мысленно натянутую на этот контур:

$$\Psi = \Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s} = \int_s B_n ds,$$

где B_n — нормальная составляющая индукции к элементу поверхности ds.

В данном случае этот поток мы вычисляем весьма приближенно, поэтому от интегрирования можно перейти к сумме конечного числа слагаемых:

$$\Psi = \sum_i B_{ni} \Delta s_i = \sum_i \Delta\Phi_i,$$

если разбить всю поверхность s контура на мелкие, но конечные по площади участки Δs. При этом каждое слагаемое $B_{ni}\Delta s_i$ будет представлять собой магнитный поток $\Delta\Phi_i$ сквозь участок поверхности Δs_i. Такой прием вычисления потокосцеплений, удобный при простых контурах, представляет известные неудобства в весьма важном для практики случае, когда электрическими контурами являются обмотки индуктивных катушек. Поверхность таких контуров представляет весьма сложную винтовую поверхность (рис. 12.1). Подсчет магнитного потока, проходящего сквозь нее, удобнее вести другим приближенным приемом.

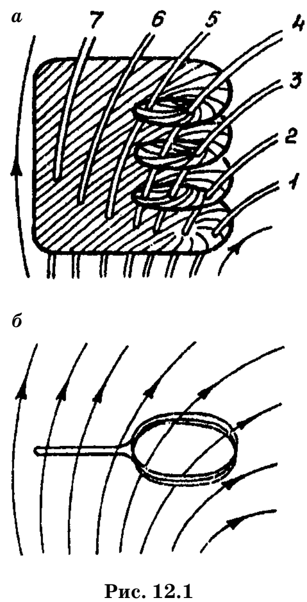


Рис. 12.1
Потокосцепление катушки с винтовой поверхностью

Разобьем МП в области контура на множество достаточно мелких магнитных трубок с потоками $\Delta\Phi_k$ и проследим, сколько раз каждая такая трубка пересекает поверхность контура. Так, например, магнитные трубки 1, 6, 7 пересекают эту поверхность всего один раз, трубки 2 и 5 — два

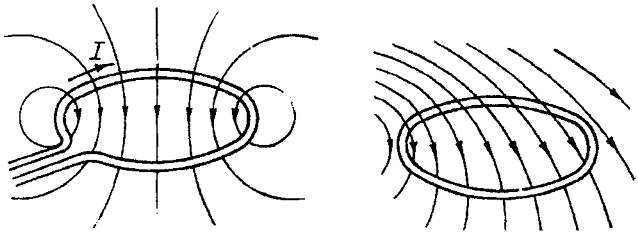


Рис. 12.2
Представление многовитковой катушки в виде одного витка

раза, а каждая из трубок 3 и 4 — три раза. Очевидно, что при таком подходе потокосцепление рассматриваемого контура, т. е. полный магнитный поток сквозь всю поверхность контура можно представить суммой $\Psi = n_k \Delta\Phi_k$, где n_k — число пересечений поверхности контура k-й магнитной трубкой или, иначе говоря, число витков, с которыми сцепляется данная трубка.

На практике нередко приходится встречаться со случаем, когда отдельные витки индуктивной катушки плотно прижаты друг к другу (рис. 12.2). Тогда потокосцепление сквозь поверхность s можно представить как увеличенный в w раз магнитный поток Ф сквозь площадь одного витка:

$$\Psi = w\Phi.$$

Это весьма важное при практических расчетах выражение для потокосцепления обмотки справедливо и тогда, когда витки обмотки, даже не будучи плотно прижаты друг к другу, наложены на магнитопровод из материала с высокой магнитной проницаемостью, так как здесь магнитный поток Ф, замыкающийся по магнитопроводу, также целиком сцепляется с каждым витком обмотки.

Если потокосцепление электрического контура обусловлено МП, созданным током, протекающим по этому же контуру, то такое потокосцепление называют потокосцеплением самоиндукции и к его обозначению добавляют индекс L (Ψ_L). Если же МП, определяющее потокосцепление данного электрического контура, вызвано токами, протекающими в каких-либо других контурах, то говорят о потокосцеплении взаимоиндукции, которое обозначают индексом M (Ψ_M).

12.2.2. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Если МП какого-либо электрического контура существует в среде с неизменным значением ее магнитной проницаемости, то потокосцепление Ψ_L самоиндукции этого контура пропорционально току контура: $\Psi_L = Li$.

Коэффициент пропорциональности L в этом выражении называют собственной индуктивностью контура.

Таким образом, собственную индуктивность, обычно называемую просто индуктивностью, определяют как отношение потокосцепления самоиндукции контура к току, протекающему по этому контуру

$$L = \frac{\Psi_L}{i}. \qquad (12.3)$$

Она измеряется в единицах, называемых генри (Гн).

Анализируя выражение (12.3), нетрудно убедиться, что индуктивность контура зависит от магнитных свойств сред, в которых существует МП этих контуров, а также от их формы и размеров:

$$L = f(\mu_i, g_j),\ i \in [1, k],\ j \in [1, n]. \tag{12.4}$$

В простейшем случае, если МП контура расположено в однородной среде, то его индуктивность будет пропорциональна магнитной проницаемости μ этой среды:

$$L = \mu f(g_j). \tag{12.5}$$

Действительно, потокосцепление контура определяется площадью поверхности, мысленно натянутой на контур, и магнитной индукцией МП в точках этой поверхности. Индукция же, в свою очередь, зависящая от размеров и конфигурации контура, пропорциональна магнитной проницаемости среды в соответствующих точках пространства и току в контуре, создающему это поле.

Важно подчеркнуть при этом, что в случае контуров, МП которых расположено в средах с постоянными магнитными проницаемостями, индуктивность не будет зависеть от тока в этих контурах и при неизменных конструктивных параметрах контуров будет также постоянна.

Индуктивность катушки с магнитопроводом. Представим себе индуктивную катушку с замкнутым магнитопроводом из материала с постоянной магнитной проницаемостью μ (рис. 12.3). Пренебрегая рассеянием, потокосцепление самоиндукции Ψ_L такой катушки соответствует выражению

$$\Psi_L = w\Phi, \tag{12.6}$$

а индуктивность L определим в виде

$$L = \frac{w\Phi}{i}. \tag{12.7}$$

Представим магнитный поток Φ с помощью закона для замкнутой магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{wi}{R_M}, \tag{12.8}$$

где R_M — магнитное сопротивление магнитопровода.

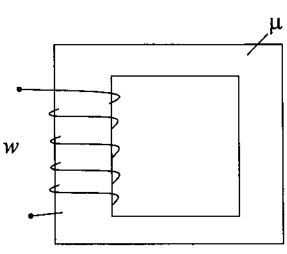


Рис. 12.3
Катушка с замкнутым магнитопроводом

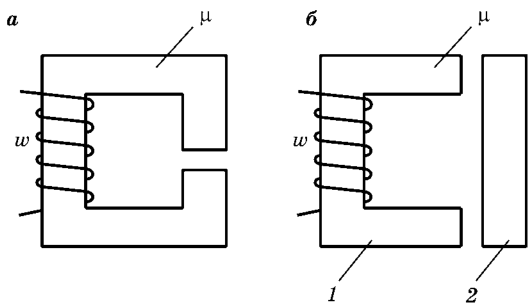


Рис. 12.4
Катушка с разомкнутым магнитопроводом

Для индуктивности катушки окончательно получим

$$L = \frac{w^2}{R_M}. \qquad (12.9)$$

Если в магнитопроводе рассмотренной выше катушки создать воздушный зазор (см. рис. 12.4*а*), то сопротивление R_M магнитной цепи увеличится, а индуктивность катушки, как следует из (12.9), уменьшится.

Выполняя магнитопровод индуктивной катушки из двух отдельных частей: ярма 1 и якоря 2 (рис. 12.4*б*), воздушные зазоры между которыми путем перемещения якоря можно по желанию менять, получим индуктивную катушку с переменной индуктивностью, широко используемую, например, в сварочных установках.

12.2.3. ИНДУКТИВНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Электрические линии. Независимо от того, служат ли они для передачи больших энергий или предназначены для целей связи, представляют собой в совокупности с соединяемыми ими источниками и приемниками замкнутые контуры, которые можно характеризовать определенной индуктивностью.

По конструктивному признаку и характеру создаваемого МП электрические линии принято делить на двухпроводные и коаксиальные.

Двухпроводная линия. Она представляет собой два одинаковых прямых провода, обычно круглого сечения, укрепленных параллельно друг другу на некотором расстоянии d (рис. 12.5).

МП двухпроводной линии относится к группе плоскопараллельных МП, так как во всех сечениях линии, за исключением коротких участков у ее концов, картина МП одинакова и представляет собой совокупность магнитных линий, лежащих в плоскостях, перпендикулярных осям проводов. Поэтому для изучения поля двухпроводной линии достаточно рассмотреть это поле только в одной из таких плоскостей.

Поле двухпроводной линии, которое можно рассматривать как результат наложения МП двух ее проводов с равными по величине и противоположными по направлению токами, при круглом сечении проводов, несмотря

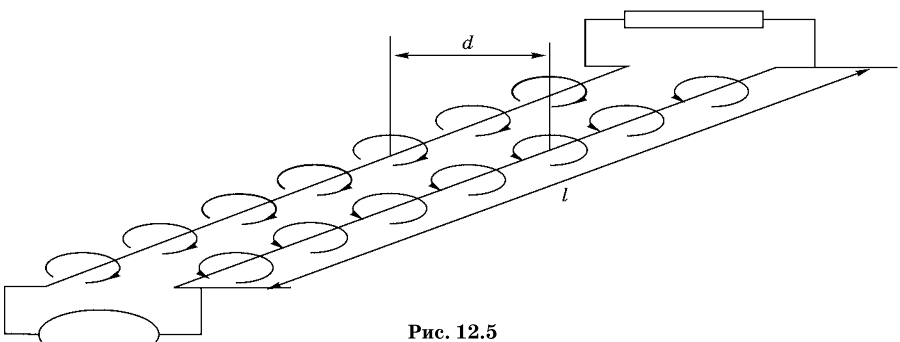


Рис. 12.5
Двухпроводная линия с током

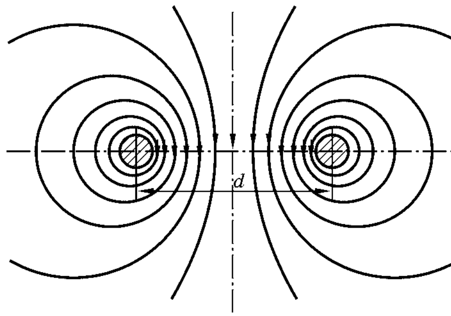


Рис. 12.6
Поперечное сечение
двухпроводной линии с током

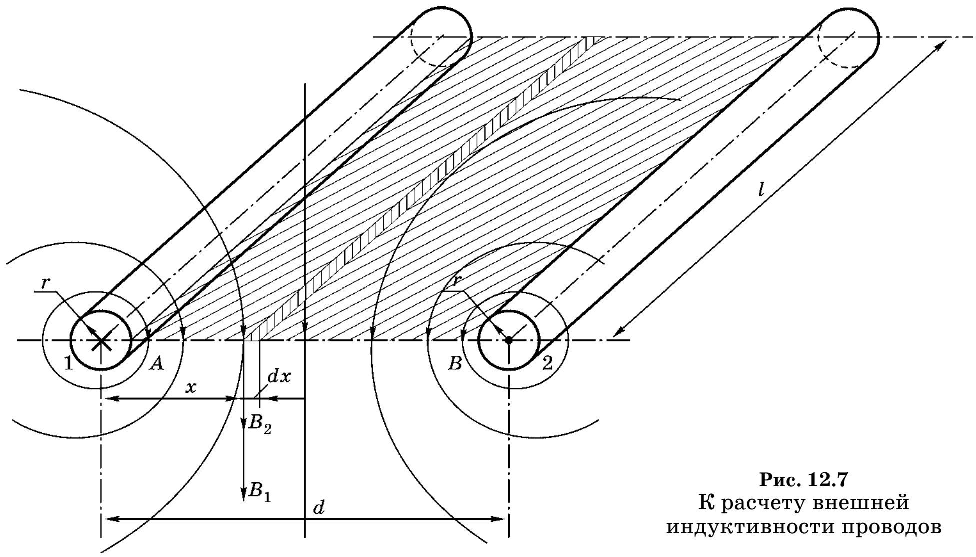


Рис. 12.7
К расчету внешней
индуктивности проводов

на довольно сложную конфигурацию, поддается точному расчету. Оно изображается совокупностью магнитных линий, имеющих форму окружностей с центрами на прямой линии, соединяющей оси проводов (рис. 12.6). МП принято делить на ее внешнее поле, магнитные линии которого целиком замыкаются вне тел проводов, и внутреннее поле, линии которого проходят частично или полностью внутри проводов.

При расчете индуктивности L (12.9), точнее, при расчете потокосцепления Ψ_L, подразделить потокосцепление на внешнюю Ψ'_L и внутреннюю Ψ''_L части. Тогда

$$\Psi_L = \Psi'_L + \Psi''_L,$$

откуда

$$L = \frac{\Psi_L}{I} = \frac{\Psi'}{I} + \frac{\Psi''}{I} = L' + L'', \tag{12.10}$$

первая из которых называется внешней индуктивностью, а вторая — внутренней.

Для расчета внешнего потокосцепления Ψ'_L, т. е. потока Ф сквозь плоскость, проходящую через оси проводов (рис. 12.7), необходимо знать распределение магнитной индукции вдоль прямой, соединяющей оси проводов.

Пользуясь принципом наложения, представим магнитную индукцию в произвольной точке на упомянутой линии как сумму магнитных индукций поля от первого и второго проводов:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}, \qquad (12.11)$$

где x — расстояние точки от оси первого провода, $d - x$ — ее расстояние от оси второго провода.

Возможность замены геометрического суммирования векторов магнитной индукции арифметическим суммированием их величин объясняется тем, что на прямой, соединяющей оси проводов, векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ магнитных индукций отдельных полей проводов совпадают по направлению (рис. 12.7).

Принимая во внимание, что магнитная индукция в точках рассматриваемой плоскости зависит только от координаты x и не изменяется в направлении осей проводов, при вычислении магнитного потока $\Phi = \int\limits_s \vec{B}d\vec{s}$ сквозь эту плоскость ее целесообразно разбить на бесконечно узкие полоски шириной dx и простирающиеся вдоль осей проводов на всю длину l линии. Магнитный поток сквозь такую полоску (на рис. 12.7 она показана двойной штриховкой) будет $d\Phi = Bds = Bldx$, так как вектор $\vec{B}$ магнитной индукции перпендикулярен площадке ds.

Магнитный поток сквозь всю заштрихованную поверхность между проводами определится интегрированием элементарного потока $d\Phi$ по всей этой поверхности:

$$\Phi = \int\limits_r^{d-r} Bldx. \qquad (12.12)$$

Подставив в подынтегральную функцию полученное значение для магнитной индукции B (12.11) и выполняя интегрирование, получим

$$\begin{aligned}\Phi = \Psi'_L &= \int\limits_r^{d-r} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) ldx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\int\limits_r^{d-r}\frac{dx}{x} - \int\limits_r^{d-r}\frac{dx}{x-d}\right) = \\ &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left[\ln x\Big|_r^{d-r} - \ln(x-d)\Big|_r^{d-r}\right] = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{-r}{r-d}\right) = \\ &= \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\ln\frac{d-r}{r}\right)^2 = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-r}{r}.\end{aligned} \qquad (12.13)$$

Отсюда для внешней индуктивности двухпроводной линии имеем

$$L' = \frac{\Psi'_L}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-r}{r}. \qquad (12.14)$$

В случае, когда расстояние d между проводами линии много больше радиуса r их поперечного сечения ($d \gg r$), получим

$$L' \approx \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{r}. \qquad (12.15)$$

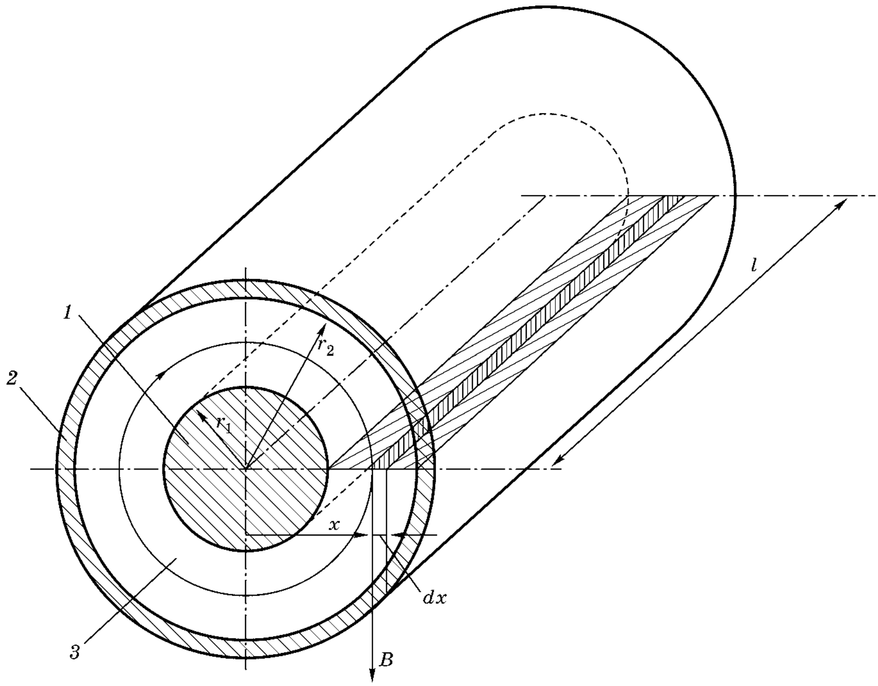


Рис. 12.8
Поперечный разрез коаксиального кабеля

Коаксиальный кабель. Его разрез показан на рис. 12.8. Он представляет собой систему двух проводов (1 и 2), первый из которых, называемый жи́лой, имеет сплошное круглое сечение, а второй, именуемый оболочкой, представляет собой тонкостенную трубу, охватывающую жилу. Между жилой и оболочкой, оси которых совпадают, имеется цилиндрический слой 3 изоляционного материала.

Если жила и оболочка кабеля используются как прямой и обратный провод в системе передачи электроэнергии по двухпроводной линии, то МП вне кабеля существовать не может, так как любая предполагаемая магнитная линия, охватывающая кабель, сцепляется с двумя одинаковыми по величине, но разными по направлению токами.

Как и в случае двухпроводной линии, остановимся на расчете внешней индуктивности коаксиального кабеля, обусловленной полем вне проводов, т. е. полем в толще изоляции кабеля. При этом внешнее потокосцепление Ψ'_L замкнутого контура «жила — оболочка» будет равно магнитному потоку Ф, замыкающемуся в толще изоляции по всей длине l кабеля. Поверхность s, магнитный поток сквозь которую подлежит расчету, показана на рис. 12.8 штриховкой.

Принимая во внимание постоянство магнитной индукции поля кабеля во всех точках, равноудаленных от его оси, при интегрировании индукции по этой поверхности целесообразно ее разбить на бесконечно узкие полоски шириной dx и простирающиеся вдоль оси кабеля на всю его длину l. Поскольку вектор магнитной индукции перпендикулярен поверхности интегрирования, магнитный поток сквозь элементарную площадку $ds = ldx$ (на рис. 12.8 она показана двойной штриховкой) будет $d\Phi = Bds = Bldx$. Причем для магнитной индукции B в точках этой элементарной площадки на расстоянии x от оси жилы имеем $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$.

Для получения магнитного потока сквозь всю поверхность s необходимо проинтегрировать элементарный поток по всей площади радиального сечения изоляции, т. е. по отношению к переменной координате x в пределах от $x = r_1$ до $x = r_2$, где r_1 — радиус поперечного сечения жилы, а r_2 — внутренний радиус поперечного сечения оболочки:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} Bldx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (12.16)$$

Отсюда для внешней индуктивности коаксиального кабеля получим

$$L' = \frac{\Psi'_L}{I} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (12.17)$$

Весьма характерно, что внешняя индуктивность коаксиального кабеля не зависит от абсолютных размеров его жилы и оболочки, а определяется только отношением радиусов этих элементов кабеля.

12.2.4. РАСЧЕТ ВНУТРЕННЕЙ ИНДУКТИВНОСТИ ПРОВОДОВ

Предположим, что по проводу с радиусом поперечного сечения r (рис. 12.9), изготовленному из материала с магнитной проницаемостью μ, протекает ток I, равномерно распределенный по сечению. Выделим внутри провода элементарную магнитную трубку радиусом x, толщиной dx и шириной во всю длину l провода. Магнитная индукция в точках внутри этой трубки, т. е. на расстоянии x от оси провода, равна:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r^2}x. \qquad (12.18)$$

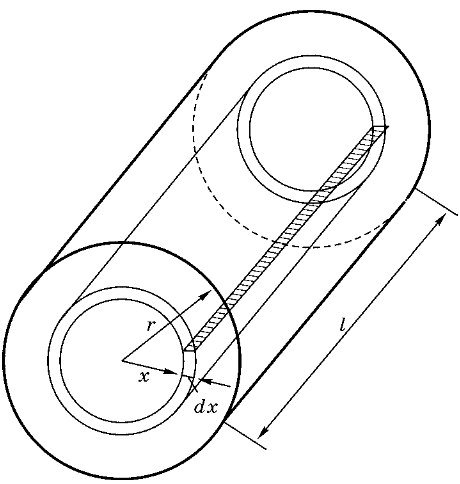


Рис. 12.9
Поперечное сечение круглого провода

А объемная плотность энергии там же определится выражением

$$W'_м = 0{,}5\frac{B^2}{\mu} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^4}x^2. \qquad (12.19)$$

Тогда для энергии МП этой трубки с объемом $dv = 2\pi x l dx$ можно написать

$$dW_м = W'_м dv = \frac{\mu I^2 l}{4\pi r^4}x^3 dx.$$

Энергия МП внутри всего провода определится суммированием энергий отдельных элементарных магнитных трубок разных радиусов, плотно вложенных одна в другую. Иначе говоря, она определится интегрированием выражения для $dW_м$ в пределах от $x = 0$ до $x = r$:

$$W_м = \int_0^r \frac{\mu I^2 l}{4\pi r^4} x^3 dx = \frac{\mu I^2 l}{4\pi r^4} \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^r = \frac{\mu I^2 l}{16\pi}. \qquad (12.20)$$

Таким образом, для внутренней индуктивности провода получим

$$L'' = \frac{2W_м}{I^2} = \frac{\mu l}{8\pi}. \qquad (12.21)$$

Опираясь на выражение для внутренней индуктивности провода и на ранее полученное выражение для внешней индуктивности двухпроводной линии (12.17), запишем формулу для полной индуктивности двухпроводной линии. Она будет отличаться от внешней индуктивности добавлением внутренних индуктивностей обоих проводов:

$$L = L' + 2L'' = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d - r}{r} + \frac{\mu l}{4\pi}. \qquad (12.22)$$

При этом необходимо подчеркнуть, что точность полученного выражения не высока, так как внутренняя индуктивность провода была рассчитана в условиях его уединенности и, следовательно, строгой осевой симметрии МП. А в двухпроводной линии в результате наложения МП отдельных проводов друг на друга внутреннее МП каждого провода искажается. Естественно, чем больше расстояние d между проводами по сравнению с радиусом r их сечений, тем это искажение становится меньше, а точность приведенной формулы выше.

Внутренняя индуктивность в двухпроводной линии с медными или алюминиевыми проводами ($\mu = \mu_0$) обычно составляет незначительную долю полной индуктивности. В линиях же со стальными проводами, с чем чаще всего встречаются в маломощных линиях связи, внутренняя индуктивность из-за высокой магнитной проницаемости стали может превысить внешнюю составляющую полной индуктивности.

Полная индуктивность коаксиального кабеля. Она может быть представлена суммой ранее вычисленной его внешней индуктивности (12.16), внутренней индуктивности жилы (12.22) и внутренней индуктивности L'' оболочки. Определение последней не отличается по методу от расчета внутренней индуктивности провода, но сопряжено с более громоздкими выкладками и поэтому здесь не рассматривается. К тому же, как показывают расчеты, из-за небольшой толщины оболочки ее внутреннее потокосцепление, а вместе с ним и внутренняя индуктивность оказываются значительно меньше внутренней индуктивности жилы и тем более внешней индуктивности кабеля. Поэтому полную индуктивность коаксиального кабеля обычно подсчитывают по сокращенной формуле

$$L = L' + L'' = \frac{\mu_0 l}{2\pi} (\ln \frac{r_2}{r_1} + 0{,}25), \qquad (12.23)$$

полагая, к тому же, магнитную проницаемость μ провода равной магнитной постоянной, так как кабели со стальными жилами не встречаются, а для меди и алюминия $\mu = \mu_0$.

12.3.
РАСЧЕТ ВЗАИМНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ И ИНДУКТИВНЫХ СВЯЗЕЙ

12.3.1.
РАСЧЕТ ВЗАИМНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Представим себе два замкнутых электрических контура, расположенных в среде с постоянной магнитной проницаемостью (рис. 12.10*а*). По первому из них протекает электрический ток I_1, а второй контур без тока находится в МП, созданном током первого контура.

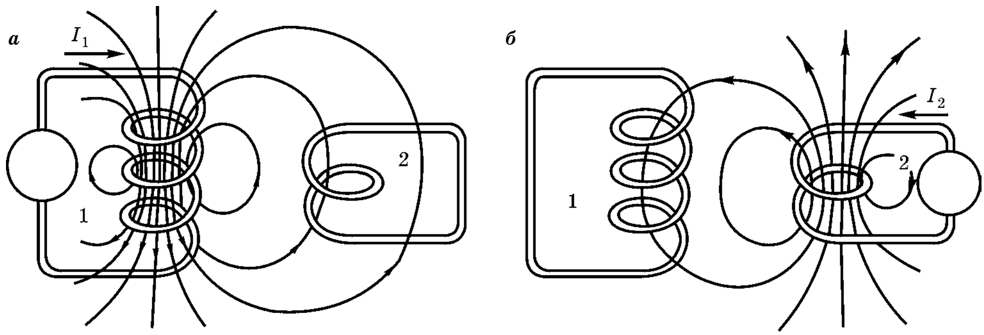


Рис. 12.10
К расчету индуктивности двух взаимно связанных контуров с токами

Обозначим потокосцепление Ψ_{21} второго контура, являющееся в этих условиях потокосцеплением взаимоиндукции, двумя индексами: первый индекс 2 указывает на то, что это потокосцепление второго контура, а второй индекс 1 свидетельствует, что данное потокосцепление обусловлено током первого контура. Очевидно, что это потокосцепление будет пропорционально току I_1 первого контура:

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1. \qquad (12.24)$$

Коэффициент пропорциональности M_{21}, связывающий потокосцепление Ψ_{21} второго контура и ток I_1 первого контура, назовем взаимной индуктивностью второго контура относительно первого контура.

Аналогично можно себе представить те же два контура, но при условии, что на этот раз ток I_2 протекает по контуру 2 (рис. 12.10*б*). В контуре 1, находящемся в МП второго контура, тока нет. Очевидно, что потокосцепление Ψ_{21} взаимоиндукции первого контура от тока во втором контуре будет пропорционально току I_2 второго контура $\Psi_{12} = M_{12} I_2$, где M_{12} — взаимная индуктивность первого контура относительно второго.

Взаимоиндукции M_{12} и M_{21} при условии постоянства магнитной проницаемости, а также неизменности конфигурации контуров и их взаимного расположения в обоих опытах оказываются одинаковыми: $M_{12} = M_{21}$. Поэтому оба эти коэффициента на практике называют взаимной индуктивностью контуров, индексы опускают, а обозначают просто M:

$$M = M_{12} = M_{21}.$$

К нижним индексам прибегают лишь в случае, когда в системе имеется более двух контуров.

Таким образом, в общем случае, взаимную индуктивность контуров или, как иногда ее называют, взаимную индуктивность между контурами можно определить как отношение потокосцепления взаимоиндукции одного контура к току другого контура:

$$M_{km} = \frac{\Psi_{km}}{i_m}. \tag{12.25}$$

Независимость взаимной индуктивности двух контуров от способа ее определения принято рассматривать как особое свойство этой величины, называемое инвариантностью взаимной индуктивности.

Зависимость взаимной индуктивности от особенностей конструкции контуров аналогична соответствующей зависимости собственной индуктивности (12.7), т. е. взаимная индуктивность является функцией магнитных проницаемостей $\mu_i (i \in [1, k])$ веществ и геометрических координат $g_j (j \in [1, n])$ элементов, определяющих конструкцию контуров: $M = f(\mu_i, g_j)$. И в частном случае, когда МП контуров расположено в однородной среде, взаимная индуктивность пропорциональна магнитной проницаемости этой среды: $M = \mu f\,(g_j)$.

В зависимости от собственной индуктивности взаимная индуктивность зависит не только от формы и размеров самих контуров, но и от их взаимного расположения.

Рассмотрим характер этой зависимости на примере двух круговых контуров, расположенных в однородной среде (на рис. 12.11 витки изображены в разрезе).

Определим взаимную индуктивность этих контуров через потокосцепление Ψ_{21} взаимоиндукции второго контура при условии, что ток I_1 протекает по первому контуру

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}.$$

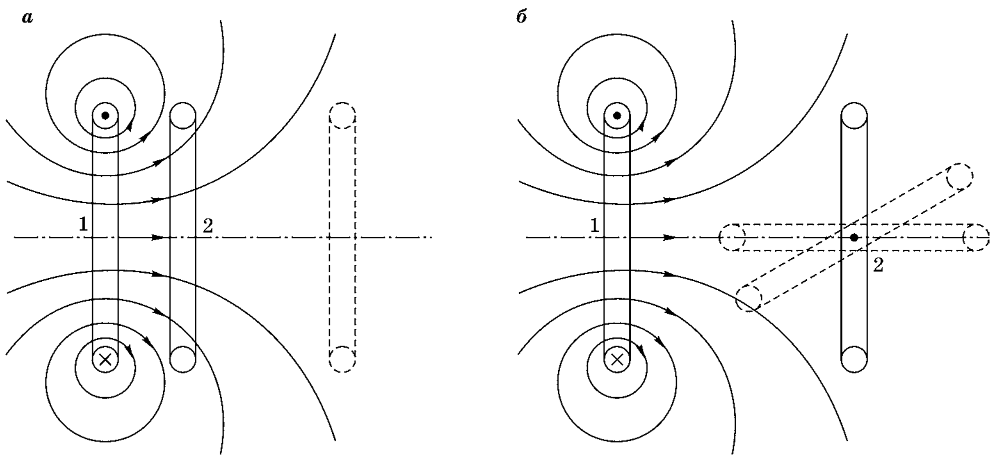


Рис. 12.11
Контуры с токами в однородной среде

Сохраняя ток I_1 и вместе с ним поле первого контура неизменными, мысленно удалим второй контур от первого. Так как в новом положении второй контур окажется в области более слабого поля первого контура, потокосцепление Ψ_{21} уменьшится, что приведет к уменьшению и взаимной индуктивности. В пределе при удалении второго контура в бесконечность взаимная индуктивность упадет до нуля. Сближение двух рассматриваемых контуров повлечет за собой увеличение потокосцепления взаимоиндукции второго контура и вместе с ним увеличение взаимной индуктивности контуров.

Если теперь предположить, что, не изменяя ток I_1 и расстояние между центрами контуров, мы повернем второй контур, то потокосцепление второго контура также уменьшится. И это приведет к соответствующему уменьшению взаимной индуктивности. Характерно, что при повороте второго контура в положение, показанное на рис. 12.11*а* штрихпунктирной линией, когда ни одна магнитная линия поля первого контура не сцепляется со вторым контуром, потокосцепление Ψ_{21} и соответственно взаимная индуктивность этих контуров обращается в нуль.

Установленные закономерности изменения взаимной индуктивности двух контуров в общих чертах остаются справедливыми для контуров любой конфигурации. В частности, и для целых катушек.

Взаимная индуктивность, в отличие от собственной индуктивности, которая всегда положительна, может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это свойство взаимной индуктивности, имеющее, правда, условный характер, объясняется тем, что две величины — потокосцепление и ток, определяющие взаимную индуктивность

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1},$$

относятся к разным контурам и потому наделяются независимыми друг от друга знаками.

Таким образом, знак взаимной индуктивности между двумя контурами приобретает определенность лишь после того, как будут выбраны положительные направления вдоль одного контура и сквозь другой контур. Вспоминая, что для одного контура между положительными направлениями вдоль и сквозь него установлена связь (с помощью правила правого винта), при оценке знака взаимной индуктивности достаточно установить положительные направления. Например, только вдоль обоих контуров, так как положительные направления сквозь них в этом случае определяются вполне однозначно.

Расчет взаимной индуктивности электрических контуров аналогичен расчету собственной индуктивности контуров. Он заключается в том, что мысленно по одному из контуров пропускают ток и рассчитывают вызванное им потокосцепление взаимоиндукции другого контура. Разделив последнюю величину на ток первого контура, находят искомую взаимную индуктивность.

Взаимная индуктивность двух обмоток, расположенных на неразветвленном магнитопроводе (рис. 12.12), может быть подсчитана в предположении, что ток протекает, например, по первой обмотке (рис. 12.12*а*).

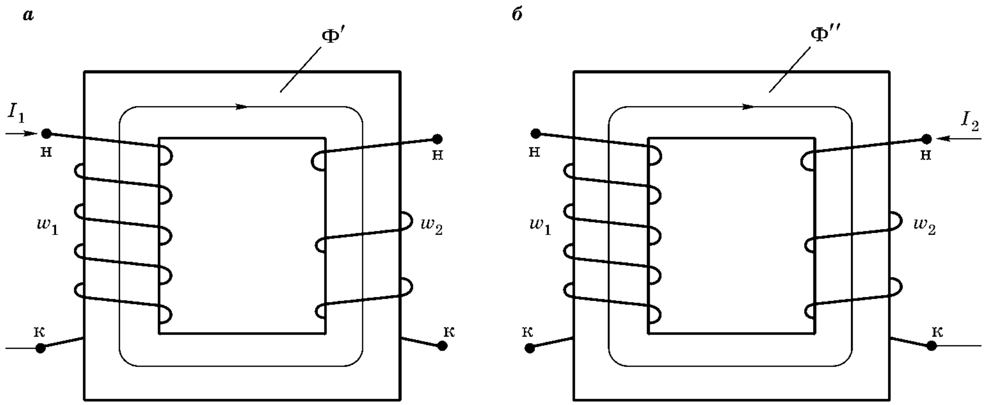


Рис. 12.12
Обмотки на неразветвленном магнитопроводе

Пренебрегая рассеиванием, магнитный поток магнитопровода в этом случае можно рассчитать по закону для замкнутой магнитной цепи:

$$\Phi' = \frac{w_1 I_1}{R_м},$$

где w_1 — число витков первой обмотки, $R_м$ — магнитное сопротивление магнитопровода.

Тогда потокосцепление взаимоиндукции второй обмотки с числом витков w_2 можно представить в виде

$$\Psi_{21} = w_2 \Phi' = \frac{w_2 w_1 I_1}{R_м},$$

и для взаимной индуктивности будем иметь

$$M_{21} = \frac{w_2 w_1}{R_м}. \tag{12.26}$$

12.3.2. РАСЧЕТ ИНДУКТИВНЫХ СВЯЗЕЙ

Если взаимная индуктивность двух контуров отлична от нуля, то говорят, что между этими контурами существует индуктивная связь, а сами контуры называют в этом случае индуктивно связанными контурами.

Физически индуктивная или, как ее еще называют, магнитная связь обусловлена общим магнитным потоком, сцепляющимся в определенных условиях одновременно с обоими контурами. Наиболее наглядно этот поток наблюдается в случае простейших контуров, состоящих из одного витка, когда МП создано током лишь одного из этих контуров, например первого, как показано на рис. 12.13.

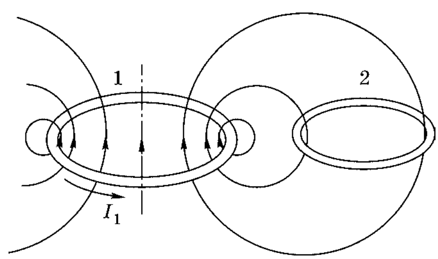


Рис. 12.13
Связанные электрические контуры

В МП такого контура нетрудно выделить магнитную трубку (на рисунке она ограничена толстыми магнитными линиями), которая определяет собой потокосцепление взаимной индукции второго контура и таким образом сцепляется не только с первым, но и со вторым контуром. Чем большую долю составляет магнитный поток этой трубки по сравнению с суммарным магнитным потоком для всех трубок поля, тем сильнее индуктивная связь этих контуров.

Строго говоря, степень индуктивной связи двух контуров оценивают коэффициентом связи, который представляет собой отношение абсолютного значения взаимной индуктивности этих контуров к положительному значению квадратного корня из произведения их собственных индуктивностей:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}. \qquad (12.27)$$

Нетрудно убедиться, что коэффициент связи представляет собой безразмерный коэффициент, который всегда представляет собой число меньше единицы.

Коэффициент связи двух обмоток. Если обмотки расположены на неразветвленном магнитопроводе (см. рис. 12.12*б*), то коэфициент нетрудно подсчитать в идеальных условиях при отсутствии магнитного рассеяния. Взаимная индуктивность обмоток для этого случая (12.26)

$$M = \frac{w_1 w_2}{R_м},$$

где w_1 и w_2 — числа витков обмоток, $R_м$ — магнитное сопротивление магнитопровода.

Пользуясь условиями опыта, описанного выше, можно записать выражения для собственной индуктивности первой L_1 и второй L_2 обмоток:

$$L_1 = \frac{\Psi_{L1}}{I_1} = \frac{w_1 \Phi'}{I_1} = \frac{w_1^2}{R_м}, \; L_2 = \frac{\Psi_{L2}}{I_2} = \frac{w_2 \Phi''}{I_2} = \frac{w_2^2}{R_м}.$$

Отсюда для коэффициента связи рассматриваемых обмоток получим

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{w_1 w_2 / R_м}{\sqrt{\frac{w_1^2}{R_м} \cdot \frac{w_2^2}{R_м}}} = 1. \qquad (12.28)$$

Таким образом, при отсутствии магнитного рассеяния, когда весь магнитный поток, локализованный в магнитопроводе, полностью сцепляется с обеими обмотками, коэффициент связи равен единице. Однако в реальных условиях такого значения коэффициент связи достичь не может. Это объясняется тем, что практически, наряду с учтенным в расчете основным магнитным потоком, замыкающимся целиком по магнитопроводу, на деле будут существовать еще и потоки рассеивания, сцепляющиеся только с одной обмоткой, и именно с той, по которой в опыте протекает ток. Поэтому фактические потокосцепления самоиндукции Ψ_{L1} и Ψ_{L2}, а вместе с ними и фактические собственные индуктивности L_1 и L_2 обмоток окажутся больше полученных в предыдущем расчете, и в действительности коэффициент связи всегда будет меньше единицы ($k < 1$), а взаимная индуктивность двух контуров — всегда меньше среднего геометрического из собственных индуктивностей этих контуров:

$$M < \sqrt{L_1 L_2}. \tag{12.29}$$

Как видим, коэффициент связи не зависит от числа витков обмоток и определяется только взаимной индуктивностью при заданных L_1 и L_2. Поэтому, например, при удалении двух контуров друг от друга коэффициент связи будет уменьшаться, а при их сближении увеличиваться. Поворачивая один контур относительно другого, также можно достичь изменения коэффициента связи, в частности его уменьшения до нуля.

Индуктивная связь. В электротехнических устройствах она определяет собой характер протекания в них ряда важнейших электромагнитных явлений, как, например, возникновение ЭДС индукции в электрических цепях или механических сил взаимодействия между контурами. При этом наряду с многочисленными примерами преднамеренного использования индуктивной связи в различных машинах и аппаратах нередко она вызывает нарушения нормального функционирования электротехнического оборудования. Поэтому в инженерной практике нам часто приходится сталкиваться с задачами как искусственного увеличения индуктивной связи между контурами, так и предельного ее уменьшения.

Приемы увеличения индуктивной связи. Это такие конструктивные решения, при которых общий магнитный поток, сцепляющийся с двумя

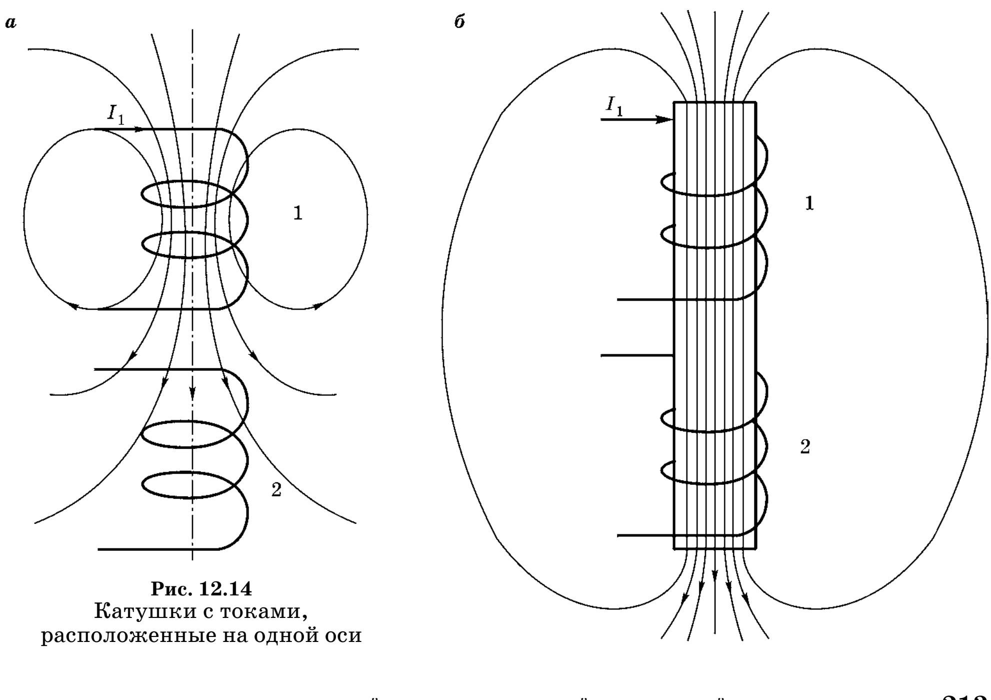


Рис. 12.14
Катушки с токами, расположенные на одной оси

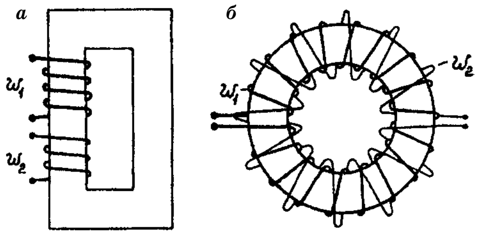


Рис. 12.15
Катушки с токами, размещенные на замкнутом магнитопроводе

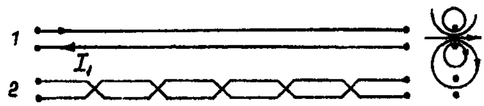


Рис. 12.16
Транспозиция электрических проводов

контурами, достигает наибольших значений. Так, например, в случае двух обмоток, расположенных рядом друг с другом по одной оси (рис. 12.14*а*), введение в них ферромагнитного стержня (рис. 12.14*б*) будет способствовать усилению общего магнитного потока и тем самым усилению индуктивной связи между обмотками.

Еще бо́льшие значения коэффициента связи достигаются при размещении двух обмоток на замкнутом неразветвленном магнитопроводе (рис. 12.15*а*), причем чем выше магнитная проницаемость материала магнитопровода, тем ближе будет значение коэффициента связи к единице, так как с повышением магнитной проницаемости уменьшаются потоки рассеяния магнитной цепи. Дальнейшего приближения коэффициента связи к единице можно добиться размещением обеих обмоток на одном стержне магнитопровода (рис. 12.15*а*) или, еще лучше, равномерным расположением двух обмоток (одна поверх другой) на кольцевом магнитопроводе (рис. 12.15*б*), ибо в этом случае удается получить наименьшее рассеяние магнитного потока.

Ослабление индуктивной связи между контурами. Достигается уменьшением их взаимной индуктивности, для чего контуры следует располагать по возможности дальше друг от друга или ориентировать их так, чтобы линии поля одного контура не сцеплялись с другим контуром. При этом желательно локализовать собственные МП контуров, используя для каждого из них отдельные замкнутые магнитопроводы.

Особую важность в технике связи представляет задача ослабления индуктивной связи между двумя параллельными линиями для устранения влияния токов одной линии на работу другой. В этом случае, например, прибегают к транспозиции проводов, т. е. к чередующемуся через равные промежутки длины перехлестыванию проводов одной из линий, как показано на рис. 12.16. При этом составляющая потокосцепления взаимоиндукции второй линии от тока в первой на одном участке будет иметь противоположный знак по сравнению с составляющей потокосцепления на другом участке, и при четном количестве участков суммарное потокосцепление взаимоиндукции второй линии окажется равным нулю. По аналогичным причинам достигается практически полное уничтожение индуктивной связи между линиями, если хотя бы одна из них выполнена перевитыми друг с другом проводами.

12.4.
РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЕМКОСТЕЙ

12.4.1.
ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

Потенциал φ уединенного проводящего тела пропорционален его заряду Q: $\varphi = \alpha Q$. Эта закономерность в общем случае вытекает из линейности основных уравнений ЭП при условии, если диэлектрическая проницаемость ε среды во всех точках окружающего пространства остается постоянной величиной. В частности, линейность связи между потенциалом и зарядом подтверждается выражением для потенциала заряженного шара $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$. Чаще эту закономерность выражают обратной зависимостью $Q = C\varphi$, вводя вместо потенциального коэффициента α обратную ему величину $C = \frac{Q}{\varphi}$, называемую электрической емкостью уединенного тела.

Единицей емкости является фарада (Ф). Тело будет иметь емкость в 1 Ф, если при сообщении ему заряда в 1 Кл оно приобретает потенциал в 1 В.

Уединенное заряженное тело можно себе представить лишь чисто теоретически. Дело в том, что все тела в природе в своем естественном состоянии электрически нейтральны, т. е. их результирующие положительные и отрицательные заряды одинаковы. Поэтому, заряжая одно тело положительно, мы должны будем для этого взять соответствующий положительный заряд у другого тела, обнажив в нем равный ему отрицательный заряд. Таким образом, на практике мы чаще встречаемся с системой двух тел, заряженных равными по величине, но противоположными по знаку зарядами.

В этом случае говорят об электрической емкости между двумя телами, определяя ее отношением абсолютного значения Q заряда каждого из тел к разности $\varphi_1 - \varphi_2$ потенциалов этих тел, т. е. к напряжению U между телами $C = \frac{Q}{U}$. Так как в практической электротехнике оперируют только этим понятием емкости, ее принято называть просто электрической емкостью, не подчеркивая того, что речь идет о системе двух тел.

Как и емкость уединенного тела, емкость между двумя телами измеряют в фарадах (Ф). Система двух тел будет обладать емкостью в 1 Ф, если при сообщении этим телам равных по величине, но противоположных по знаку зарядов в 1 Кл между ними возникнет напряжение в 1 В.

В дальнейшем будет показано, что емкость зависит только от конфигурации тел, их размеров, расстояния между телами, электрических свойств диэлектрика (величины ε).

12.4.2.
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЕМКОСТИ

Емкость плоского конденсатора. Плоский конденсатор в простейшем случае представляет собой две одинаковые, параллельно расположенные металлические пластины (обкладки конденсатора), разделенные слоем изоляции (см. рис. 12.17). В зависимости от материала изоляции различают слюдяные,

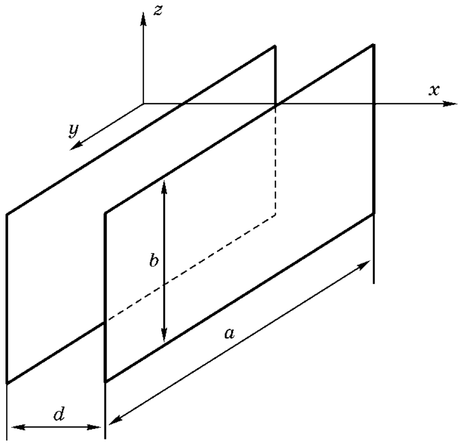


Рис. 12.17
К расчету емкости плоского конденсатора

керамические, бумажно-масляные и т. п. конденсаторы. Особое место занимают воздушные конденсаторы, в которых изоляцией служит воздух, и вакуумные, в пространстве между пластинами которых соответственно вакуум.

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, площадь каждой пластины которого s, расстояние между пластинами d, а материал изоляции характеризуется диэлектрической проницаемостью ε.

Пусть у обкладок конденсатора будут заряды $+Q$ и $-Q$. Рассмотрим образовавшееся при этом поле как результат наложения полей каждой из пластин в отдельности.

Ранее было показано, что поле плоской равномерно заряженной пластины равномерно и его напряженность равна $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$, где $\sigma = Q/s$ — поверхностная плотность заряда пластины, ε — диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

При этом поле положительно заряженной пластины направлено с обеих сторон от пластины, а поле отрицательно заряженной пластины, наоборот, к ней. Тогда во внешней области конденсатора с обеих его сторон результирующее поле исчезнет, так как поля отдельных пластин направленные навстречу друг другу, взаимно компенсируются. В области же между пластинами ЭП, складываясь, дадут результирующее ЭП с вдвое большей напряженностью $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$. Напряжение между пластинами определится простым произведением напряженности на расстояние d. Таким образом, для искомой емкости имеем

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma s}{Ed} = \frac{\sigma s}{(\sigma/\varepsilon)d} = \frac{\varepsilon s}{d}. \qquad (12.30)$$

Следует подчеркнуть, что формула (12.30) является весьма условной. Это объясняется тем, что при ее выводе было предположено, что поле конденсатора равномерно. В действительности, имеет место так называемое «выпучивание» поля у краев конденсатора, нарушающее его равномерность. Однако при весьма малых расстояниях между пластинами по сравнению с их размерами, что почти всегда имеет место в реальных конденсаторах, область искаженного поля будет ничтожна и формула (12.30) емкости приводит к достаточно точным результатам.

Емкость коаксиального кабеля. Поперечный разрез коаксиального кабеля показан на рис. 12.8.

При сообщении жиле и оболочке одинаковых по величине и разных по знаку зарядов, что имеет место, когда кабель используют в качестве линии передачи электрической энергии, ЭП возникает только в изоляции. Объясняется это тем, что снаружи кабеля поля́ жилы и оболочки взаимно компенсируются. Внутри же кабеля поле создается только жилой, так как поле от оболочки внутри нее, как внутри всякого заряженного проводящего тела, отсутствует, даже если в нем имеется полость. Линии поля в изоляции будут направлены по радиусам сечения кабеля. В частности, при положительно заряженной жиле — от нее к отрицательно заряженной оболочке. При этом напряженность поля в произвольной точке изоляции будет равна $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$, где τ — линейная плотность заряда жилы, ε — диэлектрическая проницаемость изоляции, r — расстояние от точки до оси кабеля. Тогда напряжение между жилой и оболочкой получим

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\cos\alpha dx = \int_{r_1}^{r_2} E dx = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon x} dx = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

так как, избирая путь интегрирования от поверхности жилы с радиусом r_1 до внутренней поверхности оболочки с радиусом r_2 вдоль линии ЭП в изоляции, имеем всюду вдоль этого пути $\alpha = 0$ и $\cos\alpha = 1$.

Таким образом, емкость между жилой и оболочкой кабеля или, проще говоря, емкость кабеля будет равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}},$$

так как абсолютное значение заряда жилы или оболочки кабеля на длине l: $Q = \tau l$.

Емкость двухпроводной линии. Двухпроводная линия представляет собой совокупность двух одинаковых прямых проводов обычно круглого сечения, проложенных параллельно друг другу (рис. 12.6). Напряженность E поля между проводами линии в точках на прямой, соединяющей оси проводов, согласно принципу наложения можно рассматривать как сумму напряженностей E_1 и E_2, определяющихся зарядами каждого из проводов в отдельности. При этом, поскольку векторы упомянутых напряженностей в рассматриваемых точках совпадают по направлению (на рис. 6.6 предположено, что первый провод заряжен положительно, а второй отрицательно), взамен геометрической суммы векторов можно оперировать арифметической суммой их модулей:

$$E = E_1 + E_2.$$

Вспоминая выражение для напряженности поля прямого провода круглого сечения, для интересующей нас напряженности имеем

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon x} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon(d - x)},$$

где τ — линейная плотность заряда каждого из проводов, ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся провода, x — расстояние от точки до оси первого провода, d — расстояние между осями проводов.

Напряжение между проводами рассчитаем, интегрируя напряженность по прямой, соединяющей оси проводов, т. е. вдоль линии напряженности от поверхности положительно заряженного первого провода ($x = r$, где r — радиус поперечного сечения провода) до поверхности отрицательно заряженного второго провода ($x = d - r$):

$$U = \int_r^{d-r} E dx = \int_r^{d-r} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon x} dx + \int_r^{d-r} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon (d-x)} dx =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\int_r^{d-r} \frac{dx}{x} - \int_r^{d-r} \frac{d(x-d)}{x-d} \right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{-r}{r-d} \right) =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{r}{d-r} \right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{d-r}{r} \right)^2 = \frac{\tau}{\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{d-r}{r} \right).$$

Тогда емкость между проводами двухпроводной линии будет равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{\frac{\tau}{\pi\varepsilon} \ln\frac{d-r}{r}} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d-r}{r}},$$

так как абсолютное значение заряда каждого провода линии на длине l $Q = \tau l$.

При больших расстояниях d между проводами по сравнению с радиусом r их поперечного сечения $d \gg r$, с чем мы встречаемся в воздушных линиях передачи, полученная формула упрощается:

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{d}{r}}.$$

Следует заметить, что данный вывод, к сожалению, вообще не может претендовать на точность, так как принцип наложения, которым мы воспользовались при оценке напряженности поля линии, был применен в данной задаче некорректно. Дело в том, что использованная формула напряженности уединенного провода получена в предположении равномерного распределения заряда по поверхности провода, обеспечивающего симметричность поля вокруг провода. Расположение же зарядов по поверхности проводов двухпроводной линии оказывается неравномерным. Поскольку разноименные заряды притягиваются друг к другу, заряды проводов будут стремиться сблизиться. В результате поверхностная плотность зарядов на тех участках поверхности проводов, которые обращены друг к другу, будет больше, чем на участках поверхностей, обращенных наружу линии, как показано на рис. 12.6, где плотность зарядов на проводах условно передана толщиной контура провода. При таком расположении зарядов поле каждого провода в отдельности мы заложили в расчет, используя принцип наложения.

При необходимости рассчитать частичные емкости в системе тел или емкости в системе параллельных проводов, в том числе и с учетом влияния земли, рекомендуем обратиться к книге [12.4], где эти вопросы рассмотрены всесторонне.

Контрольные вопросы

1. Идеальная электрическая емкость тела, некоторой области представляет собой... (выберите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) коэффициент пропорциональности между электрическим зарядом тела Q и электрическим потенциалом φ на теле, $C = Q/\varphi$;

б) свойство материала тела, зависящее от геометрии тела и его диэлектрической постоянной;

в) элемент, в котором ток опережает напряжение, приложенное к нему на 90°.

2. Идеальная индуктивность катушки L представляет собой... (выберите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) параметр, описываемый формулой $L = w^2\mu_0 S/l$ Гн, где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м; w — число витков катушки; S — сечение прохождения потока, м^2; l — длина провода катушки, м;

б) параметр, описываемый формулой $L = w^2\mu S/l$ Гн, где $\mu = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\mu_r$ Гн/м; μ_r — относительная магнитная проницаемость; w — число витков катушки; S — сечение прохождения потока, м^2; l — длина провода катушки, м;

в) параметр, описываемый формулой $L = \Psi/I$ Гн, где $\Psi = w\Phi$ — потокосцепление, связанное с катушкой, Гн; Φ — магнитный поток одного витка катушки, Гн; w — число витков катушки; I — ток, протекающий по катушке, м.

3. Резистивное сопротивление r тела (некоторой области) представляет собой... (выберите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) коэффициент пропорциональности между электрическим напряжением U (потенциалом тела φ) и током I, вызванным приложенным напряжением, $r = U/I$;

б) свойство материала, зависящее от его размеров и электрической проводимости γ;

в) элемент, в котором ток находится в фазе с напряжением, а выделяющаяся активная мощность идет на нагрев тела и отстает от напряжения, приложенного к нему на 90°;

4. Ротор (rot) вектора $\vec{A}$: $\operatorname{rot}\vec{A}$ представляет собой... (дайте полный ответ).

Варианты:

а) вихрь вектора $\vec{A}$;

б) дифференциальную функцию от вектора $\vec{A}$;

в) предел отношения линейного интеграла от вектора $\vec{A}$ к элементу поверхности при стремлении последнего к нулю;

г) функцию, дающую представление о приращении вектора $\vec{A}$ при прохождении через замкнутую поверхность.

5. Дивегенция (div) вектора $\vec{A}$: $\operatorname{div}\vec{A}$ представляет собой... (выберите наиболее полный ответ).

Варианты:

а) расхождение вектора $\vec{A}$;

б) частную производную вектора $\vec{A}$;

в) предел отношения поверхностного интеграла от вектора $\vec{A}$ к элементу объема при стремлении последнего к нулю;

г) функцию, дающую представление о приращении вектора $\vec{A}$ при прохождении через замкнутую поверхность.

6. Что такое индуктивность среды и как она рассчитывается?
7. Как рассчитать потокосцепление катушки?
8. Что такое взаимная индуктивность между контурами?
9. Что такое емкость среды и как она рассчитывается?
10. Рассчитайте емкость плоского конденсатора.
11. Рассчитайте емкость коаксиального кабеля.
12. Как рассчитывается емкость однопроводной линии?
13. Как рассчитывается емкость двухпроводной линии?

13

ГЛАВА 13

РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

13.1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

ЭСП называют ЭП неподвижных зарядов. Силовой характеристикой ЭП является напряженность $\vec{E}$. Она определяется как отношение силы, действующей на пробный заряд, помещенный в ЭП, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q_0}.$$

Здесь под пробным зарядом понимаем заряд q_0 положительного знака, настолько малый по величине, что он не искажает внешнего поля, в которое помещен.

Другой важной характеристикой ЭП является вектор электрической индукции (в диэлектрике его называют вектором электрического смещения) $\vec{D}$. Если во внешнее поле, созданное положительным зарядом Q, поместить две тонкие металлические пластины небольшого размера с изолированными ручками (рис. 13.1), то свободные или слабосвязанные со своими атомами электроны переместятся влево. Левая пластина окажется заряженной отрицательно, а правая пластина из-за недостатка электронов — положительно. Как видим, пластины зарядились без какого-либо контакта с зарядом Q, т. е. из-за электрической индукции.

За изолированную ручку мы можем вынуть из рассматриваемой области любую из пластин — другая будет иметь положительный или отрицательный заряд. Данное явление описывают с помощью характеристики, которую называют электрической индукцией. Поверхностная плотность заряда, наведенного на любую из пластин, $\sigma = D$, а весь заряд на пластине $Q = \sigma S''$, где S'' — площадь пластины.

Если в пространство вблизи заряда Q поместить диэлектрик, например неполярный (т. е. такой, атомы которого в отсутствии поля не обладают дипольным моментом — цен-

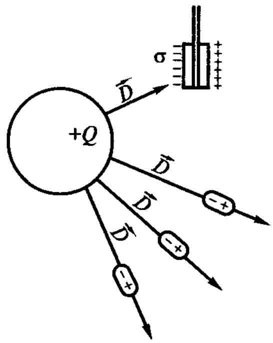


Рис. 13.1
Действие электрического заряда на внесенные металлические пластины

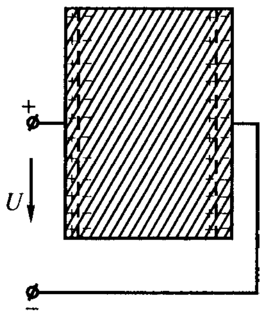


Рис. 13.2
Свободные и связанные заряды на пластинах конденсатора

тры электронных оболочек и положительного ядра совпадают), то под влиянием заряда Q электронные оболочки атомов диэлектрика будут к нему притягиваться — произойдет смещение отрицательного заряда. Описание этого явления производится с помощью характеристики, которую называют вектором электрического смещения.

ЭП свободных зарядов, созданных внешними источниками и находящихся на электродах или в виде пространственного заряда, ослабляется действием связанных зарядов вещества, в котором эти свободные заряды находятся (рис. 13.2). Фактическое результирующее поле $\vec{E}$ обусловлено свободными и связанными зарядами. При этом теорема Гаусса имеет вид

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon}(Q_{\text{своб}} + Q_{\text{связ}}), \qquad (13.1)$$

причем знак заряда $Q_{\text{связ}}$ противоположен знаку заряда $Q_{\text{своб}}$. Свободный заряд $Q_{\text{своб}}$ связан с электрической индукцией $\vec{D}$ уравнением (постулат Максвелла)

$$\oint_s \vec{D}\overrightarrow{dS} = Q_{\text{своб}}, \qquad (13.2)$$

поэтому

$$\varepsilon_0 \oint_s \vec{E}\overrightarrow{dS} = Q_{\text{своб}} + Q_{\text{связ}},$$

откуда

$$Q_{\text{своб}} = \varepsilon_0 \oint_s \vec{E}\overrightarrow{dS} - Q_{\text{связ}} = \varepsilon_0 \oint_s \vec{E}\overrightarrow{dS} - \varepsilon_0 \oint_s \vec{P}\overrightarrow{dS}.$$

Вектор, ответственный за образование связанного заряда, называется вектором поляризации P. Используя (13.1) и (13.2), в однородных средах:

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{dS} = \oint_S \varepsilon_0 \vec{E}\overrightarrow{dS} - \oint_S \vec{P}\overrightarrow{dS},$$

откуда

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} - \vec{P},$$

причем $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; вектор $\vec{D}$ совпадает с вектором $\vec{E}$, вектор $\vec{P}$ им противоположен, т. е. численно

$$D = \varepsilon_0 E + |P|.$$

В поле неподвижных зарядов нет токов, значит, нет и вызываемого токами МП. Поэтому уравнение для ЭСП имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0. \qquad (13.3)$$

Уравнение (13.3) свидетельствует о том, что ротор (вихрь) ЭП $\vec{E}$ в рассматриваемой области пространства отсутствует, следовательно, поле безвихревое. И аналитически оно может быть описано некоторой скалярной потенциальной функцией, которую называют электрическим потенциалом φ.

Связь между напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и потенциалом φ устанавливается с помощью выражений

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l}; \quad \varphi_A = \int_{l_A}^{l_P} \vec{E} d\vec{l}. \tag{13.4}$$

Потенциал в точке A определяется как интеграл от $\vec{E}$ по $d\vec{l}$ от точки A, в которой хотим найти потенциал, до точки P, потенциал в которой принят равным нулю. Положение точек A и P определяется расстоянием вдоль некоторого пути, отсчитываемого от выбранного начала отсчета. Взяв производную от обеих частей равенства (13.4) по переменному нижнему пределу (точка A может находиться в произвольном месте), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = -E_l \frac{\partial\varphi}{\partial\ell},$$

откуда

$$\varphi = -\int E_l dl = -\int \vec{E} d\vec{l}. \tag{13.5}$$

Таким образом, потенциал в произвольной точке A может быть найден как с помощью определенного интеграла (13.4), так и с помощью неопределенного интеграла (13.5).

Из общей системы уравнений Максвелла для ЭСП используются три:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0; \ \operatorname{div}\vec{D} = \rho; \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E},$$

которые в однородном поле приводятся к одному уравнению:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{13.6}$$

При отсутствии зарядов в рассматриваемой области

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{13.7}$$

Уравнение (13.6) называют уравнением Пуассона, а уравнение (13.7) — уравнением Лапласа. В прямоугольной системе координат x, y, z с учетом

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi = \nabla^2\varphi \ \text{и} \ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

уравнения (13.6) и (13.7) примут вид:

уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \tag{13.8}$$

уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{13.9}$$

Интегрирование уравнений Пуассона или Лапласа позволяет найти потенциал $\varphi(x, y, z)$ в каждой точке поля, а затем, используя выражения (13.4), (13.5), а также напряженность поля $\vec{E}$ по формуле

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{13.10}$$

При интегрировании уравнений Пуассона и Лапласа встречаемся с необходимостью определения постоянных интегрирования, которые находятся из граничных условий, т. е. тех физических условий, которые существуют на поверхностях раздела двух сред: проводника и диэлектрика или двух диэлектриков.

Граничные условия на поверхностях проводников. Внутри проводников:

$$\vec{E} = 0.$$

На поверхности проводников:

$$\vec{E} = E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n};\ E_\tau = 0,$$

где E_n и E_τ — соответственно нормальная и касательная к поверхности проводника составляющие вектора $\vec{E}$.

1. Поверхность проводника представляет собой поверхность равного потенциала

$$\varphi = \text{const}. \tag{13.11}$$

2. Величина вектора электрической индукции $\vec{D}$ численно равна поверхностной плотности заряда

$$D = \sigma, \tag{13.12}$$

т. е. весь заряд проводника сосредоточен на его поверхности, внутри проводника заряда нет.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков.

1. Касательные составляющие вектора $\vec{E}$ на поверхности раздела двух диэлектриков (рис. 13.3*а*) равны

$$\left.\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \\ E_1 \sin\alpha_1 &= E_2 \sin\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{13.13}$$

2. Нормальные составляющие вектора $\vec{D}$ на поверхности раздела двух диэлектриков (рис. 13.3*б*) равны

$$\left.\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, \\ D_1 \cos\alpha_1 &= D_2 \cos\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{13.14}$$

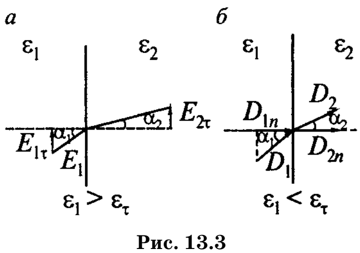


Рис. 13.3
Условия на границе раздела диэлектриков

3. Соотношение между углом падения и углом преломления линий электрического поля на границе раздела двух диэлектриков дается выражением

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \tag{13.15}$$

Скачок нормальной составляющей напряженности ЭП объясняется наличием на границе сред некомпенсированных связанных зарядов и равен

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}.$$

В каждой точке поверхности заряженного тела напряженность определяется поверхностной плотностью свободных зарядов:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Величина вектора поляризации равна поверхностной плотности связанных зарядов:

$$P = \sigma_{\text{связ}}.$$

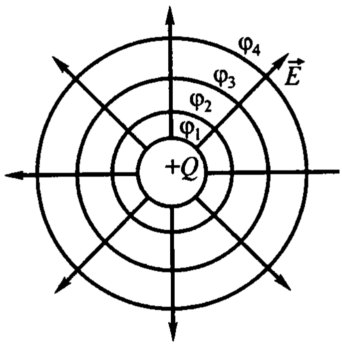


Рис. 13.4
Картина ЭСП

Потенциал на границе раздела двух сред изменяется непрерывно:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{13.16}$$

Производные от потенциала, взятые по нормали к границе раздела, удовлетворяют равенству

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n},$$

что соответствует выражению (13.14).

Теорема, доказывающая, что задача расчета ЭСП по уравнениям Лапласа и Пуассона с учетом граничных условий может быть решена единственным образом, называется «теоремой единственности».

Для наглядности ЭП изображают на картинках, называемых картинами поля. На картинах указывают линии вектора напряженности $\vec{E}$ и линии равного потенциала φ. На рис. 13.4 изображено ЭП положительного заряда Q сферической формы. Поток вектора $\vec{E}$, создаваемый зарядом Q сквозь любую замкнутую поверхность S, по теореме Гаусса равный

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon}, \tag{13.17}$$

разбит на трубки равного потока. Границы между трубками равного потока на рисунке — это линии $\vec{E}$. Кроме того, здесь изображены линии равного потенциала, т. е. следы на плоскости сферических поверхностей равного потенциала φ.

Картина поля на плоскости строится так, чтобы удовлетворялись два правила.

1. Линии $\vec{E}$ и линии φ пересекаются под прямым углом.

2. Ячейки картины поля, образующиеся при пересечений линий $\vec{E}$ и φ, должны быть подобны друг другу:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{E} \perp \varphi \\ &\frac{\Delta a}{\Delta n} = \text{const} \end{aligned}\right\}, \tag{13.18}$$

Δa — расстояние между линиями $\vec{E}$; Δn — расстояние между линиями φ в каждой ячейке.

Цель расчета поля. Она заключается в том, что необходимо найти значения напряженности поля $\vec{E}$ и электрического потенциала φ при заданной геометрии (расположение и форма заряженных тел) и граничных условиях. Последние могут быть двух видов:

а) заданы значения потенциала на границах поля (задача Дирихле);

б) заданы значения напряженности поля на границах (задача Неймана) или, что то же самое, задано распределение зарядов по поверхности проводящих тел;

в) заданы значения потенциалов на одних границах, а на других — напряженности (задачи со смешанными граничными условиями).

Ниже на примерах рассмотрены наиболее употребляемые и относительно простые методы расчета ЭСП.

13.2. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ

З а д а ч а 13.1. ЭСП создано двумя тонкими параллельно расположенными пластинами бесконечного размера. Поверхностная плотность заряда на одной из пластин $+\sigma$, на другой $-\sigma$ Кл/м^2. Найти напряженность ЭСП между пластинами и снаружи пластин. Как изменится напряженность поля, если одну из пластин удалить? Нарисовать картины напряженностей поля для случаев: 1) между двумя пластинами; 2) при удалении одной из пластин.

Р е ш е н и е.

1. В соответствии с граничным условием весь заряд пластины сосредоточен на ее поверхности, обращенной к другой пластине. $D = \sigma$; $E = \dfrac{D}{\varepsilon}$; $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$; $\varepsilon_r = 1$. Распределение векторов $\vec{D}$, $\vec{E}$ в пространстве между пластинами изображено на рис. 13.5*а*.

2. Если одну из пластин удалить, ЭСП окажется симметричным по обе стороны оставшейся пластины:

$$D = \frac{\sigma}{2};\ E = \frac{D}{2\varepsilon}.$$

Картина поля изображена на рис. 13.5*б*.

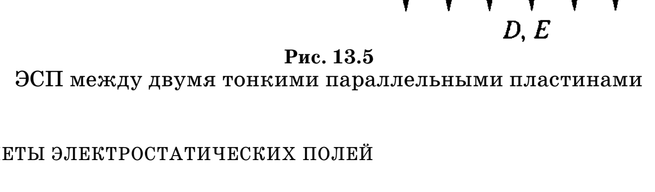


Рис. 13.5
ЭСП между двумя тонкими параллельными пластинами

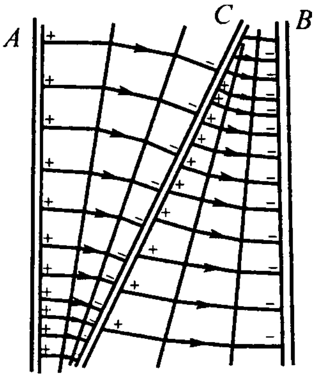


Рис. 13.6
Картина ЭСП при наличии трех пластин

З а д а ч а 13.2. В ЭСП, образованное пластинами A и B, внесена пластина C из проводящего материала. Нужно изобразить картину поля.

Р е ш е н и е.

Картина поля изображена на рис. 13.6 по правилам ее построения (13.18). Там же показано распределение плотности заряда по пластинам. Результирующий заряд на пластине C отсутствует.

З а д а ч а 13.3. Найти значение векторов напряженности поля, электрического смещения, поляризации, свободный и связанный заряды и емкость для плоского конденсатора. Площадь пластин у него $S = 25$ см^2; расстояние между пластинами $d = 2$ мм, напряжение между ними $U = 1$ кВ.

Задачу рассмотреть для двух случаев: а) между пластинами воздух; б) между пластинами вставлена текстолитовая пластина.

Р е ш е н и е.

В обоих случаях поле между пластинами однородное. В однородном поле

$$U = \int_{\ell} \vec{E}\overrightarrow{d\ell} = Ed. \tag{13.19}$$

а) Диэлектрик воздух $\varepsilon_r = 1$:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{2 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м;}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^5 = 4{,}44 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$

$$P = 0,$$

$$Q_{\text{связ}} = \int_S \vec{D}\overrightarrow{dS} = D \cdot S = 4{,}44 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 11{,}1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Плотность свободного заряда:

$$\sigma = D = 4{,}44 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Связанный заряд:

$$Q_{\text{связ}} = 0.$$

$$C = \frac{Q_{\text{своб}}}{U} = \frac{11{,}1 \cdot 10^{-9}}{10^3} = 11{,}1 \cdot 10^{-12}\,\Phi = 11{,}1 \text{ пкФ.}$$

б) Диэлектрик текстолит $\varepsilon_r = 4$:

$$E = \frac{U}{d} = 5 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}5 \cdot 10^5 = 17{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$
$$P = \varepsilon_0 E - D = (4{,}44 - 17{,}7) \cdot 10^{-6} = 13{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2,$$
$$Q_{\text{своб}} = DS = 17{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 44{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Плотность свободного заряда:

$$\sigma = D = 17{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2.$$

Связанный заряд:

$$Q_{\text{связ}} = PS = -13{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = -33{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл},$$

$$C = \frac{Q_{\text{своб}}}{U} = \frac{4{,}44 \cdot 10^{-9}}{10^3} = 44{,}4 \cdot 10^{-12}\,\Phi = 44{,}4\ \text{пкФ}.$$

З а д а ч а 13.4. После зарядки конденсатор, рассмотренный в задаче 13.3, отключен от источника, а затем в него вставлена текстолитовая пластина. Определить $Q_{\text{своб}}$, $Q_{\text{связ}}$, D, E, P, C: а) до внесения пластины; б) после внесения пластины.

а) Так как ничего не сказано о проводимости конденсатора, то можно считать его идеальным, т. е. конденсатором без потерь. Тогда напряжение на нем, заряд и все остальные величины останутся теми же.

б) На основании закона сохранения заряда свободный заряд $Q_{\text{своб}}$ после внесения пластины не изменится.

$$Q_{\text{своб}} = 11{,}1 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл}.$$

$$D = \frac{Q_{\text{своб}}}{S} = \frac{11{,}1 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} = 4{,}44 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2,$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{4{,}44 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4} = 125 \cdot 10^3\ \text{В/м},$$

$$P = \varepsilon_0 E - D = -3{,}33 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2,$$

$$Q_{\text{связ}} = PS = -8{,}3 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл},$$

$$U = Ed = 125 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{В},$$

$$C = \frac{Q_{\text{своб}}}{U} = \frac{11{,}1 \cdot 10^{-9}}{250} = 44{,}4 \cdot 10^{-12}\,\Phi = 44{,}4\ \text{пкФ}.$$

Таким образом, введение между обкладками отсоединенного от источника конденсатора текстолитовой пластины привело к изменению напряжения на конденсаторе в 4 раза: от 1000 до 250 В.

З а д а ч а 13.5. Пазовая изоляция обмотки электрической машины состоит из нескольких слоев клееной слюдяной ленты (миколекс) и киперной ленты, пропитываемых специальным компаундом. При укладке в паз между изоляцией обмотки и пакетом железа могут оставаться воздушные зазоры (рис. 13.7).

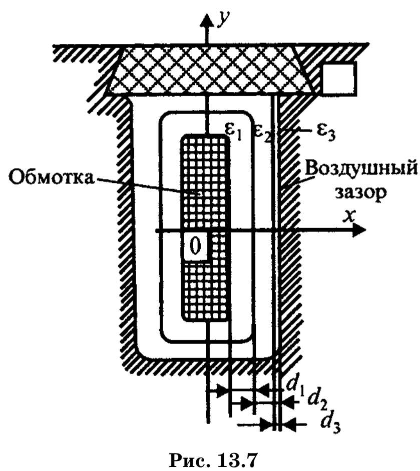


Рис. 13.7
Разрез паза электрической машины

Полагая, что поле в изоляции можно считать зависящим от одной координаты x, допустимая напряженность ЭП в воздушном зазоре $E_{доп} = 20$ кВ/см (действующее значение), нужно определить эксплуатационное напряжение между обмоткой и корпусом машины. Численное решение выполнить для случая: $d_1 = 4$ мм; $d_2 = 1$ мм; $d_3 = 0{,}5$ мм; $\varepsilon_1 = 7\varepsilon_0$; $\varepsilon_2 = 3{,}5\varepsilon_0$; $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$.

Решение.

Задача сводится к определению разности потенциалов между обкладками плоского конденсатора, заполненного тремя диэлектриками, если известна допустимая напряженность поля в одном из них. Вектор электрического смещения D имеет только одну, нормальную к поверхности раздела сред составляющую, одинаковую во всех слоях изоляции:

$$D = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_3 E_3.$$

Допустимое значение напряженности поля задано в наиболее «слабом» диэлектрике — воздухе, что сразу дает возможность найти величину D:

$$D = \varepsilon_3 E_3.$$

Искомое напряжение:

$$U_{обм} - U_{корп} = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = E_3\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}d_1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}d_2 + d_3\right) =$$

$$= E_{доп}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1/\varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_2/\varepsilon_0} + d_3\right).$$

Численное решение: $U_{обм} - U_{корп} = 2{,}7$ кВ (действующее значение).

Задача 13.6. Электрический заряд распределен с постоянной объемной плотностью ρ в части пространства, ограниченной сферической поверхностью радиуса R_0 (рис. 13.8). Определить напряженность электрического поля $E(R)$ и электрический потенциал $\varphi(R)$ внутри и вне заряженной сферы.

Решение.

В силу того что мы имеем дело со сферической симметрией, задача может быть решена по теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon}. \tag{13.20}$$

В области расположения объемного заряда, при $0 < R < R_0$:

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho dV.$$

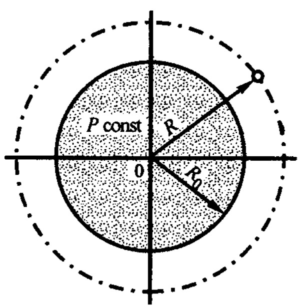


Рис. 13.8
Электрический заряд на сферической поверхности

В силу все той же сферической симметрии в любой точке на одном и том же расстоянии R значение E одинаково, поэтому

$$E_1 \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho,\ E_1(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0$.

За пределами объемного заряда $R > R_0$:

$$E_2 \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon},$$

где $Q = \dfrac{4}{3}\pi R_0^3\rho$;

$$E_2(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}. \qquad (13.21)$$

Потенциал вне заряженной сферы:

$$\varphi = \int \vec{E}\overrightarrow{dR} = -\int E dR = -\int \frac{QdR}{4\pi\varepsilon R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \text{const}.$$

Так как рассматривается уединенный заряд, то при $R \to \infty$, $\varphi \to 0$:

$$0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \infty} + \text{const}; \ \text{const} = 0,$$

поэтому вне заряженной сферы:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}. \qquad (13.22)$$

Внутри заряженной сферы:

$$\varphi = -\int \vec{E}\overrightarrow{dR} = -\int \frac{\rho R}{3\varepsilon} dR = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon} + \text{const}.$$

При $R = R_0$:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon R_0} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon} + \text{const}.$$

Подставив в последнее выражение $Q = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho$, найдем

$$\text{const} = \frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon}.$$

Окончательно в рассматриваемой области (внутри заряженной сферы):

$$\varphi(R) = \frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon} - \frac{\rho R^2}{6\varepsilon} = \frac{\rho}{6\varepsilon}(3R_0^2 - R^2).$$

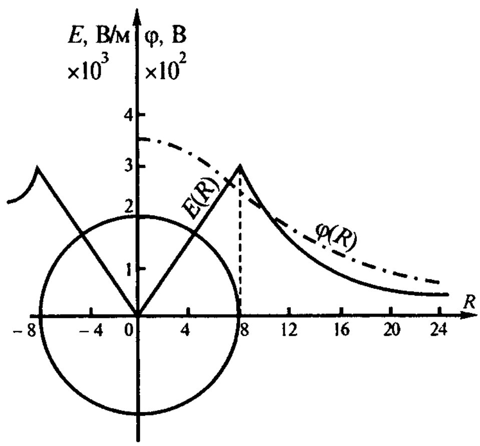


Рис. 13.9
Графики $E(R)$ и $\varphi(R)$

Графики $E(R)$ и $\varphi(R)$ изображены на рис. 13.9.

По результатам решения задачи 13.6 можно сделать следующий вывод: по мере удаления от заряженной сферы напряженность ЭП E убывает с квадратом расстояния (13.21), а электрический потенциал φ убывает обратно пропорционально расстоянию в первой степени (13.22).

Задача 13.7. Шар имеет заряд $Q = 10^{-10}$ Кл. Найти наименьший радиус шара R, при котором в воздухе градиент потенциала не превысит допустимого значения (30 кВ/см).

Решение.

$$|\text{grad}\,\varphi| = E = 3 \cdot 10^6 \, \frac{В}{м} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

$$R = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}} = \sqrt{\frac{10^{-10} \cdot 10^{12} \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 3}} = 0{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

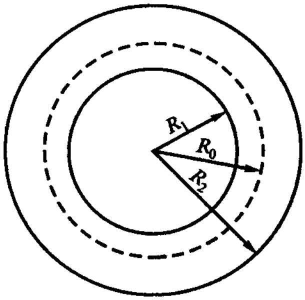


Рис. 13.10
Сферический конденсатор

По существу, мы решаем заданную задачу в предположении, что весь заряд шара расположен в его центре, а напряженность поля такого точечного заряда определяется по формуле (13.21).

З а д а ч а 13.8. В воздушном сферическом конденсаторе потенциал внутренней обкладки $U_1 = 50$ В, наружной — $U_2 = -50$ В, радиусы обкладок $R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см. Определить радиус R_0 поверхности нулевого потенциала (рис. 13.10). Найти выражение для емкости сферического конденсатора.

Р е ш е н и е.

Между шаровыми заряженными поверхностями имеем центральное симметричное поле, т. е. напряженность поля можно расчитать по формуле

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2},$$

где Q — заряд обкладки конденсатора; $\varepsilon = \varepsilon_0$; $R_1 \le R \le R_2$.

Потенциал внутренней обкладки по определению (13.4):

$$\varphi_1 = \int_{R_1}^{R_0} \vec{E}\overrightarrow{dR} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_0}\frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right).$$

Заряд Q может быть выражен через разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\overrightarrow{dR} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Подставляя во второе выражение значение заряда из первого, найдем

$$R_0 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)R_1R_2}{\varphi_1R_1 - \varphi_2R_2}.$$

Численное решение: $R_0 = 6{,}7$ см. Емкость конденсатора (в том числе и сферического) $C = \frac{Q}{U}$, где Q — заряд пластины конденсатора, U — напряжение между обкладками конденсатора. Подставляя в последнее выражение $U = \varphi_1 - \varphi_2$, найденное ранее, получим

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

З а д а ч а 13.9. Рассчитать поле заряженной уединенной проволоки.

Р е ш е н и е.

Согласно условию задачи есть только одна заряженная проволока, и больше ничего нет. Если длина проволоки настолько велика, что в рассматриваемой области пространства ее можно считать бесконечно длинной, то поле проволоки обладает цилиндрической симметрией. Т. е., используя теорему Гаусса,

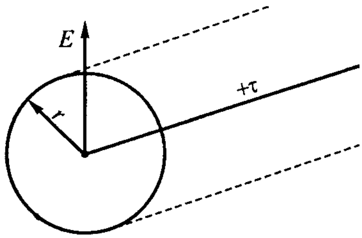


Рис. 13.11
Проволока бесконечной длины

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{\tau l}{\varepsilon},$$

где $\tau = \dfrac{Q}{l}$ — линейная плотность заряда, можно определить напряженность поля E в любой точке, удаленной от проволоки на расстояние r (рис. 13.11):

$$E = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon}. \qquad (13.23)$$

Электрический потенциал:

$$\varphi = -\int \vec{E}\overrightarrow{dr} = -\int \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon} dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r + \text{const}. \qquad (13.24)$$

Постоянная интегрирования определяется в каждой конкретной задаче. Например, если мы имеем одножильный кабель, то потенциал оболочки кабеля, удаленной на расстояние R от заряженной жилы, равен потенциалу земли, т. е. нулю, тогда

$$0 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln R + \text{const}; \ \text{const} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R};$$

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln R = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{R}{r}.$$

З а д а ч а 13.10. Рассчитать напряженности поля коаксиального кабеля.

Р е ш е н и е.

В диэлектрике между жилой и оболочкой коаксиального кабеля (рис. 13.12*а*) напряженность поля будет та же, что и в поле заряженной оси:

$$\text{при } r_1 \le r \le r_2; \ E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}.$$

В жиле и в оболочке, а также вне кабеля поле отсутствует. Напряжение между жилой и оболочкой:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\overrightarrow{dr} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Емкость кабеля:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{\tau} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon\ l}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}.$$

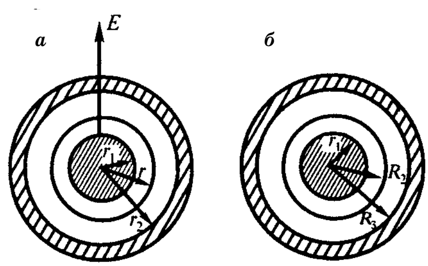


Рис. 13.12
Коаксиальный кабель

Если кабель имеет двухслойную изоляцию (рис. 13.12*б*), то, так как значение вектора электрического смещения $\vec{D}$ не зависит от диэлектрической проницаемости среды, для расчета используют обобщенную теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{dS} = Q = \tau l.$$

Вследствие цилиндрической симметрии поля

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{dS} = D \cdot 2\pi r l = \tau l,$$

откуда

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

На границе раздела слоев изоляции $D_1 = D_2$, поэтому на границе раздела слоев изоляции напряженность поля меняется скачком:

$$E_2 = E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Таким образом, если изоляция кабеля однослойная, то, поскольку значение $E(r)$ определяется гиперболической зависимостью (13.23) (а значит, существенно неодинаково по толщине изоляции), выбирать в качестве изоляции диэлектрик с повышенной электрической прочностью оказывается невыгодным (напряженность поля в значительной части диэлектрика будет существенно меньше допустимого для данного диэлектрика значения). Если же сделать изоляцию кабеля многослойной, то неоднородность напряженности по толщине диэлектрика уменьшится и обеспечить необходимую изоляцию жилы от оболочки можно при меньшей толщине изоляции.

Задача 13.11. Изоляция коаксиального цилиндрического кабеля изготовлена из двух диэлектриков. Центральный провод первоначально покрыт слоем фторопласта, поверх которого надета резиновая трубка. Радиусы внутренней жилы и наружной металлической оболочки заданы: $R_1 = 1$ мм; $R_3 = 3$ мм (см. рис. 13.12*б*). Определить внешний радиус слоя фторопласта, при котором наибольшее значение напряженности поля в каждом из диэлектриков будет равно допустимому для них значению. Найти величину эксплуатационного напряжения для этой конструкции и значения емкости на единицу ее длины. Диэлектрические проницаемости и допустимые напряженности соответственно: $\varepsilon_1 = 2{,}2\varepsilon_0$; $E_{l\max} = 8$ кВ/мм; $\varepsilon_2 = 4{,}8\varepsilon_0$; $E_{2\max} = 2{,}0$ кВ/мм.

Решение.

Рациональное использование изолирующих материалов соответствует условию, при котором наибольшие значения напряженности поля в каждом из диэлектриков были бы равны допустимым для них значениям.

Согласно постулату Максвелла:

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{dS} = Q;\; D \cdot 2\pi R l = \tau l;\; D = \frac{\tau}{2\pi R},$$

где τ — линейная плотность свободных электрических зарядов на внутренней жиле; R — расстояние от жилы по нормали к ней.

Очевидно, что в любом слое величина D_R — const и, следовательно,

$$E_{1\max}\varepsilon_1 R_1 = E_{2\max}\varepsilon_2 R_2.$$

Отсюда можно определить искомый радиус границы раздела диэлектриков:

$$R_2 = \frac{E_{1\max}}{E_{2\max}} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} R_1 = \frac{E_{1\max}}{E_{2\max}} \cdot \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} R_1$$

(так как $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, где ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость).

Определим τ: при данных размерах конструкции оно соответствует полю, максимальные напряженности которого в каждом слое изоляции будут равны заданным значениям:

$$\tau = 2\pi D R_1 = 2\pi\varepsilon_1 E_{1\max} R_1.$$

Найдем соответствующую этому τ разность потенциалов:

$$U = \varphi_1 - \varphi_3 = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dR + \int_{R_2}^{R_3} E_2 dR = \frac{\tau}{2\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{\varepsilon_1 R} + \int_{R_2}^{R_3}\frac{dR}{\varepsilon_2 R}\right) = \varepsilon_1 R_1 E_{1\max}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right).$$

Емкость кабеля на единицу длины

$$C' = \frac{\tau}{U_1 - U_3} = \frac{2\pi}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{R_3}{R_2}}.$$

Численные значения:

$$R_2 = 1{,}84 \text{ мм};\ U = U_1 - U_3 = 6{,}76 \text{ кВ};\ C' = 145\cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

З а д а ч а 13.12. Рассчитать поле цилиндра радиуса r_0 с объемным зарядом.

Р е ш е н и е.

Пусть бесконечный цилиндр из диэлектрика имеет равномерный распределенный заряд с объемной плотностью ρ (рис. 13.13). Рассмотрим поле в двух областях. В первой области ($0 \le r_1 \le r_0$) заключена часть заряда цилиндра

$$\oint \overrightarrow{E_1}\overrightarrow{dS} = \frac{\pi r_1^2 l\,\rho}{\varepsilon_1},$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость цилиндра.

Вследствие цилиндрической симметрии

$$\oint \overrightarrow{E_1}\overrightarrow{dS} = E_1 \cdot 2\pi r_1 l,$$

поэтому

$$E_1 = \frac{\rho r_1}{2\varepsilon_1}.$$

Во второй области ($r_0 \le r_2 \le \infty$)

$$\oint \overrightarrow{E_2}\overrightarrow{dS} = \frac{\pi\, r_0^2 l\rho}{\varepsilon_2},$$

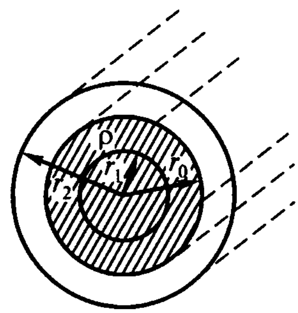


Рис. 13.13
Круговой диэлектрический цилиндр

$\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость окружающего пространства (воздуха).

$$E_2 = \frac{\rho r_0^2}{2 r_2 \varepsilon_2}.$$

Потенциал поля в обеих областях:

$$\varphi_1 = -\int \overrightarrow{E_1}\overrightarrow{dr} = \frac{\rho\, r_1^2}{4\varepsilon_1} + C_1,$$

$$\varphi_2 = -\int \overrightarrow{E_2}\overrightarrow{dr} = \frac{\rho\, r_0^2 \ell n\, \mathrm{r}_2}{2\varepsilon_2} + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из условия равенства потенциала нулю на оси провода, а также непрерывности функции $\varphi(r)$ на границе раздела диэлектриков.

Таким образом, при $r_1 = 0$ $\varphi_1 = 0$; $C_1 = 0$. При $r = r_0$ $\varphi_1 = \varphi_2$, т. е.

$$\varphi_1 = \frac{\rho r_0^2}{4\varepsilon_1} = \varphi_2 = \frac{\rho\, r_0^2 \ln\, r_0}{2\varepsilon_2} + C_2,$$

откуда

$$C_2 = \frac{\dfrac{1}{2\varepsilon_1} - \dfrac{\ln\, r_0}{\varepsilon_2}}{\dfrac{\rho r_0^2}{2}}.$$

13.3. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТЕЙ ПОЛЕЙ НАЛОЖЕНИЕМ

Электрическое поле в воздухе, а также в подавляющем большинстве видов изоляции является линейным, т. е. линейна зависимость $D(E)$: $D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, ε_r — const. А так как для любой линейной среды применим метод наложения, с его помощью можно решать соответствующие задачи. Примеры ниже.

Задача 13.13. Два одноименных точечных заряда Q и $3Q$ расположены на расстоянии d друг от друга. Найти на прямой, проходящей через эти заряды, точку с нулевой напряженностью.

Решение.

Обозначим $\vec{E}_1$ напряженность ЭСП заряда Q, величиной $\vec{E}_2$ — напряженность поля заряда $3Q$. В точке, где $\vec{E} = 0$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ и направлены в противоположные стороны. С учетом (13.21)

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1^2} = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon R_2^2},$$

где R_1, R_2 — соответственно расстояния от искомой точки до зарядов Q и $3Q$, причем $R_2 = d - R_1$.

$$Q(d - R_1)^2 = 3QR_1^2;\ R_1^2 + R_1 d - \frac{d}{2} = 0;\ R_1 = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}\ d.$$

Оставляя положительный корень, найдем $R_1 = 0{,}365d$.

Задача 13.14. Рассчитать поле двухпроводной линии.

Решение.

Пусть точки A и B — следы пересечения плоскости заряженными проволоками $+\tau$ и $-\tau$ (рис. 13.14). Найдем значения напряженности поля E и потенциала φ в произвольной точке M.

$E_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{a}$ — напряженность поля от заряженной проволоки $+\tau$, направлена по линии, соединяющей M с зарядом $+\tau$.

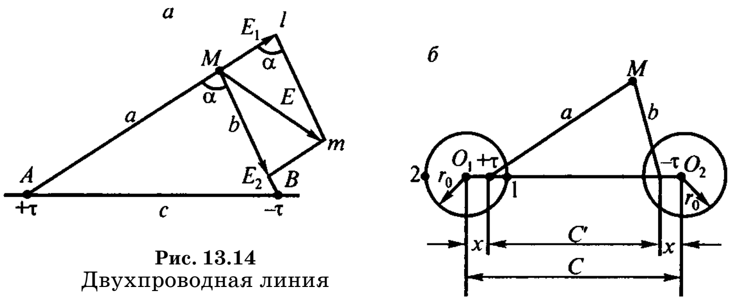


Рис. 13.14
Двухпроводная линия

$E_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon} \cdot \dfrac{1}{b}$ — напряженность поля от заряженной проволоки $-\tau$, направлена по линии, соединяющей M с зарядом $-\tau$.

$\Delta Mlm \sim \Delta AMB$, т. к. отношение длин двух сторон одного треугольника (b/a) пропорционально отношению длин двух сторон другого треугольника (E_1/E_2):

$$E_1 a = E_2 b = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}; \ \frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a}.$$

Заключенные между сторонами b и a и сторонами Ml и lm углы равны, как углы между параллельными сторонами (рис. 13.14). Из подобия треугольников

$$E = E_1 \frac{c}{b} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{c}{ab}. \qquad (13.25)$$

Найдем теперь потенциал в M от заряда $+\tau$ по формуле

$$\varphi'_м = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln b + \text{const}.$$

Потенциал в M от заряда $-\tau$:

$$\varphi'_м = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln a + \text{const}.$$

Потенциал в M от обеих заряженных проволок:

$$\varphi_м = \varphi'_м + \varphi''_м = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} + \text{const}.$$

Постоянную интегрирования найдем, считая, что потенциал точки, расположенный посередине между заряженными осями, равен нулю. Так как при этом

$$\frac{b}{a} = 1; \ \ln 1 = 0, \text{ то } 0 = 0 + \text{const}; \ \ \text{const} = 0,$$

$$\varphi_м = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}. \qquad (13.26)$$

Выше рассмотрен случай, когда радиусы проводов (r_0) много меньше расстояния между проводами ($r_0 \ll c$).

З а д а ч а 13.15. Рассмотрим теперь более сложный случай, когда расстояние между проводами двухпроводной линии соизмеримо с радиусом проводов. При этом, с одной стороны, поверхности проводящих металлических проводов являются поверхностями равного потенциала, а с другой — произойдет смещение противоположных по знаку зарядов на проводах друг к другу. Это приведет к тому, что так называемые электрические оси проводов ($+\tau$; $-\tau$)* и их геометрические оси (O_1; O_2) сместятся (см. рис. 13.14*б*).

Условием эквипотенциальности является условие $\frac{b}{a} = \text{const}$, поэтому для точки 1:

$$\frac{c - r_0 - x}{r_0 - x} = \text{const},$$

а для точки 2:

$$\frac{c + r_0 - x}{r_0 + x} = \text{const}.$$

Так как точки 1 и 2 принадлежат одному проводу и потенциалы их равны, то

$$\frac{c - r_0 - x}{r_0 - x} = \frac{c + r_0 - x}{r_0 + x},$$

откуда

$$x = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - r_0^2}.$$

Далее задача решается аналогично предыдущему случаю (когда геометрические и электрические оси совпадают).

13.4. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТЕЙ ПОЛЕЙ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

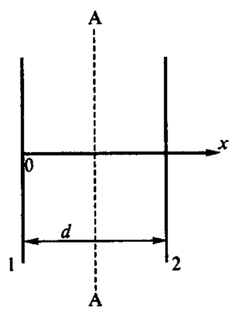


Рис. 13.15
Две параллельные пластины, между которыми равномерно распределен объемный заряд

Упрощенное решение уравнений Лапласа и Пуассона.

З а д а ч а 13.16. Между двумя бесконечными параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии d (рис. 13.15), равномерно распределен объемный заряд с плотностью ρ в однородной изотропной среде с проницаемостью ε. Найти распределение потенциала в среде $\varphi(x)$ и напряженности поля $E(x)$.

Р е ш е н и е.

Если совместить координатную плоскость yoz с левой пластиной, то потенциал окажется функцией только координаты x и уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\varepsilon}x + C_1;\ \varphi(x) = \frac{\rho}{2\varepsilon}x^2 + C_1 x + C_2.$$

---

* Весь заряд с поверхности цилиндра переносится на одну линию, при этом рассчитанное поле будет учитывать неравномерное распределение зарядов на поверхности провода (проводящего цилиндра): на части поверхности, обращенной к другому проводу, поверхностная плотность заряда будет больше, чем на удаленном. Перенесение заряда с поверхности цилиндра на его электрическую ось аналогично перенесению заряда шара в его центр (задача 1.6).

Постоянные интегрирования найдем из следующих соображений: заряд распределен равномерно, значит, можно считать, что его количество по обе стороны от плоскости A–A одинаково. Значит, потенциалы плоскостей 1, 2 равны между собой. Будем считать их равными нулю. Тогда из граничных условий найдем C_1, C_2:

$$1)\ x=0;\ \varphi(0)=0 \Rightarrow 0=-\frac{\rho}{2\varepsilon}0+C_1\cdot 0+C_2;\ C_2=0;$$

$$2)\ x=d;\ \varphi(d)=0 \Rightarrow 0=-\frac{\rho}{2\varepsilon}d^2+C_1 d;\ C_1=\frac{\rho}{2\varepsilon}d.$$

Окончательно имеем

$$\varphi(x)=-\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2+\frac{\rho d}{2\varepsilon}x,\ E=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\rho}{\varepsilon}x+\frac{\rho d}{2\varepsilon}.$$

З а д а ч а 13.17. С помощью измерительного зонда установлено, что распределение потенциала между пластинами плоского конденсатора подчиняется уравнению

$$\varphi=a\left(\frac{b^2}{4}-x^2\right),$$

где a, b — постоянные, x — координата, отсчитываемая от середины междуэлектродного промежутка (рис. 13.16). Найти распределение электрических зарядов в междуэлектродном пространстве и заряды на поверхности пластин конденсатора.

Р е ш е н и е.

Уравнение Пуассона в прямоугольной системе координат:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Так как по условию задачи потенциал φ не зависит ни от y, ни от z, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Пользуясь выражением для потенциала, найдем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-2ax;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-2a,$$

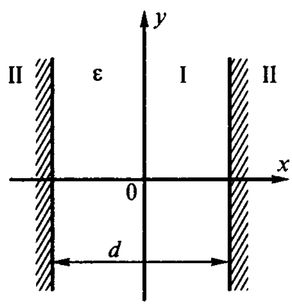


Рис. 13.16
Пластины плоского конденсатора

т. е. объемный заряд в межэлектродном пространстве распределен равномерно:

$$\rho=2\varepsilon a.$$

Для определения зарядов на пластинах конденсатора применим постулат Максвелла сначала для правой, а затем для левой пластины конденсатора.

Правая пластина:

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS}=\frac{Q}{\varepsilon};\ -E_{n1}S+E_{n2}S=\frac{Q}{\varepsilon}=\frac{\sigma S}{\varepsilon}.$$

Здесь S — площадь пластины, E_{n1} взята со знаком минус, а E_{n2} — со знаком плюс, т. к. положительной считается нормаль, направленная во внешнюю от ограничиваемого междуэлектродного пространства сторону в направлении оси x. Так как $E_{n2} = 0$ (напряженность ЭСП в проводящей среде), то $\sigma = -\varepsilon E_{n1}$.

Значение E_{n1}, т. е. напряженность поля в межэлектродном пространстве, найдем из выражения

$$E_{n1} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=\frac{d}{2}} = ad,$$

откуда $\sigma = -\varepsilon ad$.

Левая пластина:

$$\oint_S \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon};\ -E_{n2}S + E_{n1}S = \frac{\sigma S}{\varepsilon}.$$

Так как $E_{n2} = 0$, то $\sigma = E_{n1} \cdot \varepsilon$.

$$E_{n1} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=-\frac{d}{2}} = -ad\sigma = -\varepsilon ad.$$

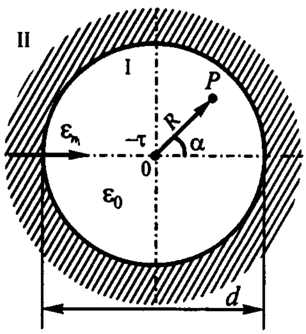


Рис. 13.17
Тонкая проволока в цилиндрической полости

Обе пластины заряжены отрицательно с поверхностной плотностью заряда $\sigma = -\varepsilon\alpha ad$. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 0$.

З а д а ч а 13.18. Зондовые исследования цилиндрической полости, вдоль оси которой натянута тонкая металлическая нить, дали распределение потенциала ЭП в ней:

$$\varphi = a(b\ln R - R^2),$$

где R — расстояние от оси симметрии полости до точки P наблюдения; a, b — постоянные. Диаметр полости равен d (рис. 13.17). Известно, что стенка полости является проводником. Найти распределение электрических зарядов внутри полости и на ее поверхности. Численное решение задачи выполнить для случая: $d = 2{,}5$ см; $a = 282$ В/м^2; $b = 6{,}4$ м^2; $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Р е ш е н и е.

Для определения объемных зарядов внутри полости воспользуемся уравнением Пуассона в цилиндрической системе координат

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Подставим в него соответствующие производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = a\left(\frac{b}{R} - 2R\right);\ R\frac{\partial\varphi}{\partial R} = a(b - 2R^2);\ \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = -4a;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Тогда плотность объемных зарядов $\rho = 4\varepsilon_0 a$ — const.

Объемный заряд в цилиндре произвольного радиуса $R \le d/2$ и длины l:

$$Q_v = \rho\pi R^2 l = 4\pi\varepsilon_0 a l R^2.$$

Определим поток вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность этого цилиндра:

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{dS} = Q = \int_V \rho dV + \int_\ell \tau dl;$$

$$\left(-\varepsilon_0 \frac{dU}{dR}\right) 2\pi R l = 4\pi\varepsilon_0 a l R^2 + \tau l.$$

Решая последнее уравнение относительно линейной плотности заряда τ, найдем его величину: $\tau = -2\pi\varepsilon_0 ab$.

Распределение поверхностных зарядов найдем из условия $D = \sigma$:

$$D = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \varepsilon_0 a\left(\frac{b}{R} - 2R)\right).$$

Таким образом, плотность поверхностных зарядов:

$$\sigma = \varepsilon_0 a\left(\frac{b}{R} - 2R\right).$$

Численное решение: $\rho = 10^{-8}$ Кл/м^3; $\tau = -10^{-7}$ Кл/м; $\sigma = 1{,}27 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

З а д а ч а 13.19. Рассчитать поле заряда, равномерно распределенного между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Заряд с постоянной объемной плотностью (рис. 13.18).

Р е ш е н и е.

Здесь имеет место цилиндрическая симметрия поля, так как напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ зависят только от одной координаты — от радиуса. В первой из областей ($0 \le r \le r_1$) поля нет, напряженность $\vec{E} = 0$. Во второй области ($r_1 \le r \le r_2$) поле описывается уравнением Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Так как потенциал зависит только от одной координаты r, то уравнение Пуассона упрощается:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

После первого интегрирования

$$r\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{r^2}{2}\frac{\rho}{\varepsilon} + C_1; \; \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{\rho r}{2\varepsilon} + \frac{C_1}{r}.$$

После второго интегрирования

$$\varphi_2 = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} + C_1 \ln r + C_2.$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

$$E_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\rho r}{2\varepsilon} - \frac{C_1}{r}$$

при $r = r_1$, $E_2 = 0$, поэтому $C_1 = \dfrac{\rho\, r_1^2}{2\varepsilon}$.

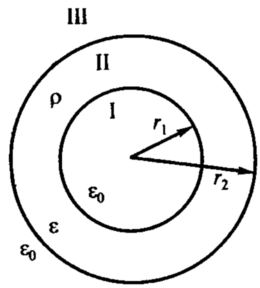


Рис. 13.18
Между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями равномерно распределен объемный заряд

Примем, что $\varphi = 0$ при $r = r_2$ (наружная цилиндрическая поверхность — оболочка заземлена). Тогда

$$0 = -\frac{\rho r_2^2}{4\varepsilon} + \frac{\rho r_1^2}{2\varepsilon}\ln r_2 + C_2,\; C_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon}\left(\frac{r_2^2}{3} - r_1^2 \ln r_2\right).$$

В третьей области при $r \geq r_2$ поле описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi_3}{\partial r}\right) = 0.$$

После первого интегрирования получим

$$r\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = C_3;\; \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \frac{C_3}{r}.$$

После второго интегрирования

$$\varphi_3 = C_3 \ln r + C_4,\; E_3 = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = -\frac{C_3}{r}.$$

Определим теперь постоянные интегрирования C_3 и C_4. На границе раздела II и III области ($r_1 = r_2$) должны быть равны нормальные составляющие вектора электрического смещения ($D_{2n} = D_{3n}$). В нашем случае вектор электрического смещения, как и вектор напряженности ЭСП, направлен по радиусу, т. е. имеет только нормальную составляющую:

$$D_{2(r=r_2)} = \varepsilon E_2 = \frac{pr_2}{2} - \frac{pr_1^2}{2r_2},\; D_{3(r=r_2)} = \varepsilon E_3 = -\varepsilon\frac{C_3}{r_2}.$$

Приравнивая эти два выражения, находим постоянную

$$C_3 = -\frac{\rho}{2\varepsilon}(r_2^2 - r_1^2).$$

Постоянную интегрирования C_4 находим из условия, что при $r = r_2$, $\varphi_3 = 0$:

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4,\; C_4 = -C_3 \ln r_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon}(r_2^2 - r_1^2)\ln r_2.$$

Решение уравнений Лапласа и Пуассона разделением переменных. Метод подробно изложен в гл. 6, п. 6.2, а его применение при решении задач широко используется в разделе III (например, в гл. 20, 21).

13.5. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Этот метод применяется в случаях, когда требуется определить поле зарядов, расположенных вблизи границы раздела сред с различными электрическими свойствами. При расчете поля зарядов, расположенных вблизи хорошо проводящей поверхности, влияние индуцированных на ней зарядов заменяется полем отображений, сосредоточенных по другую сторону границы раздела. При этом:

а) алгебраическая сумма зарядов-отображений должна быть равна и противоположна по знаку действительному заряду, т. е. общая сумма всех зарядов должна быть равна нулю;

б) результирующее поле от действительного заряда и зарядов-отображений должно удовлетворять граничным условиям поставленной задачи.

З а д а ч а 13.20. Определить емкость на единицу длины бесконечно длинного провода, проходящего на расстоянии h от проводящей поверхности (от земли), если радиус провода $r_0 \ll h$ (рис. 13.19).

Р е ш е н и е.

Индуцированный заряд, распределенный по проводящей поверхности, равен по величине и противоположен по знаку индуцирующему заряду. Линейная плотность заряда провода — τ. Пользуясь методом зеркальных отображений, заменим поле индуцированного заряда полем линейного заряда $-\tau$, расположенного как зеркальное отображение действительного заряда, и будем рассчитывать поле обоих зарядов, полагая, что оба они находятся в воздухе. При этом граничные условия поставленной задачи будут выполнены, так как плоскость симметрии поля, совпадающая с проводящей поверхностью реальной задачи, будет поверхностью нулевого потенциала.

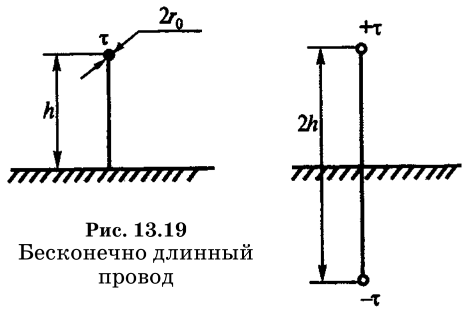


Рис. 13.19
Бесконечно длинный провод

Таким образом, поле между линией и зарядом $+\tau$ и землей оказывается частью поля двухпроводной линии с зарядами $+\tau$ и τ, и для него справедливы выражения (13.25), (13.26). Потенциал провода относительно границы раздела согласно (13.26):

$$\varphi_{\text{пр}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}.$$

Здесь $a = r_0$; $b = 2h - r_0$, поэтому

$$\varphi_{\text{пр}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h - r_0}{r_0} \approx \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h}{r_0}.$$

Емкость провода относительно земли (на единицу длины провода):

$$C = \frac{Q_{\text{пр}}}{\varphi_{\text{пр}}} = \frac{\tau l}{l} \cdot \frac{2\pi\varepsilon}{\tau \ln\dfrac{2h}{r_0}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2h}{r_0}}.$$

З а д а ч а 13.21. Для железной дороги, электрифицированной на постоянном токе (напряжение между контактным проводом и землей $U = 3300$ В), определить напряженность ЭП и потенциал, если:

а) человек стоит на земле под контактным проводом. Высота подвеса контактного провода $h = 6{,}5$ м;

б) человек стоит на платформе под контактным проводом, высота платформы 1,2 м;

в) на крыше вагона электропоезда ($h = 4{,}1$ м).

Рост человека в соответствии с нормативными документами, регламентирующими предельно допустимые уровни воздействия ЭМП на человека, принимается 1,8 м. Во всех случаях точки изолированы от земли. Контактный провод марки МФ100 — медный фасонный сечением 100 мм^2.

Р е ш е н и е.

По методу зеркальных отображений поле между контактным проводом и землей является частью поля двухпроводной линии, как и в предыдущей задаче (см. рис. 13.19). Радиус провода

$$r_0 = \sqrt{\frac{S_{пр}}{\pi}} = \sqrt{\frac{100}{3{,}14}} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Напряженность поля и потенциал в каждой точке определятся по формулам (13.25) и (13.26). Величину τ линейного заряда определим из задачи 13.18.

Потенциал контактного провода:

$$\varphi_{пр} = 3300 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2h}{r_0},$$

отсюда

$$\tau = 3300 \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{2h}{r_0}} = 3300 \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{13}{5{,}6 \cdot 10^{-3}}} = 426{,}2 \cdot 2\pi\varepsilon.$$

а) Человек стоит (или идет) на земле под контактным проводом:

$$E_A = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{c}{ab} = 426{,}2 \frac{13}{4{,}7 \cdot 8{,}3} = 142 \text{ В/м},$$

здесь $c = 2h = 2 \cdot 6{,}5 = 13$ м; $a = 6{,}5 - 1{,}8 = 4{,}7$ м; $b = c - a = 13 - 4{,}7 = 8{,}3$ м.

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} = 426{,}2 \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{8{,}3}{4{,}7} = 242 \text{ В.}$$

б) Человек стоит на платформе под контактным проводом:

$$E_B = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{c}{ab} = 426{,}2 \frac{13}{3{,}5 \cdot 9{,}5} = 195 \text{ В/м},$$

$$\varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} = 426{,}2 \ln \frac{9{,}5}{3{,}5} = 425 \text{ В},$$

здесь $a = 6{,}5 - (1{,}2 + 1{,}8) = 3{,}5$ м; $b = c - a = 13 - 3{,}5 = 9{,}5$ м.

в) Крыша вагона электропоезда:

$$E_c = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{c}{ab} = 426{,}2 \frac{13}{2{,}4 \cdot 10{,}6} = 217{,}8 \text{ В/м},$$

$$\varphi_c = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a} = 426{,}2 \ln \frac{10{,}6}{2{,}4} = 633 \text{ В},$$

здесь $a = 6{,}5 - 4{,}1 = 2{,}4$ м; $b = c - a = 13 - 2{,}4 = 10{,}6$ м.

З а д а ч а 13.22. Определить напряженность ЭП и потенциал в тех же точках от контактной сети железной дороги, электрифицированной на переменном токе. Действующее значение напряжения в контактной сети $U = 27{,}5$ кВ, максимальное значение напряжения $U_{max} = U\sqrt{2} = 38{,}8$ кВ. Геометрические размеры те же, что и в предыдущей задаче.

Р е ш е н и е.

Значения E и φ определяются по выражениям (13.25) и (13.26). Из-за линейности среды при увеличении напряжения в $\frac{38{,}8}{3{,}3} = 11{,}76$ раз во столько же раз увеличатся значения E и φ в рассматриваемых точках:

а) $E_A = 142 \cdot 11{,}76 = 1670$ В/м; $\varphi_A = 242 \cdot 11{,}76 = 2846$ В;
б) $E_B = 195 \cdot 11{,}76 = 2293$ В/м; $\varphi_B = 425 \cdot 11{,}76 = 5007$ В;
в) $E_C = 217{,}8 \cdot 11{,}76 = 2561$ В/м; $\varphi_C = 633 \cdot 11{,}76 = 7444$ В.

Отметим, что уровень напряженности ЭП не должен превышать 15 кВ/м.

З а д а ч а 13.23. Плоская проводящая поверхность согнута под прямым углом. Вблизи вершины угла проходит линейный проводник параллельно сторонам поверхности (рис. 13.20). Расстояния до поверхности: $a = 1{,}7$ см, $b = 1$ см, радиус провода $R_0 = 0{,}1$ см; диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = \varepsilon_0$. Определить емкость на единицу длины проводника.

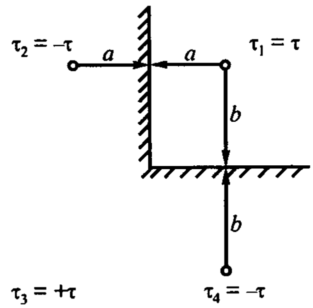


Рис. 13.20
Линейный проводник около проводящей поверхности, согнутой под прямым углом

Р е ш е н и е.

Воспользуемся методом зеркальных отображений. Предположим, что заряд проводника на единицу длины равен τ и что проводящая поверхность заземлена. Расположим заряды в вершинах прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, как указано на рис. 13.20. Заряды отображения в сумме с действительным зарядом должны создать нейтральную систему, поэтому $\tau_2 = -\tau$; $\tau_3 = \tau$; $\tau_4 = -\tau$. При таком расположении зарядов поверхность нулевого потенциала будет плоскостью симметрии, с которой совпадают стороны заданного угла.

Для определения емкости системы «провод — согнутая поверхность» определим потенциал провода относительно этой поверхности в поле четырех линейных зарядов, находящихся в воздухе. Можем считать, что в рассматриваемом случае имеются две линии передач с зарядами τ_1, τ_2 и с зарядами τ_3, τ_4.

Как известно, например, из задачи 13.13 (13.26), в поле двухпроводной линии передачи потенциал в точке, расположенной на расстоянии R_1 от положительного заряда и расстоянии R_2 от отрицательного заряда:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Ввиду того что $R_0 \ll a$ и $R_0 \ll b$, неравномерное распределение заряда по поверхности провода не учитываем. При этом потенциал провода относительно поверхности в поле зарядов τ_1, τ_2:

$$\varphi' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2a}{R_0}.$$

Потенциал провода в поле зарядов τ_3, τ_4:

$$\varphi'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2b}{\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}}.$$

Суммарный потенциал провода:

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{2a}{R_0} + \ln\frac{2b}{\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}}\right) =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2ab}{R_0\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2a}{R_o\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}}.$$

Емкость провода относительного заземленной поверхности на единицу длины провода:

$$C = \frac{\tau}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2a}{R_0\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}}}.$$

Численное решение: C = 20 пкФ.

Задача 13.24. Два разноименных заряда $+Q$ и $-q$ расположены на расстоянии d. Доказать, что поверхность нулевого потенциала есть сфера. Определить радиус этой сферы и расстояние Δ от ее центра до меньшего заряда ($-q$).

Решение.

Обозначим $n = \frac{Q}{q}$. Рассчитаем потенциал в произвольной точке P с координатами (x, y, z), поместив в начало координат заряд $-q$ (рис. 13.21):

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{nq}{\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}}\right).$$

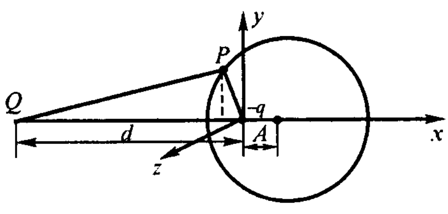


Рис. 13.21
Два разноименных заряда

Приравняв $\varphi(x, y, z) = 0$, найдем уравнение эквипотенциальной поверхности:

$$(d - x)^2 + y^2 + z^2 = n^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Преобразованиями [13.1] можно получить

$$\left(x + \frac{d}{n^2-1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{n^2d^2}{(n^2-1)^2}.$$

Это уравнение сферической поверхности радиуса $R = \frac{nd}{(n^2-1)^2}$ с центром на оси Ox, причем $\Delta = \frac{d}{n^2-1}$ — расстояние от точки расположения заряда $-q$ до центра сферической поверхности.

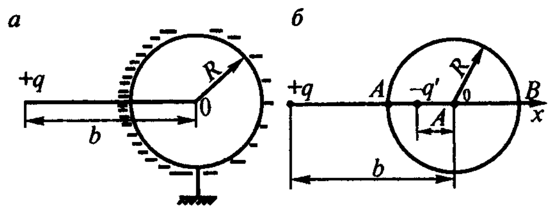


Рис. 13.22
Заземленная металлическая сфера и заряд

З а д а ч а 13.25. Заряд $+q$ находится на расстоянии b от центра заземленной металлической сферы радиуса R (рис. 13.22). Требуется найти максимальную и минимальную плотности заряда, наведенного на сфере.

Р е ш е н и е.

По методу зеркальных отображений система «заряд — сфера» заменяется системой двух разноименных зарядов. Фиктивный заряд $-q'$ (рис. 13.22) создает свое поле, которое компенсирует поле заряда $+q$ так, чтобы потенциал сферы оказался равным нулю (сфера заземлена). Наведенный на сфере заряд будет неодинаков. Очевидно, что в точке A плотность наведенного на сфере заряда будет больше, в точке B — меньше.

Используя решение предыдущей задачи, можно определить величину фиктивного заряда и его положение: фиктивный отрицательный заряд q', равный $\dfrac{q}{n}$, помещается на расстоянии Δ от центра сферы: $\Delta = \dfrac{d}{n^2-1}$, где $d = b - \Delta$ — расстояние между зарядами; радиус сферы $R = \dfrac{dn}{n^2-1}$.

Выполнив преобразования

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{b-\Delta}{n^2-1} \\ R &= \frac{(b-\Delta)}{n^2-1} \end{aligned}\right\} \to \Delta = \frac{b}{n^2};\ R = \frac{\left(b - \dfrac{b}{n^2}\right)n}{n^2-1} = \frac{b}{n},$$

получим $n = \dfrac{b}{R}$; $q' = q\dfrac{R}{b}$; $\Delta = \dfrac{R^2}{b}$.

Напряженность поля на внешней поверхности сферы, обусловленная зарядами $+q$ и $-q'$ [13.2]:

в точке A:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{(b-R)^2} + \frac{q'}{(R-\Delta)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon(b-R)^2}\left(1 - \frac{b}{R}\right),$$

вектор E_A направлен внутрь сферы;

в точке B:

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{(b+R)^2} + \frac{q'}{(R+\Delta)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon(b+R)^2}\left(1 - \frac{b}{R}\right),$$

вектор E_B также направлен внутрь сферы; $E_B < 0$, т. к. $\dfrac{b}{R} > 1$.

Поверхностную плотность зарядов в точках A и B найдем из условия $\sigma = D = \varepsilon E$:

$$\sigma_A = -\frac{q\left(1+\frac{b}{R}\right)}{4\pi(b-R)^2}; \ \ \sigma_B = -\frac{q\left(\frac{b}{R}-1\right)}{4\pi(b+R)^2}.$$

13.6.
МЕТОДЫ РАСЧЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

З а д а ч а 13.26. Двухпроводная линия над землей. Провода подвешены на разной высоте — h_1 и h_2 (рис. 13.23). Расстояние между проводами — h_{12}, линейные заряды проводов — $\tau_1 = +\tau$; $\tau_2 = -\tau$. Радиусы проводов $r_0 << y$. Определить емкость между проводами на единицу длины.

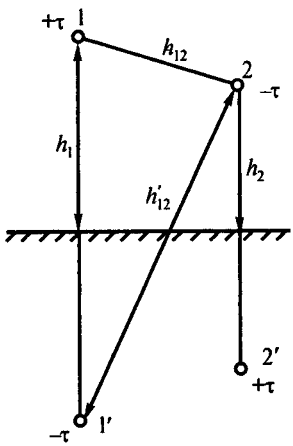


Рис. 13.23
Воздушная двухпроводная линия

Р е ш е н и е.

Потенциалы проводов, записанные с помощью потенциальных коэффициентов, равны

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 = \tau(\alpha_{11} - \alpha_{12}), \quad (13.27)$$
$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = \tau(\alpha_{12} - \alpha_{22}). \quad (13.28)$$

Для определения собственного потенциального коэффициента α_{11} нужно положить,что $\tau_2 = 0$. В этом случае поле будет таким же, как поле однопроводной линии над землей или как поле двухпроводной линии без земли (см. задачу 13.14):

$$\alpha_{11} = \frac{\varphi_1}{\tau_1} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{r_0}.$$

Аналогично

$$\alpha_{22} = \frac{\varphi_2}{\tau_2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{r_0}.$$

Для определения взаимного потенциального коэффициента α_{21} нужно, например, в уравнении (13.28) положить, что $\tau_2 = 0$. В этом случае потенциал в точке расположения второго провода определится как потенциал в точке 2 от первого провода и его изображения:

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h'_{12}}{h_{12}}; \ \alpha_{21} = \alpha_{12} = \frac{\varphi_2}{\tau} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h'_{12}}{h_{12}}.$$

Емкость между проводами на единицу длины (с учетом выражения для α_{11}, α_{12}):

$$C = \frac{\tau}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h_1}{r_0} + \ln\frac{2h_2}{r_0} - 2\ln\frac{h'_{12}}{h_{12}}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{4h_1h_2h_{12}^2}{r_0^2\left(h'_{12}\right)^2}}.$$

Если провода подвешены очень высоко над землей, то $h_1 \approx h_2 \approx 0{,}5h'_{12}$. Тогда

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{h_{12}^2}{r_0^2}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{h_{12}}{r_0}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{r_0}},$$

если принять h_{12} равным d.

Задача 13.27. Известны частичные емкости трехжильного кабеля $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0{,}064$ мкФ/км; $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0{,}076$ мкФ/км. При испытании кабеля в лаборатории одна из жил была заземлена ($\varphi_1 = 0$), другая имела потенциал $\varphi_2 = 2000$ В, третья — $\varphi_3 = -3000$ В. Оболочка кабеля не заземлена. Найти потенциал оболочки ($\varphi_{об}$) и заряды Q_1, Q_2, Q_3.

Решение.

Частичные емкости используются в выражениях, связывающих заряды тел и их потенциалы:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= C_{11}(\varphi_1 - \varphi_{об}) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3),\\
Q_2 &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - \varphi_{об}) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3),\\
Q_3 &= C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2) + C_{33}(\varphi_3 - \varphi_{об}).
\end{aligned} \tag{13.29}$$

Имеем три уравнения с четырьмя неизвестными. Для составления 4-го уравнения соединим жилы 1, 2, 3 (при этом $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$). Получим конденсатор — три соединенные жилы — оболочка: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{об}$.

Заряд оболочки равен нулю, так как ее не заряжали. Поскольку она не заземлена, то наведенный заряд на ней тоже отсутствует (электростатическая индукция от зарядов жил приводит лишь к перераспределению зарядов на оболочке, общий же ее заряд равен нулю). По закону сохранения заряда суммарный заряд жил после их соединения останется таким же, каким был до соединения, т. е. получаем четвертое уравнение: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$.

Складывая выражения (13.29) с учетом того, что $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$, $C_{23} = C_{32}$, найдем

$$C_{11}(\varphi_1 - \varphi_{об}) + C_{22}(\varphi_2 - \varphi_{об}) + C_{33}(\varphi_3 - \varphi_{об}) = 0,$$

откуда

$$\varphi_{об} = \frac{C_{11}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3}{C_{11} + C_{22} + C_{33}} = -333 \text{ В}.$$

Подставляя найденное значение $\varphi_{об}$ в (13.29), найдем $Q_1 = 97$ мкКл/км; $Q_2 = 682$ мкКл/км; $Q_3 = -779$ мкКл/км.

Замечания к задаче 13.27:

1) Заряды тел и их потенциалы, кроме выражений (13.29), связаны также через потенциальные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2 + \alpha_{13}Q_3;\\
\varphi_2 &= \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2 + \alpha_{23}Q_3;\\
\varphi_3 &= \alpha_{31}Q_1 + \alpha_{32}Q_2 + \alpha_{33}Q_3,
\end{aligned} \tag{13.30}$$

или через коэффициенты электростатической индукции:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3; \\ Q_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3; \\ Q_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3; \end{aligned} \tag{13.31}$$

2) Коэффициенты α, β и частичные емкости $C_{кп}$ связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13}; \\ C_{21} &= \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23}; \\ C_{31} &= \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33}; \\ C_{12} &= C_{21} = -\beta_{12} = -\beta_{21}; \\ C_{13} &= C_{31} = -\beta_{13} = -\beta_{31}; \\ C_{23} &= C_{32} = -\beta_{23} = -\beta_{32}; \end{aligned} \tag{13.32}$$

$$\begin{aligned} &\beta_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \ \beta_{12} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \ \beta_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}}{\Delta}; \\ &\beta_{23} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}}{\Delta}; \ \beta_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; \ \beta_{33} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}; \\ &\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{13.33}$$

и коэффициенты α можно выразить через коэффициенты β по формулам (13.33), заменив $\alpha \to \beta$; $\beta \to \alpha$.

13.7. РАСЧЕТ СИЛ, МОМЕНТОВ И ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Сила взаимодействия точечных электрических зарядов. Сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов f определяется по закону Кулона:

$$f = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon r^2},$$

где Q_1, Q_2 — электрические заряды, Кл; r — расстояние между зарядами, м.

Сила f направлена по прямой, соединяющей точки, в которых сосредоточены заряды Q_1, Q_2.

З а д а ч а 13.28. Четыре заряда, помещенные в диэлектрик, располагаются в вершинах квадрата со стороной $a = 14{,}1$ см (рис. 13.24*а*). Определить силу, действующую на первый заряд, если $Q_1 = 2\cdot10^{-9}$ Кл; $Q_2 = 4\cdot10^{-9}$ Кл; $Q_3 = -4\cdot10^{-9}$ Кл; $Q_4 = -2\cdot10^{-9}$ Кл; $\varepsilon = 3\varepsilon_0$.

Решение.

Задача решается с использованием принципа наложения механических сил, согласно которому суммарная сила, действующая на заряд, равна геометрической сумме действующих на него сил. На первый заряд действуют три силы — от второго, третьего, четвертого зарядов. Применяя закон Кулона, найдем эти силы:

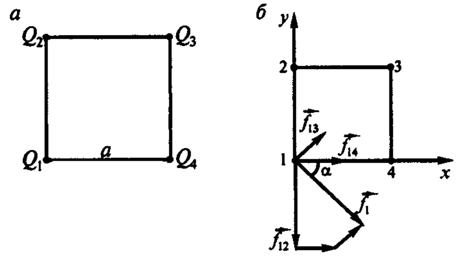


Рис. 13.24
Четыре заряда в диэлектрике, размещенные в углах квадрата

$$f_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\ a^2} = \frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 14{,}1^2\cdot 10^{-4}} = 1{,}21\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$f_{13} = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon\ r^2} = -\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 20^2\cdot 10^{-4}} = -0{,}603\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$f_{14} = \frac{Q_1 Q_4}{4\pi\varepsilon\ a^2} = -\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 14{,}1^2\cdot 10^{-4}} = -0{,}603\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2\cdot 14{,}1^2} = 20\ \text{см}.$$

Величину f_1 находим как геометрическую сумму сил $\overrightarrow{f_{12}}$, $\overrightarrow{f_{13}}$, $\overrightarrow{f_{14}}$ (рис. 13.24*б*). Аналитически ее можно найти по проекциям:

$$f_{1x} = f_{12x} + f_{14x} + f_{13x} = 0 + 0{,}603\cdot 10^{-6} + 0{,}603\cdot 10^{-6}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}030\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$f_{1y} = -f_{12y} + f_{14y} + f_{13y} = -1{,}21\cdot 10^{-6} + 0 + 0{,}603\cdot 10^{-6}\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}784\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$f = \sqrt{f_{1x}^2 + f_{1y}^2} = \sqrt{1{,}030^2 + 0{,}784^2}\cdot 10^{-6} = 1{,}295\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Задача 13.29. Требуется определить силу притяжения обкладок заряженного конденсатора, отсоединенного от источника ЭДС.

Решение.

Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе:

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C},\ \text{так как } Q = UC.$$

При $Q = \text{const}$

$$f = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{Q=\text{const}} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial C}{\partial g} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g}.$$

Найдем силу притяжения пластин конденсатора, подсоединенного к источнику ЭДС:

$$f = \left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{U=\text{const}} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g}.$$

Задача 13.30. Определить величину и направление механических сил, действующих на обкладки цилиндрического конденсатора, если разность потенциалов между электродами $U = 1000$ В, радиус внутреннего цилиндра

$R_1 = 2$ см, внешнего — $R_2 = 3$ см; длина конденсатора $l = 30$ см, диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 2\varepsilon_0$. Краевым эффектом можно пренебречь.

Решение.

Определяем обобщенную силу, действующую на внутренний и внешний электроды, через производную по обобщенной координате. Энергия поля цилиндрического конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Полагая, что разность потенциалов поддерживается постоянной, определим усилие, испытываемое внутренним цилиндром:

$$F_1 = \frac{\partial W}{\partial R_1} = \frac{\pi\varepsilon l U^2}{R_1 \ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\varepsilon E_1^2}{2} S_1,$$

где E_1 — напряженность поля на поверхности, а S_1 — площадь электрода.

По своему характеру обобщенная сила представляет здесь растяжение, которое испытывается внутренним цилиндром в направлении увеличения радиуса R_1.

Для внешнего электрода

$$F_2 = \frac{\partial W}{\partial R_2} = \frac{\pi\varepsilon l U^2}{R_2 \ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\varepsilon E_2^2}{2} S_2$$

получаем сжатие в направлении уменьшения радиуса R_2.

Численное решение: $F_1 \cong 5\cdot 10^{-3}$ Н; $F_2 \cong 3{,}4\cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 13.31. Вводом высоковольтного импульсного вакуумного прибора служит тонкий металлический стержень круглого сечения, проходящий внутри стеклянной трубки (рис. 13.25). Внутренний радиус трубки $R_1 = 5$ см, внешний — $R_2 = 5{,}4$ см; диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon_2 = 6\varepsilon_0$, воздуха — $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$; линейная плотность заряда на стекле $\tau = 10^{-5}$ Кл/м.

Определить величину и направление механических усилий, возникающих на поверхности стеклянной трубки, если поле конструкции можно считать близким к полю заряженной нити.

Решение.

Диэлектрик, находящийся в электрическом поле, испытывает натяжения, причем сила, действующая на единицу поверхности границы раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями, может быть определена с помощью соотношения [13.3]

$$f = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}(D_n^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 E_t^2), \tag{13.34}$$

где D_n — нормальная по отношению к границе раздела составляющая вектора электростатической индукции; E_t — тангенциальная составляющая вектора напряженности поля.

Сила нормальна по отношению к поверхности раздела и направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Считаем, что поле в трубке аналогично полю линейного заряда. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ радиальны, имеют по отношению к границе раздела «стекло — воздух» только нормальную составляющую.

Воспользуемся вектором индукции

$$D_n = \frac{\tau}{2\pi R},\ D_t = 0$$

и подставим его в выражение (13.34)

$$f = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\frac{\tau}{2\pi R}\right)^2.$$

Результирующая проекция плотности силы, действующей на наружную поверхность стекла в направлении увеличения радиуса R_2:

$$f_{R_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\cdot\frac{\tau^2}{8\pi^2 R_2^2}.$$

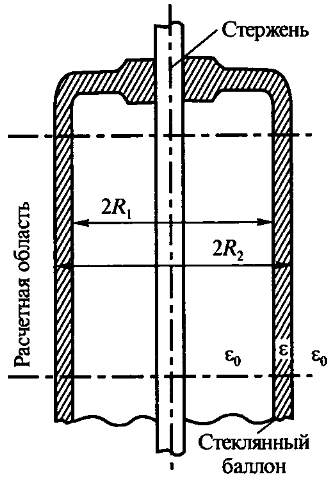


Рис. 13.25
Ввод высоковольтного импульсного вакуумного прибора

Плотность силы, действующей на внутренней поверхности стекла, равна

$$f_{R_1} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\cdot\frac{\tau^2}{8\pi^2 R_1^2}$$

и направлена к оси трубки. Численное решение: $f_{R_1} = -47{,}6$ Н/м; $f_{R_2} = 41$ Н/м.

Контрольные вопросы

1. Причиной появления электростатического поля являются источники (дайте полный ответ).

Варианты:
а) электрические заряды;
б) электрические токи;
в) электрические заряды и электрические токи;
г) электрические заряды, электрические токи и изменения МП во времени.

2. Электрическая напряженность ЭП (ЭМП) $\vec{E}$ — это... (дайте полный ответ).

Варианты:
а) векторная величина, характеризующая ЭП;
б) силовое воздействие ЭП на внесенное тело или заряженную частицу;
в) сила, действующая на единичный электрический заряд к величине заряда;
г) векторная величина, характеризующая ЭП и определяемая отношением силы, действующей на единичный электрический заряд к величине заряда;
д) градиент некоторой скалярной функции, называемой потенциалом.

3. Электрическая индукция ЭП $\vec{D}$ — это... (дайте полный ответ).

Варианты:
а) векторная величина, характеризующая ЭП;
б) плотность электрического потока через замкнутую;
г) сила, действующая на единичный электрический заряд, к величине заряда;
д) градиент некоторой скалярной функции, называемой потенциалом.

4. Наличие ЭП в некоторой области пространства определяется через... (дайте полный ответ).

Варианты:

а) измерение величины $\vec{E}$ в этой области пространства;

б) измерение величин $\vec{E}$, $\vec{D}$ в этой области пространства;

в) измерение величин $\vec{D}$ в этой области пространства;

г) измерение электрических сил взаимодействия в этом пространстве.

5. Статическое ЭП в данной области пространства можно описать уравнениями... (выберите ответ).

Варианты:

а) $\operatorname{rot}\vec{E}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=\rho,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E};$

б) $\operatorname{rot}\vec{E}=0,\ \operatorname{div}\vec{D}=0,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E};$

в) $\operatorname{rot}\vec{E}=\vec{\delta},\ \operatorname{div}\vec{D}=\rho,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E};$

г) $\Delta\vec{E}=0,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}.$

6. Электростатический режим экранирования основан на... (дайте наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) использовании явления электростатической индукции и заключается в замыкании зарядов на «землю» или корпус электрооборудования, для экранирования может быть применен очень тонкий экран из магнитного или немагнитного металла и даже диэлектрика;

б) использовании явления электростатической индукции и заключается в замыкании зарядов на «землю» или корпус электрооборудования, для экранирования может быть использован лишь металлический экран;

в) создании около защищаемого объекта тонкого металлического экрана и отведении скапливающихся на нем электрических зарядов и возникающих токов (при облучении объекта электростатическим полем) на землю.

7. Статическое МП можно описать уравнениями... (выберите ответ).

Варианты:

а) $\operatorname{rot}\vec{H}=0,\ \operatorname{div}\vec{B}=0,\ \vec{B}=\mu\vec{H};$

б) $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{\delta},\ \operatorname{div}\vec{B}=0,\ \vec{B}=\mu\vec{H};$

в) $\Delta\vec{H}=0,\ \vec{B}=\mu\vec{H}.$

8. Под термином «магнитостатическое экранирование» понимают... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) замыкание силовых линий МП в материале экрана, у которого цель — отвод магнитного потока из защищаемой области, а при конструировании магнитостатических экранов используются только магнитные материалы;

б) замыкание силовых линий МП в материале экрана, при конструировании магнитостатических экранов используются только магнитные материалы, а используют их одновременно и как электростатические экраны;

в) устройства, изготавливаемые из ферромагнитных материалов и предназначенные для отведения части магнитного потока из защищаемой области;

г) устройства, изготавливаемые из ферромагнитных материалов и предназначенные для отведения части магнитного и электрического потоков из защищаемой области.

9. Метод расчета статических полей с помощью конформных преобразований основан на... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) замене действительного поля, которое из-за сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, другим полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу заменяемого поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения известны;

б) замене при расчете статических и квазистатических полей реального поля, которое из-за сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, другим полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу заменяемого поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения известны;

в) замене при расчете физических полей действительного поля, которое из-за сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, другим полем, каждый бесконечно малый элемент площади которого подобен соответствующему ему бесконечно малому элементу заменяемого поля, но очертание границ имеет простую форму, для которой расчетные уравнения известны.

10. При физическом моделировании статических полей следует соблюсти... (выберите ответ).

Варианты:

а) масштабные и временны́е коэффициенты при переходе от реального устройства к модельному;

б) масштабные коэффициенты при переходе от реального устройства к модельному;

в) временны́е коэффициенты при переходе от реального устройства к модельному;

г) при переходе от реального устройства к модельному должны быть учтены масштабные коэффициенты, временны́е и формы реального устройства и модели.

11. Метод расчета статических полей разделением переменных заключается в следующем... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) в качестве переменных выступают координаты соответствующей системы координат, и общее решение задачи находят как сумму частных решений для каждой из координат;

б) распределение статических полей, описываемых линейными однородными уравнениями в частных производных в однородных изотропных средах, может быть найдено сведением задач к частным решениям;

в) распределение статических полей, описываемых линейными однородными уравнениями в частных производных в однородных изотропных средах, может быть найдено сведением задач к частным решениям. Подлежащее интегрированию дифференциальное уравнение записывают в соответствующих координатах q_1, q_2, q_3 и пытаются находить частные решения этого уравнения в форме произведения функций, зависящих каждая только от одной из переменных. Так как исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, то сумма произвольного числа найденных таким способом частных решений есть опять решение.

12. Метод расчета статических полей с помощью зеркальных отображений заключается в следующем... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) метод зеркальных отображений используется в задачах с поверхностями раздела в виде плоскости кругового цилиндра или сферы, на которых могут появиться наведенные заряды или токи, закон распределения которых неизвестен, с помощью зеркальных отображений задача сводится к эквивалентной задаче расчета поля в однородной среде, а действие наведенных зарядов и токов учитывается введением фиктивных зарядов и токов, которые находятся из граничных условий исходной задачи;

б) метод зеркальных отображений используется в задачах с неоднородными средами для упрощения расчета напряженностей поля, путем сведения неоднородной задачи к однородной задаче с соответствующими граничными условиями;

в) метод зеркальных отображений используется в задачах с многослойными неоднородными средами, в которых разделяющие слои поверхности ограничены поверхностями второго порядка, на которых могут появиться наведенные заряды или токи, закон распределения которых не известен, с помощью зеркальных отображений задача сводится к эквивалентной задаче расчета поля в однородной среде, а действие наведенных зарядов и токов учитывается введением фиктивных зарядов и токов, которые находятся из граничных условий исходной задачи;

г) метод зеркальных отображений используется в задачах с поверхностями раздела, на которых могут появиться наведенные заряды или токи, закон распределения которых не известен, с помощью зеркальных отображений задача сводится к эквивалентной задаче расчета поля в однородной среде.

13. Принцип соответствия плоскопараллельных ЭП и МП заключается в... (выберите ответ).

Варианты:

а) в соответствии ряда величин: $\rho \leftrightarrow \delta$, $\varphi \leftrightarrow A_Z$, $\varepsilon \leftrightarrow 1/\mu$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$, $\tau \leftrightarrow I$, $U \leftrightarrow \Phi$, $C \leftrightarrow 1/L$, где C, τ, L, Φ — соответственно емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток, а z — координата распространения поля;

б) в соответствии ряда величин: $\varphi \leftrightarrow A_Z$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$, $U \leftrightarrow \Phi$, где z — координата распространения поля;

в) в соответствии ряда величин: $\rho \leftrightarrow \delta$, $\varphi \leftrightarrow A_Z$, $\varepsilon \leftrightarrow 1/\mu$, $\tau \leftrightarrow I$, $C \leftrightarrow 1/L$, где C, τ, L, Φ — соответственно емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток, а z — координата распространения поля;

г) в соответствии ряда величин: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$, $\tau \leftrightarrow I$, $U \leftrightarrow \Phi$, $C \leftrightarrow 1/L$, где C, τ, L, Φ — соответственно емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток.

14

ГЛАВА 14

РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ОТ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

14.1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Внутри проводников, по которым протекает электрический ток, существует электрическое поле. В изотропной среде напряженность поля связана с плотностью тока соотношением

$$\vec{J} = \gamma\vec{E}, \qquad (14.1)$$

где γ — удельная проводимость.

Выражение (14.1) называют законом Ома в дифференциальной форме. Действительно, умножив левую и правую часть (14.1) на сечение проводника $S_{\text{пр}}$, а также умножив и разделив правую часть (14.1) на длину проводника $l_{\text{пр}}$, получим

$$JS_{\text{пр}} = \gamma\frac{S_{\text{пр}}}{l_{\text{пр}}}\cdot El_{\text{пр}};$$

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (14.1a)$$

Второе уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

в поле постоянных токов имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0. \qquad (14.2)$$

В интегральной форме уравнение (14.2) записывается

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = 0;\ \sum U = 0, \qquad (14.2a)$$

что представляет собой второй закон Кирхгофа, поэтому уравнение (14.2) так и называют: второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Линии тока в проводящей среде всюду непрерывны (принцип непрерывности электрического тока):

$$\operatorname{div}\vec{\delta} = 0. \qquad (14.3)$$

В интегральной форме это уравнение имеет вид

$$\oint_S \vec{E}d\vec{s} = 0; \ \sum I = 0, \qquad (14.3a)$$

что представляет собой первый закон Кирхгофа, поэтому уравнение (14.3) соответственно называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме.

Таким образом, уравнения (14.1)–(14.3) представляют собой законы электрических цепей постоянного тока (постоянного, т. к. закон Ома в виде (14.1) учитывает только активное сопротивление проводника, в отличие от цепей переменного тока, где необходимо также учитывать емкость конденсатора и индуктивность катушки). Поэтому задачи на расчет цепей постоянного тока, которые приводятся в разделе курса ТОЭ «Теория линейных электрических цепей постоянного тока», по существу, являются примерами расчета ЭП поля постоянных токов.

Поле в диэлектрике, окружающем проводники с токами, характеризуется уравнениями

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0; \ \mathrm{div}\,\vec{D} = 0; \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$$

Так как $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$, то поле потенциальное. $E = -\mathrm{grad}\varphi$, $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, то

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = 0; \nabla^2\varphi = 0, \qquad (14.4)$$

а в декартовой системе координат:

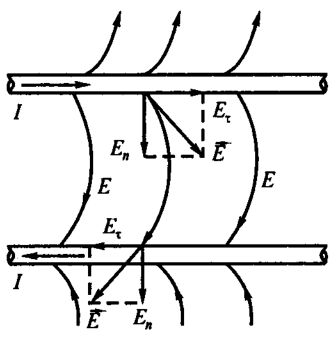


Рис. 14.1
Распределение ЭП между проводниками с током

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (14.5)$$

Таким образом, в диэлектрике, окружающем проводники с токами, поле описывается тем же уравнением Лапласа, как и в ЭСП.

Граничные условия на поверхности проводник–диэлектрик в рассматриваемом поле отличаются от электростатического. В ЭСП поверхность проводящего тела является поверхностью равного потенциала, линии напряженности нормальны к поверхностям проводящих тел $\vec{E} = E_n$. В рассматриваемом поле векторы напряженности имеют не только нормальную, но и тангенциальную составляющую E_τ (при прохождении тока по проводнику возникает падение напряжения $U = E_\tau l$). Поэтому линии напряженности поля подходят к проводнику не под прямым углом (как в ЭСП), а под некоторым, отличным от прямого (рис. 14.1).

Так обстоит дело, если рассматривать вопрос строго теоретически. Практически же обычно $E_\tau \ll E_n$ и касательной составляющей можно пренебречь. Действительно, пусть на расстоянии $d = 10$ см друг от друга находятся два параллельных провода. Напряжение между ними $U = 100$ В. Плотность тока в проводе $\delta = 5$ А/мм^2. Провода медные $\gamma = 58$ м/Ом·мм^2.

$$E_\tau = \frac{J}{\gamma} = \frac{5}{58} = 0{,}086 \text{ В/м}; \ E_n = \frac{U}{d} = \frac{100}{0{,}1} = 10^3 \text{ В/м}; \ \frac{E_n}{E_\tau} > 10^4; \ \vec{E} \cong E_n.$$

Поэтому при рассмотрении ЭП в диэлектрике, окружающем проводники с токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении задач при расчете ЭСП.

Решения, полученные при рассмотрении электростатических задач, можно использовать также при анализе ЭП внутри проводящих тел с постоянными токами или токами низкой частоты, т. к. между уравнениями ЭП в проводящей среде и уравнениями ЭСП существует аналогия, приведенная в табл. 14.1.

В таблице ψ_D — поток вектора $\vec{D}$ сквозь некоторую поверхность S равен части заряда заряженного тела (рис. 14.2). Здесь $\psi_{D1} = \Delta Q_1$; $\psi_{D2} = \Delta Q_2$; $\psi_{D3} = \Delta Q_3$; $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = Q$ — заряду тела 1.

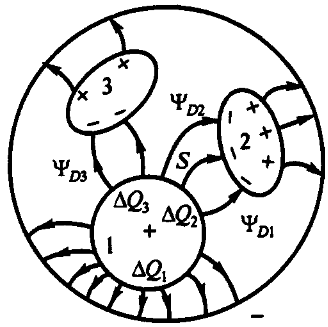


Рис. 14.2
Распределение электрических потоков между заряженными телами

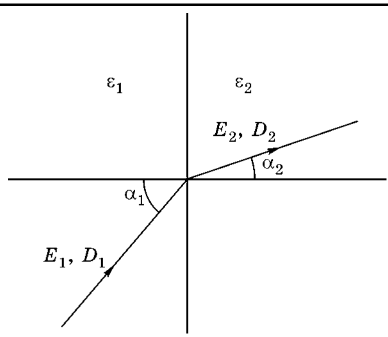
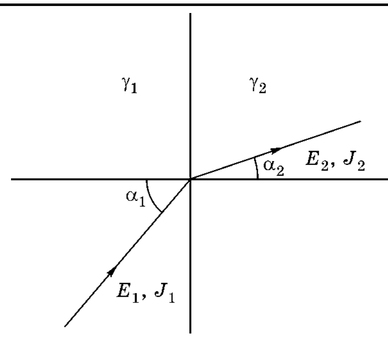
Таблица 14.1

Соотношения между уравнениями ЭП в проводящей среде и уравнениями ЭСП

ЭП-поле в проводящей среде	ЭСП	ЭП-поле в проводящей среде	ЭСП
$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$	$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$	$\int_S \vec{\delta} d\vec{s} = I$	$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \psi_D \ \ (\psi_D = \Delta Q)$
$\operatorname{div}\vec{\delta} = 0$	$\operatorname{div}\vec{D} = 0$	$I = GU$	$\psi_D = CU$

Таблица 14.2

Граничные условия на поверхности раздела сред в ЭСП и ЭП в проводящей среде

ЭСП	ЭП в проводящей среде
	
$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$E_{1\tau} = E_{2\tau}$
$D_{1n} = D_{2n}$	$J_{1n} = J_{2n}$
$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Используя вышеприведенную аналогию, можно получить решение задач электрического поля в проводящей среде на основе решений ЭСП и наоборот, если заменить

$$\varepsilon \leftrightarrow \gamma,\ D \leftrightarrow J,\ C \leftrightarrow G,\ \psi_D \leftrightarrow I.$$

Аналогичны также и граничные условия на поверхности раздела сред в электростатическом и электрическом поле в проводящей среде (см. табл. 14.2)

Выводы, полученные на основе табл. 14.1 и 14.2, позволяют моделировать экспериментально ЭСП электрическим полем в проводящей среде, используя для этого проводящую бумагу (если производится моделирование на плоскости) или электролитическую ванну, если производится объемное моделирование.

14.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

З а д а ч а 14.1. Плоский конденсатор с многослойным диэлектриком имеет площадь обкладок $S = 25$ см^2, толщины слоев $d_1 = 2$ см, $d_2 = 3$ см, $d_3 = 2$ см и удельные проводимости в слоях: $\gamma_1 = 10^{-10}$ 1/Ом·м; $\gamma_2 = 1{,}5\cdot 10^{-10}$ 1/Ом·м; $\gamma_3 = 10^{-10}$ 1/Ом·м. Определить сопротивление утечки и емкость конденсатора, используя метод электростатической аналогии.

Р е ш е н и е.

Электрический ток проводимости в конденсаторе вследствие конечной проводимости диэлектриков одинаков во всех слоях и равен $I = \delta S$ (здесь и далее в задачах обозначает плотность электрического тока). Так как S одинаково, то и δ одинаково во всех слоях, поэтому

$$E_1 = \frac{\delta}{\gamma_1};\ E_2 = \frac{\delta}{\gamma_2};\ E_3 = \frac{\delta}{\gamma_3};$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = \delta\left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3}\right) = \frac{I}{S}\left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3}\right);$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{S}\left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} + \frac{d_3}{\gamma_3}\right).$$

Проводимость утечки $G_{\text{ут}} = 1/R$, откуда

$$C = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d_3}{\varepsilon_3}}.$$

З а д а ч а 14.2. Коаксиальный кабель имеет радиус прямого провода (жилы) $r_1 = 1$ см; внутренний радиус обратного провода (оболочки) $r_3 = 3$ см. Изоляция состоит из двух слоев. Граничная поверхность между ними имеет радиус $r_2 = 2$ см. Удельная проводимость слоев: $\gamma_1 = 10^{-10}$ 1/Ом·м; $\gamma_2 = 2\cdot 10^{-10}$ 1/Ом·м. Определить сопротивление утечки $R_{\text{ут}}$ и емкость кабеля на 1 км длины.

Р е ш е н и е.

По аналогии с предыдущей задачей

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S},$$

где I — ток утечки, $S = 2\pi rl$ — поверхность цилиндра.

$E_1 = \dfrac{I}{2\pi r_1 l\gamma_1}$ — напряженность поля на внутренней границе 1-го слоя.

$E_2 = \dfrac{I}{2\pi r_2 l\gamma_2}$ — то же на внутренней границе 2-го слоя (рис. 14.3).

Напряжение между проводами кабеля:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr = \frac{\tau}{2\pi l}\left[\frac{1}{\gamma_1}\ln r\Bigg|_{r_1}^{r_2} + \frac{1}{\gamma_2}\ln r\Bigg|_{r_2}^{r_3}\right];$$

$$R_{\text{ут}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi l}\left(\frac{1}{\gamma_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right);$$

$$G_{\text{ут}} = \frac{1}{R_{\text{ут}}};\ C = \frac{2\pi l}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{r_3}{r_2}}.$$

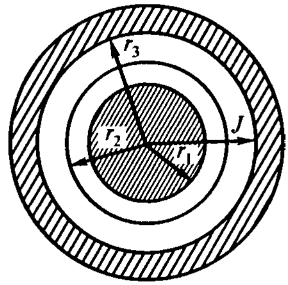


Рис. 14.3
Сечение коаксиального кабеля

З а д а ч а 14.3. Плоский конденсатор с двухслойным диэлектриком $d_1 = d_2 = 1$ см; $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$; $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$; $\gamma_1 = 2{\cdot}10^{-10}$ Сим/см; $\gamma_2 = 10^{-10}$ Сим/см подключен к источнику постоянного напряжения 3 кВ.

Требуется определить: 1) напряженность ЭП, сопротивление конденсатора и мощность, выделяющуюся в единице объема диэлектрика, а также свободный и связанный поверхностные заряды на границе слоев; 2) как изменится решение задачи, если диэлектрик будет идеальным ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$).

Р е ш е н и е.

1. По определению напряжение $U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$; граничное условие $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ (т. е. $\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$). Из двух уравнений находим

$$E_1 = 1 \text{ кВ/см};\ E_2 = 2 \text{ кВ/см};$$
$$\delta_1 = \delta_2 = 0{,}2 \text{ мкА/см}^2;$$
$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = 2000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2;\ D_2 = \varepsilon_2 E_2 = 8000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2;$$
$$P_1 = (\varepsilon_1 - 1)E_1 = 1000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2;\ P_2 = (\varepsilon_2 - 1)E_2 = 6000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2.$$

Тогда $q_{\text{своб}} = D_2 - D_1 = 6000\varepsilon_0$ Кл/см^2; $q_{\text{связ}} = P_1 - P_2 = -5000\varepsilon_0$ Кл/см^2, где ε_0 — Ф/см. Потери активной мощности в единице объема:

$$p_1 = \gamma_1 E_1^2 = 0{,}2 \text{ мВТ/см}^3 \text{ и } p_2 = \gamma_2 E_2^2 = 0{,}4 \text{ мВТ/см}^3.$$

2. Сопротивление конденсатора на единицу площади пластин $R_0 = U/\delta = 1{,}5{\cdot}10^{10}$ Ом/см^2. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ по-прежнему $U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$. Граничное условие

$$D_{1n} = D_{2n},$$

т. е. $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$. Из двух уравнений получим

$$E_1 = 2 \text{ кВ/см};\ E_2 = 1 \text{ кВ/см};$$
$$D_1 = D_2 = 4000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2;$$
$$P_1 = (\varepsilon - 1)E_1 = 2000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2;\ P_2 = (\varepsilon_2 - 1)E_2 = 3000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2;$$
$$q_{\text{своб}} = D_2 - D_1 = 0;\ q_{\text{связ}} = -1000\varepsilon_0 \text{ Кл/см}^2.$$

З а д а ч а 14.4. К плоской проводящей шайбе (рис. 14.4) подводится напряжение от источника постоянного напряжения 1,57 В при помощи двух медных радиально расположенных пластин, врезанных в шайбу. Проводимость материала шайбы $\gamma = 2\cdot10^6$ Сим/м. Требуется определить наибольшее и наименьшее значения плотности тока в шайбе и ток через источник. Размеры шайбы: $r_1 = 50$ мм; $r_2 = 80$ мм; толщина $d = 1$ мм. Потенциал каждой медной пластины считать во всех ее точках постоянным.

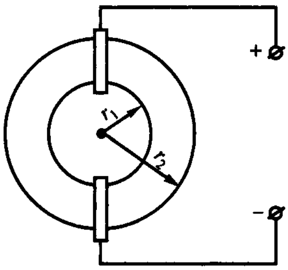


Рис. 14.4
Проводящая шайба с двумя радиально врезанными медными пластинами

Р е ш е н и е.

Считая, что линии плотности тока и напряженности поля совпадают с полуокружностями и напряженность поля зависит от радиуса, из уравнения $U = \int \bar{E} d\bar{\ell}$ получаем

$$E = U/\pi r \text{ и } \delta = \gamma E = U\gamma/\pi r.$$

Тогда

$$\delta_{max} = U\gamma/\pi r_1 = 2\cdot10^7 \text{ А/м}^2;\ \delta_{min} = U\gamma/\pi r_2 = 1{,}25\cdot10^7 \text{ А/м}^2,$$

а ток

$$I = 2\int \bar{\delta} d\bar{s} = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{U\gamma d}{\pi r} dr = \frac{2U\gamma d}{\pi} \ln\frac{r_2}{r_1} = 940 \text{ А}.$$

З а д а ч а 14.5. Между электродами сферического конденсатора находится диэлектрик, удельная проводимость которого меняется в функции расстояния R от центра сфер по закону $\gamma = \gamma_0/R$, где $R_1 < R < R_2$, $\gamma_0 = 10^{-4}$ Сим/м. Радиусы внутренней и внешней сфер соответственно: $R_1 = 1$ см, $R_2 = 5$ см. Ток утечки через несовершенную изоляцию $I = 0{,}2$ А. Требуется найти закон изменения потенциала между электродами и проводимость утечки конденсатора.

Р е ш е н и е.

Так как плотность утечки $\delta = I/4\pi R^2$, напряженность электрического поля $E = IR/(4\pi R^2\gamma_0)$. Потенциал между электродами изменяется по закону

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma_0}\ln(1/R) + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия $\varphi = 0$ при $R = R_2$:

$$C = \frac{I}{4\pi\gamma_0}\ln R_2.$$

Закон изменения потенциала между электродами:

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma_0}\ln(R_2/R) = 159\ln\frac{5\cdot10^{-2}}{R}.$$

Напряжение между электродами:

$$U = \frac{I}{4\pi\gamma_0}\ln\frac{R_2}{R_1} = 256 \text{ В}.$$

Полная проводимость утечки:

$$G = \frac{I}{U} = 7{,}82 \cdot 10^{-4} \text{ Сим.}$$

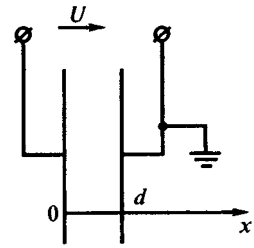


Рис. 14.5
Плоский конденсатор

З а д а ч а 14.6. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком с $\varepsilon = 5\varepsilon_0$ и проводимостью $\gamma = \gamma_0 - kx$, где $\gamma_0 = 10^{-10}$ Сим/см, $k = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ Сим/см^2, x — координата, перпендикулярная плоскости пластин (рис. 14.5). Расстояние между обкладками $d = 1$ см, конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U = 1$ кВ. Требуется определить распределение свободных и связанных объемных зарядов.

Р е ш е н и е.

По закону Ома $E = \delta/\gamma$; в постоянном поле $\operatorname{div}\vec{\delta} = 0$ или в декартовой системе координат (при $\vec{\delta} = \delta_x$) $\frac{\partial \delta_x}{\partial x} = 0$ и, следовательно, $\delta = \text{const}$. Выразим напряжение на конденсаторе через напряженность поля:

$$U = \int_0^d \vec{E} d\vec{x} = \int_0^d \frac{\vec{\delta} d\vec{x}}{\gamma_0 - kx} = -\frac{\delta}{k} \ln(\gamma_0 - kx)\Big|_0^d,$$

откуда

$$U = \frac{\delta}{k} \ln \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - kd} = \frac{\delta}{G_0},$$

где G_0 — проводимость конденсатора на единицу площади пластин.

В нашем случае

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{722}{1 - 0{,}5x} \text{ В/см}; \; D = \varepsilon E = \frac{3610\varepsilon_0}{1 - 0{,}5x} \text{ Кл/см}^2;$$

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0) E \approx \frac{2900\varepsilon_0}{1 - 0{,}5x} \text{ Кл/см}^2;$$

$$\rho = \frac{dD}{dx} = 3610\varepsilon_0 \frac{0{,}5}{(1 - 0{,}5x)^2} = \frac{1805\varepsilon_0}{(1 - 0{,}5x)^2} \text{ Кл/см}^3;$$

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{dP}{dx} = -\frac{1450\varepsilon_0}{(1 - 0{,}5x)^2} \text{ Кл/см}^3.$$

З а д а ч а 14.7. К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметром D и высотой h припаяны провода диаметром d (рис. 14.6*а*). Определить сопротивление банки R, если она сделана из жести толщиной δ с удельной проводимостью $\gamma (\delta \ll d)$.

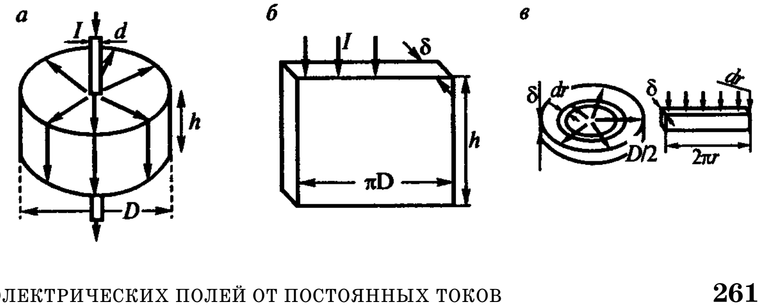


Рис. 14.6
Тонкостенная круговая цилиндрическая банка

Р е ш е н и е.

Ток последовательно протекает по верхнему основанию, боковой поверхности и нижнему основанию банки, поэтому ее сопротивление

$$R = R_{\text{осн}} + R_{\text{бок}} + R_{\text{осн}}.$$

Боковая поверхность имеет поперечное сечение $S = \pi D\delta$ (см. рис. 14.6*б*), длину $l = h$, поэтому

$$R_{\text{бок}} = \frac{l}{\gamma S} = \frac{h}{\gamma\pi D\delta}.$$

Основания разбиваем на узенькие кольца с радиусом r и шириной dr (рис. 14.6*в*), которые имеют сопротивление

$$dR = \frac{dr}{\gamma \cdot 2\pi r\delta}.$$

Ток протекает через кольца последовательно, поэтому сопротивление основания можно вычислить по формуле

$$R_{\text{осн}} = \int dR = \int\limits_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{dr}{\gamma 2\pi r\delta} = \frac{\ln\frac{D}{d}}{\gamma 2\pi\delta}.$$

Искомое сопротивление банки:

$$R = \frac{1}{\gamma\pi\delta}\left(\frac{h}{D} + \ln\frac{D}{d}\right).$$

З а д а ч а 14.8. Сферический заземлитель радиуса a находится в среде с относительно небольшой проводимостью γ. Ток, подводимый к заземлителю I. Определить сопротивление растеканию $R_{\text{р}}$. Заземлитель зарыт на глубину, во много раз превышающую его радиус. Полагая, что через заземлитель произошло замыкание на землю с линии $U = 35$ кВ, найти ток короткого замыкания, если $\gamma = 10^{-2}$ 1/Ом·м; $a = 0{,}5$ м.

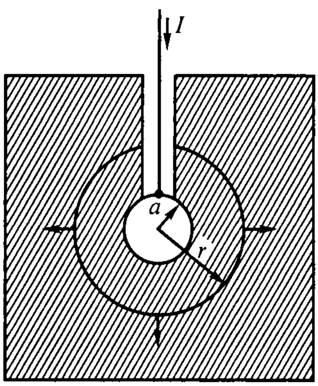


Рис. 14.7
Сферический заземлитель

Р е ш е н и е.

По условиям симметрии ток будет растекаться равномерно во все стороны. Линии плотности тока направлены радиально (рис. 14.7). На расстоянии r от центра заземлителя значение плотности тока

$$\delta = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

В той же точке напряженность ЭП:

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}.$$

Напряжение между рассматриваемой точкой в земле и поверхностью заземлителя:

$$U = \int_a^r E dr = \frac{1}{4\pi\gamma}\int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^r = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right).$$

С увеличением расстояния r напряжение стремится к пределу:

$$U_р = \frac{1}{4\pi\gamma a}.$$

Это предельное напряжение называется напряжением растекания. На расстоянии $r = 100a$ с достаточной степенью точности можно считать $U = U_р$. Отношение $U_р$ к I называют сопротивлением растекания (или сопротивлением заземлителя):

$$R_р = \frac{U_р}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a}.$$

Чем больше r, тем меньше почва влияет на сопротивление заземления. Значение

$$R_р = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5} = 15{,}9 \text{ Ом}.$$

Ток короткого замыкания через заземлитель:

$$I = \frac{U}{R_р} = \frac{35 \cdot 10^3}{15{,}9} = 2200 \text{ А}.$$

З а д а ч а 14.9. Полусферический заземлитель радиуса a погружен в землю вровень с ее поверхностью (рис. 14.8). Определить напряжение шага (шаговое напряжение) $U_ш$, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. Ток I, протекающий через заземлитель, задан.

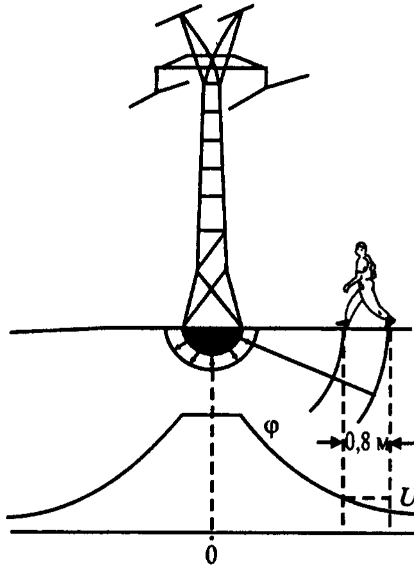


Рис. 14.8
Полусферический заземлитель

Р е ш е н и е.

Как известно, поверхность полусферы в два раза меньше поверхности сферы, поэтому на произвольном расстоянии r от центра заземлителя

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}.$$

Считая длину шага равной 0,8 м, найдем

$$U_ш = \int_r^{r+0{,}8} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0{,}8}\right) = \frac{0{,}8I}{2\pi\gamma}\frac{1}{r(r+0{,}8)}. \tag{14.6}$$

При $a = 50$ см; $\gamma = 10^{-2}$ 1/Ом·м; $I = 1000$ А; $r = 3$ м

$$U_ш = \frac{10^5}{6{,}28}(0{,}33 - 0{,}264) = 1050 \text{ В};$$

при $r = 5$ м $U_ш = 445$ В.

Если принять потенциал $\varphi = 0$ при $r \to \infty$, то в остальных точках на поверхности земли, начиная от $r = a$, потенциал

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\gamma r} = U_{\text{р}} \frac{a}{r}.$$

На рис. 14.8 показана кривая $\varphi = F(r)$.

Задача 14.10. Часто применяют заземлители в виде труб, забитых вертикально в землю. Определить сопротивление заземлителя, максимальное шаговое напряжение вблизи цилиндрического заземлителя длиной l, радиусом r_0 (рис. 14.9) при протекании по нему тока I, если удельная проводимость земли γ постоянна.

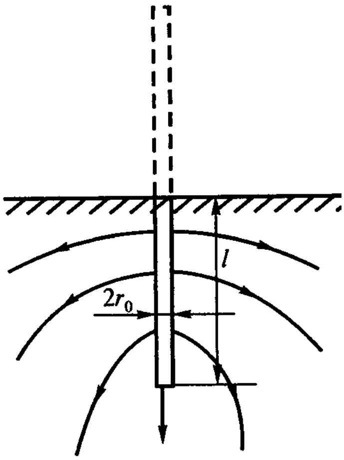


Рис. 14.9
Заземлитель в виде трубы, вертикально забитый в землю

Решение.

Воспользуемся методом электростатической аналогии и зеркальных отображений. Можно показать, что емкость цилиндра длиной $2l$ и радиусом r_0

$$C = \frac{4\pi\varepsilon l}{Ar\,\mathrm{sh}\,\dfrac{2l}{r_0} - \sqrt{\dfrac{r_0^2}{(2l)^2} + 1} + \dfrac{r_0}{2l}}.$$

Так как

$$Ar\,\mathrm{sh}\frac{2l}{r_0} = \ln\left(\frac{2l}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{2l}{r_0}\right)^2 + 1}\right),$$

то при $2l \gg r_0$

$$Ar\,\mathrm{sh}\frac{2l}{r_0} - \sqrt{\frac{r_0^2}{(2l)^2} + 1} + \frac{r_0}{2l} \approx \ln\frac{4l}{r_0} - 1 = \ln\frac{2l}{r_0} + \ln 2 - 1 = \ln\frac{2l}{r_0} - 0{,}307 \approx \ln\frac{2l}{r_0}.$$

Т. е. рассматриваемая емкость

$$C = \frac{4\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{2l}{r_0}}.$$

Следовательно, проводимость системы из электрода и его зеркального отображения:

$$G = \frac{4\pi\gamma l}{\ln\dfrac{2l}{r_0}}.$$

Проводимость трубы как половины этой системы:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\dfrac{2l}{r_0}}.$$

Сопротивление заземлителя (оно же сопротивление растекания):

$$R = \frac{\ln\frac{2l}{r_0}}{2\pi\gamma l}.$$

При определении проводимости заземлителя (при $\frac{2l}{r_0} \gg 1$) мы пришли к выводу, что поле такого заземлителя соответствует полю бесконечного цилиндра (на небольших расстояниях от заземлителя). Напряженность такого поля:

$$E = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi r\varepsilon l}.$$

Произведя замену $Q \to I$, $\varepsilon \to \gamma$, имеем

$$E = \frac{I}{2\pi r\gamma l},$$

где r — расстояние от оси заземлителя.

При длине шага 0,8 м

$$U_{\text{ш}} = \int_r^{r+0,8} \vec{E}d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\gamma l}\int_r^{r+0,8}\frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi\gamma l}\ln\frac{r+0,8}{r}.$$

Максимальное шаговое напряжение будет при $r = r_0$.

При $I = 100$ А, $\gamma = 10^{-2}$ 1/Ом·м, $l = 2$ м, $r_0 = 4$ см — $U_{\text{ш}} = 2424$ В.

З а д а ч а 14.11. Заземление проводов длинной телеграфной линии осуществлено посредством металлических шаров с радиусами r_1 и r_2, глубоко зарытых в землю. Удельная проводимость грунта вблизи заземлителей равна соответственно γ_1 и γ_2. Найти сопротивление земли между заземлителями.

Р е ш е н и е.

Вдали от заземлителей линии тока в земле сильно расходятся; сечение участка, который они пересекают, становится очень большим и поэтому его сопротивлением можно пренебречь. Таким образом, сопротивление земли между заземлителями приблизительно равно сумме сопротивлений заземлителей (см. задачу 2.8):

$$R_з = R_{p1} + R_{p2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2}\right).$$

З а д а ч а 14.12. Два полусферических заземлителя, имеющие радиус $r_0 = 20$ см, помещены на расстояние $d = 15$ м друг от друга (рис. 14.10). При напряжении $U = 6$ В между ними идет ток $I = 75$ мА. Определить проводимость почвы, пренебрегая ее неоднородностью и контактным сопротивлением между почвой и заземлителем.

Р е ш е н и е.

Сопротивление между заземлителями:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6}{0,075} = 80 \text{ Ом}.$$

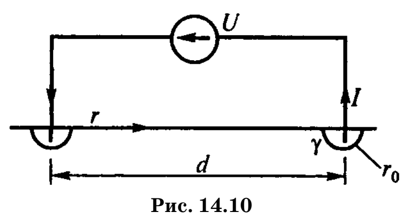


Рис. 14.10
Два полусферических заземлителя

Распределение тока в почве можно рассматривать как сумму токов растекания каждого из заземлителей. На кратчайшем пути между заземлителями плотности созданных ими токов складываются. Для определения напряжения между заземлителями достаточно на этом участке удвоить падение напряжения, созданное током, растекающимся с одного из заземлителей.

От каждого из заземлителей:

$$U = \int_{r_0}^{d-r_0} \vec{E}\overrightarrow{dr} = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{\delta}{\gamma} dr = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{Idr}{\gamma S_{\text{заземл}}}.$$

От обоих заземлителей:

$$U = 2\int_{r_0}^{d-r_0} \frac{Idr}{2\pi\gamma r^2} = -\frac{I}{\pi\gamma r}\Bigg|_{r_0}^{a-r_0} = \frac{I(a-2r_0)}{\pi\gamma r_0(a-r_0)}.$$

Сопротивление растекания:

$$R_{\text{р}} = \frac{U}{I} = \frac{a-2r_0}{\pi\gamma r_0(a-r_0)},$$

откуда

$$\gamma = \frac{a-2r_0}{R_{\text{р}}\pi r_0(a-r_0)} \approx 0{,}02 \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}.$$

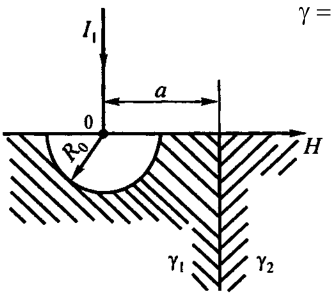


Рис. 14.11
Полусферический заземлитель в грунте

З а д а ч а 14.13. Полусферический заземлитель радиусом R_0 расположен в грунте, как показано на рис. 14.11. Расстояние от центра полусферы до поверхности раздела двух слоев различного грунта: a. Удельные проводимости слоев грунта γ_1 и γ_2, при этом $\gamma_1 > \gamma_2$. Постоянный ток, стекающий через заземлитель в грунт I_1. Требуется получить закон изменения потенциала в функции расстояния. При решении принять потенциал $\varphi = 0$ при $R \to \infty$.

Р е ш е н и е.

Для решения задачи воспользуемся методом электростатической аналогии и методом зеркальных отображений.

В п. 6.1 рассмотрен метод зеркальных отображений в случаях, когда требуется определить поле зарядов, расположенных вблизи границ раздела с хорошо проводящими поверхностями. Однако это только часть задач, которые можно решить с помощью метода зеркальных отображений. Другая часть относится к случаю, когда заряд (или заряды) расположены в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1 вблизи границы раздела с другим однородным диэлектриком, имеющим проницаемость ε_2. Требуется рассчитать ЭП в обеих средах.

Пусть точечный заряд Q расположен в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1 на расстоянии a от плоской поверхности раздела этого диэлектрика с другим однородным диэлектриком с проницаемостью ε_2 (рис. 14.12*а*). Требуется рассчитать ЭП в обеих средах.

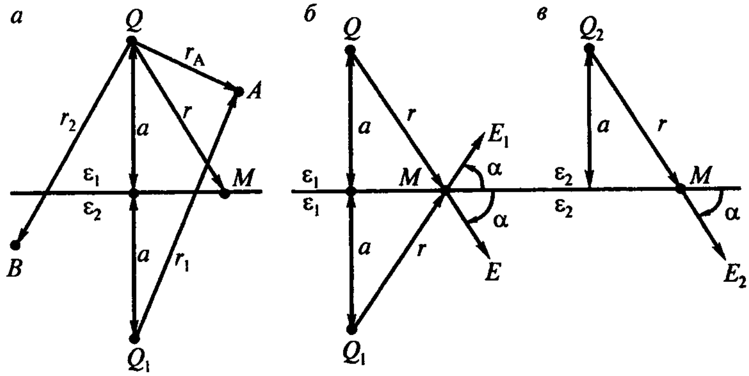


Рис. 14.12
Электрический заряд на границе двух сред с разными диэлектрическими проницаемостями

На поверхности раздела двух диэлектриков появляются связанные заряды, влияющие на электрическое поле в обеих средах. Распределение этих зарядов неизвестно, поэтому, воспользовавшись методом зеркальных отображений, подберем такие заряды Q_1 и Q_2 (рис. 14.12*б, в*), которые совместно с заданным зарядом Q создадут такое же электрическое поле, как заданный заряд Q и связанные заряды на плоскости раздела. Величина, знак и расположение зарядов Q_1 и Q_2 (назовем их фиктивными зарядами) определяются из граничных условий исходной задачи. При этом заряды Q и Q_1 определяют поле в среде ε_1, а заряд Q_2 — в среде с ε_2.

Так как в исходной задаче

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, D_{n1} = D_{n2},$$

то этим же условиям должны удовлетворять поля принятой модели (т. е. с учетом зарядов Q_1 и Q_2).

Напряженности от зарядов Q и Q_1 в некоторой точке M, лежащей на поверхности раздела сред со стороны первой среды (рис. 14.12*б*):

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2};\ E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}.$$

Суммарная касательная составляющая в точке M в первой среде:

$$E_{\tau 1} = E\cos\alpha + E_1\cos\alpha = \frac{Q + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\alpha.$$

Касательная составляющая в точке M со стороны второй среды (рис. 14.12*в*):

$$E_{\tau 2} = E_2\cos\alpha = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\alpha.$$

Нормальные составляющие вектора $\vec{D}$ в точке M соответственно:

$$D_{n1} = D\sin\alpha - D_1\sin\alpha = \frac{Q - Q_1}{4\pi r^2}\sin\alpha;$$

$$D_{n2} = D\sin\alpha = \frac{Q_2}{4\pi r^2}\sin\alpha.$$

На основании предыдущих равенств получаются два выражения для искомых зарядов Q_1 и Q_2:

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q, \tag{14.7}$$

$$Q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q. \tag{14.8}$$

Потенциал в точке A среды ε_1 задачи рис. 14.11a:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r_A} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\cdot\frac{1}{r_1}\right),$$

в точке B среды ε_2:

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r_2} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r_2}.$$

Для проверки правильности выбранной модели определим потенциал в точке M задачи, где был один заряд Q, в первой среде (заряды Q и Q_1), во второй среде (заряд Q_2), т. е. при $r_A = r_1 = r_2$:

$$\varphi_M = \varphi_{1M} = \varphi_{2M} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r}.$$

Как следует из выражений (14.7) и (14.8), для зарядов Q_1 и Q_2 знак заряда Q_2 всегда совпадает со знаком заряда Q; знак заряда Q_1 совпадает со знаком Q, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и противоположен ему, если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ заряды $Q_1 = 0$; $Q_2 = Q$, а при $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ заряд $Q_1 = -Q$, что соответствует случаю, когда вторая среда является проводником ($\varepsilon_2 \to \infty$).

Теперь вернемся к исходной задаче. Произведем замену

$$Q \to I,\ \varepsilon \to \gamma.$$

Для расчета поля в среде с удельной проводимостью γ_1 воспользуемся схемой, показанной на рис. 14.13a.

Пренебрежем взаимным влиянием электродов и сдвигом электрических центров относительно геометрических. Фиктивный ток, стекающий со второго электрода в грунт, $I_2 = k_1 I_1$, где $k_1 = [(\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2)]$, $0 < k_1 < 1$. Потенциал произвольной точки M:

$$\varphi_M = \frac{I_1}{2\pi\gamma_1 R} + \frac{I_1 k_1}{2\pi\gamma_1 (2a - R)} + C_1.$$

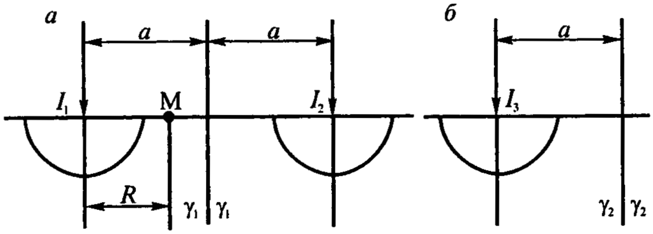


Рис. 14.13
Вспомогательная схема для расчета

Так как $C_1 = 0$, то для области $R_0 < R < a$ получим

$$\varphi = \frac{I_1}{2\pi\gamma_1}\left(\frac{1}{R} + \frac{k}{2a - R}\right).$$

Для расчета поля в среде с удельной проводимостью γ_2 используем расчетную схему (рис. 14.13*б*).

Фиктивный ток $I_3 = k_2 I_1$, где $k_2 = 2\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$, $0 < k_2 < 1$. При $a < R < \infty$

$$\varphi_2 = \frac{k_2 I_1}{2\pi\gamma_2 R}.$$

Задача 14.14. а) Составить схемы для определения частичных емкостей трехфазной воздушной ЛЭП (рис. 14.14) при помощи электролитической ванны, глубина которой $h = 20$ мм. б) Подобрать амперметр с необходимыми пределами измерений, если проводимость электролита $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ Сим/см и при моделировании размеры линии уменьшены в 10 раз. В распоряжении экспериментатора имеется источник напряжения с ЭДС 50 В. в) Определить необходимую проводимость электролита, если в распоряжении экспериментатора имеются приборы: вольтметр на 50 В и миллиамперметр на 300 мА.

Решение.

По определению частичных емкостей

$$\begin{aligned}
&C_{11} = \tau_1/(\varphi_1 - \varphi_0);\\
&C_{22} = \tau_2/(\varphi_2 - \varphi_0);\\
&C_{33} = \tau_3/(\varphi_3 - \varphi_0) \text{ при } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3;\\
&C_{12} = C_{21} = \tau_2/(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ при } \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_0;\\
&C_{13} = C_{31} = \tau_1/(\varphi_1 - \varphi_3) \text{ при } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0;\\
&C_{23} = C_{32} = \tau_2/(\varphi_2 - \varphi_3) \text{ при } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0.
\end{aligned}$$

а) Вместо частичных емкостей будем измерять частичные проводимости G; затем вычислим емкости по формуле

$$C = G\frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Схемы для измерения проводимостей G_{11} и G_{12} приведены на рис. 14.14*а, б*.

б) Наибольшие из частичных емкостей данной системы $C_{11} - C_{33} = 7{,}05$ мкФ/м. Следовательно, наибольшая проводимость (рис. 14.14*а*) $G_{11} = C_{11}\gamma/\varepsilon_0 = I_1/hU$. Отсюда наибольший ток при заданном напряжении источника:

$$I_{max} = UhC_{11}\gamma/\varepsilon_0 = 1{,}59 \text{ А}.$$

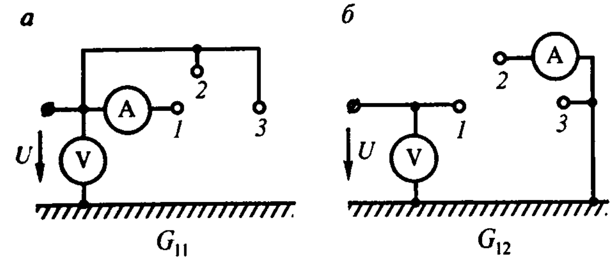


Рис. 14.14
Схемы для определения частичных емкостей трехфазной ЛЭП

В результате можем выбрать миллиамперметр с верхним пределом измерений 300 мА.

в) При заданном максимальном токе $I_{\max} = 300$ мА проводимость электролита находится из того же соотношения:

$$\gamma = I_{\max}\varepsilon_0/UC_{11}h = 3{,}77\cdot10^{-3}\ \text{Сим/см}.$$

14.3. ЭНЕРГИЯ, СИЛЫ И МОМЕНТЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

14.3.1. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Простейшими примерами ЭП могут служить поля, связанные с неподвижными в пространстве (относительно наблюдателя) и неизменными во времени электрическими зарядами. Такие поля часто называют ЭСП.

На практике, подразумевая энергию ЭП, созданного системой заряженных тел (зарядов), часто говорят об энергии именно таких тел, не уточняя, что эта энергия связана не столько с телами и их зарядами, сколько с самим полем этих заряженных тел.

Рассмотрим энергию ЭП уединенного заряженного проводящего тела. Для этого рассмотрим весь процесс зарядки этого тела от источника, начиная с нулевого заряда и до состояния, в котором тело получило определенный заряд Q.

Подсчитав работу, которую совершит источник энергии в течение всего процесса зарядки, и условившись, что этот процесс происходил без каких-либо потерь энергии, мы на основании закона сохранения энергии сможем принять найденную работу за энергию поля этого тела.

Предположим, что зарядка тела заключается в перенесении на него зарядов в бесконечности, где потенциал поля принимается равным нулю. Тогда за бесконечно малый отрезок времени dt, в течение которого телу был дополнительно сообщен заряд dQ, источник совершил работу

$$dA = \varphi dQ,$$

где φ — потенциал заряженного тела в рассматриваемый момент времени.

Всю работу, затраченную источником при сообщении телу заряда Q, определим интегрированием бесконечно малой работы за весь период зарядки:

$$A = \int_0^Q \varphi dQ,$$

т. е. от значения заряда, равного нулю, до его конечного значения Q.

Для того чтобы выполнить интегрирование, необходимо выразить подынтегральную функцию φ через независимую переменную Q. Сделать это нетрудно, прибегая к понятию потенциального коэффициента тела:

$$\varphi = \alpha Q.$$

Подставляя это выражение для потенциала под знак интеграла, получим

$$A = \int_0^Q \alpha Q dQ = 0{,}5\alpha Q^2$$

или, заменяя обратно произведение αQ на φ, приходим к выражению для работы в виде

$$A = 0{,}5\varphi Q.$$

Энергия системы заряженных тел может быть определена как сумма энергий отдельных входящих в систему заряженных тел:

$$W_e = 0{,}5\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k Q_k. \qquad (14.9)$$

Задача 14.15. Требуется определить энергию заряженного конденсатора.

Решение.

Так как конденсатор представляет собой систему из двух заряженных тел, то энергия его ЭП получается из двух слагаемых:

$$W_e = 0{,}5(\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2).$$

Так как заряды обкладок конденсатора всегда одинаковы по величине и противоположны по знаку:

$$Q_1 = -Q_2 = Q,$$

то для энергии можно написать:

$$W_e = 0{,}5(\varphi_1 - \varphi_2)Q.$$

Принимая во внимание, что разность потенциалов обкладок представляет собой напряжение между ними, т. е. напряжение U, до которого заряжен конденсатор, для энергии конденсатора (энергии его ЭП) получим

$$W_e = 0{,}5UQ = 0{,}5CU^2 = 0{,}5(Q^2/C). \qquad (14.10)$$

14.3.2. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Каждый элемент пространства, занятого ЭП, несет в себе определенный запас энергии, обусловленный этим полем и зависящий от его интенсивности. В связи с этим вводят понятие об объемной плотности энергии ЭП, представляющей собой отношение энергии W_e, запасенной в данной области поля, к объему v этой области:

$$W_e' = W_e / v.$$

Если же оперировать областью бесконечно малого объема dv, с которой связан бесконечно малый запас энергии dW_e, то мы аналогичным отношением определим понятие об объемной плотности энергии в данной точке поля:

$$W_e' = dW_e / dv. \qquad (14.11)$$

Очевидно, что в равномерном поле понятия о средней объемной плотности энергии и объемной плотности энергии в данной точке совпадают.

Выражение для объемной плотности энергии ЭП можно вывести на примере плоского конденсатора. Этот пример удобен тем, что, во-первых, поле плоского конденсатора равномерно, а во-вторых, оно четко ограничено областью между пластинами (пренебрежем искажением поля у краев пластин конденсатора).

Представив энергию ЭП конденсатора в виде

$$W_e = 0{,}5UQ,$$

выразим его напряжение U через напряженность поля E и расстояние d между пластинами:

$$U = Ed,$$

а заряд Q — через поверхностную плотность σ заряда пластин, равную электрическому смещению D, и площадь s пластины:

$$Q = \sigma s = Ds.$$

Тогда для энергии конденсатора имеем

$$W_e = 0{,}5Ed \cdot Ds = 0{,}5EDv, \qquad (14.12)$$

где v — объем пространства между пластинами.

Отсюда для объемной плотности энергии ЭП получим

$$W_e' = W_e / v = 0{,}5ED.$$

Пользуясь известным соотношением $D = \varepsilon E$, последнее выражение можно представить еще в двух формах:

$$W_e' = 0{,}5\varepsilon E^2 = 0{,}5D^2 / \varepsilon. \qquad (14.13)$$

14.3.3. ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СИЛ В СИСТЕМЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Рассмотрим систему, состоящую из n заряженных тел, соединенных с внешними источниками энергии, которые осуществляют их непрерывную подзарядку (рис. 14.15). В результате взаимодействия ЭП этих тел возникает ряд механических сил, действующих на отдельные тела. Сосредоточим внимание на одной из таких сил, например на силе q, приложенной к телу m, которое, допустим, имеет возможность перемещаться в направлении действия этой силы, в то время как все остальные тела жестко закреплены.

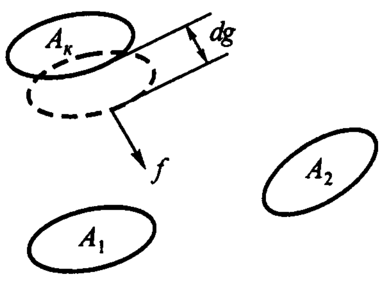


Рис. 14.15
Система заряженных контуров

В течение бесконечно малого времени dt сила q переместит тело на бесконечно малое расстояние dg и совершит при этом элементарную работу qdg. Вместе с тем при движении m тела будет меняться картина ЭП системы, а в результате непрерывной подзарядки тел — возрастать его интенсивность. Поэтому в течение рассматриваемого времени dt произойдет изменение энергии ЭП системы на величину dW_e. За это же время внешние источники, осуществляя подзарядку тел, совершат работу

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k dQ_k,$$

где φ_k — потенциал k тела, dQ_k — приращение его заряда Q_k.

Все эти явления в совокупности описываются уравнением, отражающим закон сохранения энергии в системе заряженных тел в пределах времени dt:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k dQ_k = dW_e + qdg. \quad (14.14)$$

Согласно ему работа внешних источников энергии идет внутри системы на изменение запаса энергии в ЭП и совершение механической работы силой q.

Уравнение (14.14) справедливо только при условии, что подзарядка тел осуществляется без потерь энергии (по сверхпроводящим проводам), а в пространстве, где существует ЭП, не происходит необратимых процессов преобразования энергии.

Рассмотрим два частных случая. В первом предположим, что все тела отсоединены от источников. При этом изменений их зарядов Q_1, Q_2, ..., Q_n происходить не может и, следовательно, приращения зарядов равны нулю ($dQ_k = 0$). Тогда левая часть уравнения обращается в нуль, и оно приобретает вид

$$0 = d_g W_e + qdg, \quad (14.15)$$

причем индексом g у знака дифференциала энергии ЭП подчеркивается, что в рассматриваемом случае речь идет о частном дифференциале: когда заряды тел сохраняются неизменными, изменение энергии ЭП вызвано только изменением положения m тела, т. е. только за счет изменения dg его координаты g.

Из упрощенного уравнения (14.15) вытекает

$$q = -\frac{d_g W_e}{dg} = -\frac{\partial W_e}{\partial g}, \quad (14.16)$$

т. е. сила, действующая на одно из тел системы, равна по абсолютной величине и противоположна по знаку частной производной от энергии ЭП этой системы тел по координате, которая изменяется этой силой. При этом в процессе вычисления производной заряды тел следует считать постоянными.

Во втором случае положим, что все тела присоединены к источникам энергии и с их помощью потенциалы тел удерживаются неизменными. При движении одного тела системы, когда емкости между телами меняются, это возможно только при соответствующем изменении зарядов тел. Т. е. в этом случае приращения dQ_k зарядов уже нельзя считать равными нулю и в уравнении энергий (14.14) сохраняются все его члены. Однако возможно упростить равенство, используя выражение энергии системы заряженных тел:

$$W_e = 0{,}5\sum_{k=0}^{k=n} \varphi_k Q_k.$$

При неизменности потенциалов приращение энергии поля определится приращением зарядов и выразится в виде

$$dW_e = 0{,}5\sum_{k=0}^{k=n} \varphi_k dQ_k. \qquad (14.17)$$

Подставляя (14.17) в (14.14), получим

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k dQ_k = 0{,}5\sum_{k=0}^{k=n} \varphi_k dQ_k + qdg$$

или, после приведения подобных членов,

$$0{,}5\sum_{k=0}^{k=n} \varphi_k dQ_k = qdg.$$

Возвращаясь к сокращенной записи приращения энергии ЭП, имеем

$$d_g W_e = qdg,$$

откуда

$$q = +\frac{d_g W_e}{dg} = +\frac{\partial W_e}{\partial g}, \qquad (14.18)$$

т. е. силу, действующую на одно из тел системы, можно вычислить путем частного дифференцирования энергии ЭП этой системы по изменяемой этой силой координате, полагая потенциалы тел неизменными. Но знак силы в этом случае необходимо принимать совпадающим со знаком производной.

Обе выведенные формулы удобно объединить в одну:

$$q = \pm\frac{\partial W_e}{\partial g} \qquad (14.19)$$

(плюс ставится при φ_i — const, минус — при Q_i — const), помня, что знак «плюс» берется, если при дифференцировании постоянными принимаются потенциалы, а знак «минус» — когда частная производная взята при условии постоянства зарядов.

Возможности расчета механических проявлений ЭП с помощью изложенного метода значительно расширяются, если в формуле (14.19) под величинами q и g понимать соответственно так называемые обобщенные силы и координаты. При этом каждая пара «обобщенная сила — обобщенная координата» — две физические величины, дающие при перемножении работу. Например, наряду с обычной механической силой f и длиной l в качестве обобщенных пар можно рассматривать момент силы m и угол α, давление и объем, силу поверхностного напряжения и площадь. Из названных примеров наибольшее практическое значение имеют первые два, которые раскрывают возможность расчета не только линейных сил путем дифференцирования по линейному размеру:

$$f = \pm\frac{\partial W_e}{\partial l}, \qquad (14.20)$$

но и моментов, действующих в различных электротехнических конструкциях, если прибегнуть к дифференцированию по угловым координатам этих конструкций:

$$m = \pm\frac{\partial W_e}{\partial \alpha}. \qquad (14.21)$$

З а д а ч а 14.16. Рассчитать силу притяжения пластин плоского конденсатора.

Р е ш е н и е.

Сила может быть рассчитана путем дифференцирования энергии его ЭП по расстоянию d между пластинами, так как искомая сила стремится сблизить пластины, т. е. изменить координату d.

Используя выражение для энергии заряженного конденсатора в виде

$$W_e = 0{,}5CU^2,$$

целесообразно выполнить дифференцирование, полагая потенциалы пластин конденсатора постоянными, т. е.

$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial d},$$

так как при этом условии постоянным будет и напряжение U (оно равно разности потенциалов), фигурирующее в формуле энергии.

Если учесть, что

$$C = \frac{\varepsilon s}{d},$$

то

$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial d} = 0{,}5U^2\frac{\partial C}{\partial d} = -0{,}5\frac{\varepsilon s U^2}{d^2}. \qquad (14.22)$$

Отрицательный знак результата показывает, что искомая сила стремится уменьшить координату d, т. е. сблизить пластины, что соответствует хорошо известному явлению притяжения разноименно заряженных тел.

З а д а ч а 14.17. Требуется определить вращающий момент электростатического вольтметра.

Р е ш е н и е.

Одна из конструкций электростатического вольтметра представляет собой систему из двух неподвижных плоских полукруглых пластин и одной подвижной пластины той же формы (рис. 14.16), укрепленной на оси так, что при повороте подвижная пластина входит в промежуток между параллельно расположенными неподвижными пластинами. Измеряемое напряжение U подается между подвижной пластиной и электрически соединенными друг с другом неподвижными пластинами.

Заряжаясь разноименно, подвижные и неподвижные пластины притягиваются, в результате чего возникает вращающий момент, стремящийся втянуть подвижную пластину глубже в пространство между неподвижными пластинами.

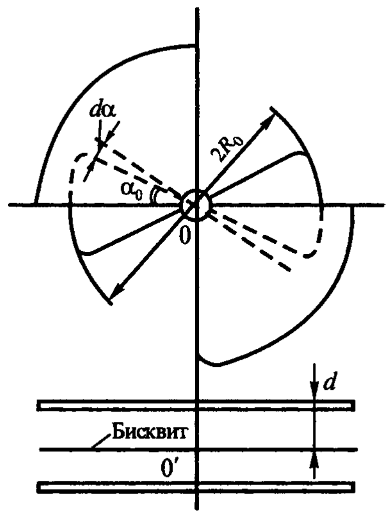


Рис. 14.16
Принципиальная схема электростатического вольтметра

Для вычисления этого момента необходимо продифференцировать энергию ЭП вольтметра по углу α, определяющему положение подвижной пластины:

$$m = \pm\frac{\partial W_e}{\partial \alpha},$$

причем в качестве такого угла удобно взять так называемый угол перекрытия пластин, определяющий сектор подвижной пластины, находящийся между неподвижными пластинами.

Нетрудно усмотреть, что вольтметр представляет собой плоский конденсатор с воздушным диэлектриком, емкость которого определяется выражением

$$C = 2C' = 2\frac{\varepsilon_0 s}{d},$$

где d — расстояние между соседними пластинами, s — площадь упомянутого выше сектора подвижной пластины.

Эту площадь нетрудно выразить через радиус r пластин и угол α:

$$s = \frac{\pi r^2}{2\pi}\alpha = 0{,}5r^2\alpha.$$

Тогда для энергии ЭП конденсатора имеем

$$W_e = 0{,}5CU^2 = 0{,}5\frac{\varepsilon_0 r^2 U^2}{d}\alpha.$$

Поскольку энергию ЭП мы выразили через напряжение, ее дифференцирование по углу удобно выполнить при условии U — const, т. е. рассчитать момент по формуле с положительным знаком перед производной:

$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial d} = \frac{\varepsilon_0 r^2 U^2}{2d}. \qquad (14.23)$$

Контрольные вопросы

1. Наиболее полно аналитически ЭП в диэлектрической среде сформулировано в виде... (выберите ответ).

Варианты:
а) $\mathrm{rot}\vec{E} = 0,\ \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, где φ — электрический потенциал;
б) $\Delta\varphi = \rho/\varepsilon$, где ρ — плотность электрического заряда;
в) $\Delta\varphi = 0$;
г) $\nabla^2\vec{E} = \mathrm{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$.

2. Наиболее полно аналитически ЭП в проводящей среде сформулировано в виде... (выберите ответ).

Варианты:
а) $\mathrm{rot}\vec{E} = 0,\ \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, где φ — электрический потенциал;
б) $\Delta\varphi = \rho/\varepsilon$, где ρ — плотность электрического заряда;
в) $\Delta\varphi = 0$.

3. ЭП постоянного тока описываются наиболее полно уравнениями математической физики вида... (выберите ответ).

Варианты:
а) $\Delta\vec{E} = 0,\ \Delta U_э = 0$;
б) $\Delta U_э = -\rho/\varepsilon$;

в) $\Delta\vec{E}+k^2\vec{E}=0;$

г) $\Delta\vec{E}+\gamma\mu\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0.$

4. Граничные условия для уравнений математической физики, описывающих ЭП, представляют собой... (выберите ответ).

Варианты:

а) условия, ограничивающие решение уравнения математической физики на границах рассматриваемой области;
б) условия, фиксирующие поведение решения в начале выбранной координатной системы;
в) условия, фиксирующие решение уравнения математической физики в бесконечности;
г) условия, ограничивающие решение уравнения математической физики на границах рассматриваемой области, в начале выбранной координатной системы и в бесконечности.

5. Плотность электрического тока в воздушной среде энергоемкого района описывается в виде... (выберите наиболее полный ответ).

Варианты:

а) $\vec{\delta}=\gamma\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\rho\vec{v};$
б) $\vec{\delta}=\gamma\vec{E};$
в) $\vec{\delta}=\gamma\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t};$
г) $\vec{\delta}=\gamma\vec{E}+\rho\vec{v};$
д) $\vec{\delta}=\rho\vec{v}.$

6. Сила в ЭП, действующая в точке среды на помещенное в нее тело, является... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) производной по расстоянию от электрической энергии, в данной среде ее можно определить по формуле $f_x=-\dfrac{\partial}{\partial x}\int(\varepsilon E^2/2)dv,$ где x — координата, по которой идет изменение энергии;
б) производной по расстоянию от электрической энергии, в данной среде ее можно определить по формуле $f_x=-\dfrac{\partial}{\partial x}\int(D^2/2\varepsilon)dv$, где x — координата, по которой идет изменение энергии;
в) интегральной характеристикой среды, определяемой по формуле $f=\dfrac{\partial}{\partial x}(U^2C/2),$ где U — напряжение; C — емкость.

7. Граничные условия для уравнений математической физики, описывающих ЭП, представляют собой условия... (выберите ответ).

Варианты:

а) ограничивающие решение уравнения математической физики на границах рассматриваемой области;
б) фиксирующие поведение решения в начале выбранной координатной системы;
в) фиксирующие решение уравнения математической физики в бесконечности;
г) ограничивающие решение уравнения математической физики на границах рассматриваемой области, в начале выбранной координатной системы и в бесконечности.

15

ГЛАВА 15

РАСЧЕТЫ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ОТ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

15.1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Уравнения МП постоянных токов, как это следует из общей системы дифференциальных уравнений ЭМП, имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}, \qquad (15.1)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad (15.2)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \qquad (15.3)$$

В соответствии с уравнением (15.1) МП является вихревым. Для его расчета вводят векторный магнитный потенциал $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \qquad (15.4)$$

Подстановка (15.4) в (15.2) дает выражение, тождественно равное нулю:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\ \vec{A} = 0.$$

Записав последнее выражение с помощью оператора «набла», имеем $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{A}]$ — скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор, равный векторному произведению $[\vec{\nabla}\vec{A}]$, что, как следует из рис. 15.1, всегда равно нулю (скалярное произведение двух векторов равно произведению их значений, умноженному на косинус угла между ними). Угол между векторами $\vec{\nabla}$ и $[\vec{\nabla}\vec{A}]$ по определению равен 90°, косинус этого угла равен 0.

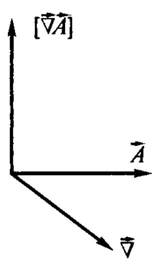


Рис. 15.1
Скалярное произведение двух векторов

Умножим обе части выражения (5.1) на величину μ:

$$\mu\operatorname{rot}\vec{H} = \mu\vec{\delta}.$$

Тогда в однородном поле при $\mu = \text{const}$:

$$\operatorname{rot}\mu\vec{H} = \mu\vec{\delta};\ \operatorname{rot}\vec{B} = \mu\vec{\delta}; \qquad (15.5)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu\vec{\delta}.$$

Как отмечалось выше, функция $\vec{A}$ непрерывна, т. е. $\operatorname{div}\vec{A}=0$. Выражение (15.5) теперь можно представить в виде

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu\vec{\delta}. \tag{15.6}$$

Выражение (15.6) представляет собой уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала $\vec{A}$. Величина $\vec{A}$ — вектор, поэтому (15.6) можно представить в виде трех уравнений для компонент $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}^2 A_x=-\mu\delta_x;\ \vec{\nabla}^2 A_y=-\mu\delta_y;\ \vec{\nabla}^2 A_z=-\mu\delta_z. \tag{15.7}$$

Решение уравнений (15.7) с учетом граничных условий в МП позволяет найти величину индукции $\vec{B}$ и напряженности $\vec{H}$ МП.

Выражение магнитного потока через векторный магнитный потенциал. Магнитный поток Ф, пронизывающий какую-либо поверхность S:

$$\Phi=\int_S\vec{B}\overrightarrow{dS}.$$

С учетом (15.4)

$$\Phi=\int_S\operatorname{rot}\vec{A}\overrightarrow{dS}.$$

По теореме Стокса

$$\int_S\operatorname{rot}\vec{A}\overrightarrow{dS}=\oint_l\vec{A}d\vec{l},$$

откуда

$$\Phi=\oint_\ell\vec{A}d\vec{l}. \tag{15.8}$$

Кроме того что МП описывается векторным магнитным потенциалом $\vec{A}$, в области, где нет токов, его также можно описать с помощью скалярного магнитного потенциала $\varphi_м$ (по аналогии с тем, как ЭП описывается скалярным электрическим потенциалом φ).

Другими словами, поскольку $\operatorname{rot}\vec{H}=0$, то

$$\vec{H}=-\operatorname{grad}\varphi_м.$$

С учетом (15.2) и (15.3) в однородном поле, при $\mu=\text{const}$

$$\operatorname{div}\vec{B}=\operatorname{div}\mu\vec{H}=\mu\operatorname{div}\vec{H}=0;\ \operatorname{div}\vec{H}=0. \tag{15.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi_м=0;\\&\nabla^2\varphi_м=0.\end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

То есть скалярный магнитный потенциал подчиняется уравнению Лапласа, которое в проекциях на оси прямоугольной системы координат (x, y, z) записывается в виде

$$\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial z^2}=0. \tag{15.11}$$

Граничные условия на поверхности раздела двух магнитных сред. Они показаны на рис. 15.2.

Из выражения (15.9) находим

$$H_{1\tau}=H_{2\tau}, \tag{15.12}$$

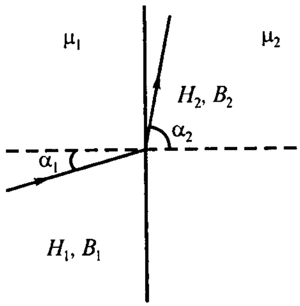


Рис. 15.2
Граничные условия на поверхности раздела двух магнитных сред

а из (15.2) соответственно

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad (15.13)$$

где $H_{1\tau}$, $H_{2\tau}$ — касательные составляющие векторов $\vec{H}$ к границе раздела сред (на рис. 15.2); B_{1n}, B_{2n} — нормальные составляющие векторов $\vec{B}$.

По рисунку также видно, что $H_1\sin\alpha_1 = H_2\sin\alpha_2$; $B_1\cos\alpha_1 = B_1\cos\alpha_1$, откуда

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\mu_2}; \ \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (15.14)$$

Из этого следует, что под каким бы углом линии магнитной индукции ни входили из воздуха в ферромагнитную среду ($\mu_2 \gg \mu_1$), внутри ферромагнитной среды они будут параллельны ее поверхности. Действительно, магнитная проницаемость воздуха $\mu_1 = \mu_0$. Магнитная проницаемость ферромагнетика для примера $\mu_2 = 10^4\mu_0$, тогда

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_0}{10^4\mu_0} = \frac{1}{10^4}.$$

Пусть $\alpha_1 = 0{,}5°$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}009 \approx 0{,}01$, тогда $\operatorname{tg}\alpha_2 = 10^4 \cdot 0{,}01 = 100$, что соответствует $\alpha_2 = 89{,}5°$.

15.2. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА. СКАЛЯРНЫЙ МАГНИТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

З а д а ч а 15.1. По длинному прямолинейному проводу радиуса R протекает постоянный ток I. Найти напряженность МП внутри и вне провода.

Р е ш е н и е.

При постоянном во времени токе его плотность по сечению провода — величина постоянная:

$$\delta = \frac{I}{\pi R^2},$$

при $r \le R$

$$\oint_r \vec{H} d\vec{l} = I_r; \ H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2; \ H = \frac{I}{2\pi R^2} r,$$

при $r \ge R$

$$I = 2\pi r H; \ H = \frac{I}{2\pi r}.$$

З а д а ч а 15.2. Длинный прямолинейный провод имеет кольцевое сечение радиусов R_1 и R_2. По проводу протекает постоянный ток I. Построить кривую $H(r)$, где r — расстояние от точки O на оси провода до произвольных точек областей 1, 2, 3 (рис. 15.3).

Р е ш е н и е.

Первая область: $r < R_1$, $H = 0$.

Вторая область: $R_1 \le r \le R_2$,

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Здесь δ — плотность тока;

$$\frac{I \cdot \pi(r^2 - R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 2\pi r H;\ H = \frac{I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r}.$$

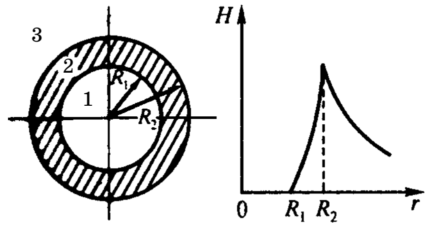


Рис. 15.3
Прямолинейный полый цилиндрический провод

Третья область — $r \ge R_2$: $2\pi r H = I$; $H = \dfrac{I}{2\pi r}$.

График $H(r)$ показан на рис. 15.3.

З а д а ч а 15.3. По тому же проводу (задача 15.2) протекает ток $I = 1000$ А. Найти разность скалярных магнитных потенциалов между точками A и B (рис. 15.3).

Р е ш е н и е.

В области вне токов, где $\mathrm{rot}\vec{H} = 0$, по аналогии с ЭП, где $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$, связь между скалярным магнитным потенциалом $\varphi_м$ и напряженностью МП $\vec{H}$ такая же, как и связь между электрическим потенциалом φ и напряженностью ЭП $\vec{E}$ (13.5):

$$\varphi_м = -\int \vec{H} d\vec{l}. \qquad (15.15)$$

В задаче 15.2 получено: в области 3, т. е. в области вне токов

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

поэтому

$$\varphi_м = -\int \vec{H} d\vec{l} = -\int \frac{I}{2\pi r} r d\theta = -\frac{I}{2\pi}\theta + \mathrm{const}.$$

Знак минус означает, что увеличение магнитного потенциала происходит в сторону, противоположную направлению вектора $\vec{H}$. На рис. 15.4*б* вектор $\vec{H}$ направлен вниз, следовательно, потенциал $\varphi_м$ растет в направлении, противоположном направлению $\vec{H}$, т. е. против часовой стрелки.

Картина МП линейных токов совпадает с картиной ЭП линейных зарядов, если токи и заряды распределены в пространстве одинаково. Различие между этими картинами заключается лишь в том, что на месте линий напря-

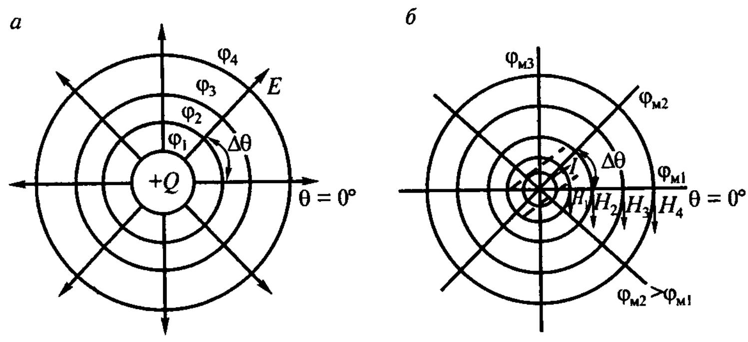


Рис. 15.4
Распределение магнитного потенциала около полого цилиндрического провода

женности ЭП располагаются линии равного магнитного потенциала и на месте линий равного электрического потенциала располагаются линии напряженности МП (рис. 15.4*а, б*). В соответствии с этим рисунком формулы, описывающие линии электрического потенциала:

$$\Delta\psi_E = \frac{Q}{2\pi}\Delta\theta,$$

$$\psi_E = \frac{Q}{2\pi}\theta.$$

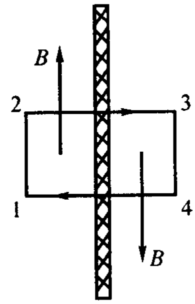


Рис. 15.5
Плоская проводящая пластина

А формулы для линий магнитного потенциала:

$$\Delta\varphi_м = \frac{I}{2\pi}\Delta\theta,$$

$$\varphi_м = -\frac{I}{2\pi}\theta + \text{const}.$$

Возвращаясь к поставленной задаче,

$$\varphi_{ма} - \varphi_{мB} = \frac{I}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{I}{12} = \frac{100}{12} = 8{,}33 \text{ А}.$$

З а д а ч а 15.4. Рассчитать МП плоскости с током (рис. 15.5).

Р е ш е н и е.

Рассмотрим безграничную проводящую плоскость (практически достаточно, чтобы размеры пластины были много больше ее толщины). По пластине равномерно течет ток одного направления. На рисунке показано, что ток течет от нас. Также там показано, куда направлено МП пластины. Выберем контур в виде прямоугольника 1234. По закону полного тока

$$2Hl = I,\ H = \frac{I}{2l},$$

где $l_{12} = l_{34} = l$, $(l_{23} = l_{14} \ll l)$.

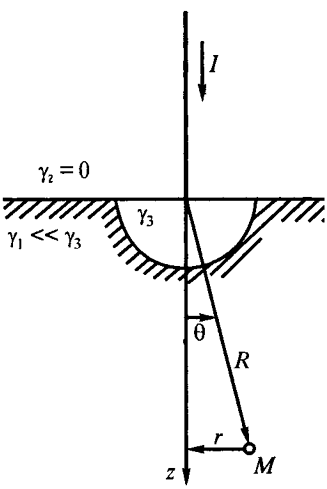


Рис. 15.6
Полусферический заземлитель

Из формулы для H следует, что МП как с одной стороны плоскости, так и с другой является однородным. Этот результат справедлив и для ограниченной пластины с током, но лишь для точек вблизи пластины и удаленных от ее краев.

З а д а ч а 15.5. Провод с током I спускается вертикально вниз и оканчивается в земле полусферическим заземлителем радиусом a (рис. 15.6). Требуется найти МП в земле и в воздухе при постоянном токе, считая проводимость земли γ_1 постоянной, а второй электрод находящимся на расстоянии, много большем a.

Р е ш е н и е.

МП в земле соответствует уравнению

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta}. \qquad (15.16)$$

В силу симметрии МП плотность тока в земле имеет только радиальную составляющую (в сферической системе координат R, θ, α):

$$\vec{\delta} = \delta_R = I/2\pi R^2,$$

а МП не зависит от координаты α. При этом для составляющей R соотношение (15.16) будет иметь вид

$$\mathrm{rot}_R\,\vec{H} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(R\sin\theta H_a)\right] = I/2\pi R^2. \qquad (15.17)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$R\sin\theta H_\alpha = -\frac{I\cos\theta}{2\pi} + f(R) + C. \qquad (15.18)$$

На оси симметрии, т. е. при $\theta = 0$:

$$R\sin\theta H_\alpha = 0 = -\frac{I}{2\pi} + f(R) + C.$$

Следовательно, $f(R)$ не зависит от R и постоянная $C = I/2\pi$. Подставляя это значение постоянной в (15.18), получаем

$$H_\alpha = \frac{I}{2\pi R\sin\theta}(1-\cos\theta).$$

Замечая, что $R\sin\theta = r$, можно последнее соотношение записать в виде

$$H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}(1-\cos\theta).$$

В воздухе напряженность МП определяется по закону полного тока

$$H'_\alpha = I/2\pi r.$$

На границе «воздух — земля», т. е. при $\theta = 0{,}5\pi$, $H_\alpha = H'_\alpha$, граничные условия удовлетворяются.

З а д а ч а 15.6. Плотность тока в плазме газового разряда $\delta = \delta_z = \delta_0/((r/a) + 1)$ в цилиндрической системе координат. Здесь r — текущий радиус, δ_0 и a — постоянные. Требуется определить напряженности МП.

Р е ш е н и е.

МП находим, интегрируя уравнение закона полного тока в дифференциальной форме $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta}$, которое перепишем в виде

$$\delta_z = \mathrm{rot}_z\,\vec{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha) = \frac{\delta_0}{(r/a)+1}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$rH_\alpha = a\delta_0[r - a\ln(r + a)C].$$

Постоянная C определяется из условия $H = H_0 = 0$ при $r = 0$:

$$0 = -\ln aC = \ln(1/aC).$$

Тогда

$$H = H_\alpha = aJ_0[1 - (a/r)\ln((r/a) + 1)].$$

З а д а ч а 15.7. Длинный диэлектрический цилиндр, заряженный с объемной плотностью $\rho = 4\cdot10^{-6}$ Кл/м^3, вращается вокруг оси z, совпадающей с осью цилиндра, со скоростью $n = 100$ об/с. Радиус цилиндра $r_0 = 0{,}05$ м. Магнитная проницаемость материала цилиндра и окружающей среды равна μ_0. Требуется определить магнитную индукцию внутри цилиндра в средней его части в зависимости от расстояния r от оси.

Р е ш е н и е.

Плотность тока $\delta = \delta_a = \rho v = \rho 2\pi rn$. Напряженность МП внутри цилиндра находим, применяя закон полного тока в дифференциальной форме. Так как поле не зависит от координаты z (цилиндр длинный), то

$$\mathrm{rot}_\alpha \vec{H} = -\partial H_z / \partial r$$

и

$$-\partial H_z/\partial r = 2\pi rn\rho.$$

Интегрируя, находим

$$H_z = -\pi n\rho r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования можно определить из условия, что при $r = r_0$ должно быть

$$H_z = 0 \text{ и } C = \pi n\rho r_0^2.$$

Магнитная индукция внутри цилиндра:

$$B = B_z = \mu_0 \pi n\rho(r_0^2 - r^2).$$

З а д а ч а 15.8. Проводящая сферическая оболочка радиусом $a = 10$ см вращается вокруг оси z, проходящей через ее центр, со скоростью 100 об/с. Заряд оболочки $q = 10^{-8}$ Кл. Магнитная проницаемость равна μ_0. Требуется найти магнитную индукцию в любой точке внутри и вне оболочки, считая известным, что магнитный потенциал $\varphi_м = (C_1R + (C_2/R^2))\cos\theta$ удовлетворяет уравнению Лапласа (R, θ — сферические координаты).

Р е ш е н и е.

Внутри оболочки ($R < a$) токи отсутствуют и, следовательно, $\mathrm{rot}\vec{H}_1 = 0$, т. е. МП потенциально. Напряженность поля представляем в виде $\vec{H}_1 = -\mathrm{grad}\,\varphi_{M1}$, где φ_{M1} — скалярный потенциал МП внутри сферы. Аналогично вне оболочки ($R > a$) — $\vec{H}_2 = -\mathrm{grad}\,\varphi_{M2}$. Решение задачи ищем в виде

$$\varphi_{M1} = \left(C_1R + \frac{C_2}{R^2}\right)\cos\theta; \; \varphi_{M2} = \left(C_3R + \frac{C_4}{R^2}\right)\cos\theta.$$

Постоянные найдем из условий:

1) в центре оболочки ($R = 0$);

2) в бесконечности ($R \to \infty$);

3) на поверхности оболочки ($R = a$).

Так как напряженность поля не может быть бесконечно большой, то $C_2 = 0$. Так как в бесконечности поле отсутствует, то $C_3 = 0$. Из граничного условия $B_{1n} = B_{2n}$, т. е. $H_{1R} = H_{2R}$, т. к. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, или $\partial\varphi_{м1}/\partial R = \partial\varphi_{м2}/\partial R$ при $R = a$, получаем $C_1 = -2C_4/a^3$. Из граничного условия $H_{2\tau} = -H_{1\tau} + J_{пов}$, где

$$\delta_{пов} = dI/ad\theta = nqR/2a^2 = nq\sin\theta/2a$$

— поверхностная плотность тока, или

$$-\partial\varphi_{м2}/R\partial\theta + \partial\varphi_{м1}/R\partial\theta = \delta_{пов}$$

при $R = a$, получаем $+C_4/a^3 - C_1 = nq/2a$. Из двух уравнений для C_1 и C_4 находим $C_1 = -nq/3a$; $C_4 = (nq/6)a^2$.

Потенциалы $\varphi_{м1} = -(nq/3a)R\cos\theta = -(nq/3a)z$; $\varphi_{м2} = -(nq/6R^2)a^2\cos\theta$. По известным потенциалам находим напряженности магнитного поля:

$$H_1 = H_{1z} = -\partial\varphi_{м1}/\partial z = nq/3a; H_{2R} = -\partial\varphi_{м2}/\partial R = (nq/3R^3)a^2\cos\theta;$$
$$H_{2\theta} = -\partial\varphi_{м2}/R\partial\theta = (nq/6R^3)a^2\sin\theta.$$

Эти решения определяют МП во всех точках и вне, и внутри сферической оболочки.

З а д а ч а 15.9. Вдоль двухпроводной линии протекает постоянный ток $I = 36$ А. Направление тока в проводах линии показано на рис. 15.7. Расстояние между осями проводов $d = 1$ м. Требуется определить разность скалярных магнитных потенциалов между точками M и N, M и P, то есть $\varphi_{мM} - \varphi_{мN}$ и $\varphi_{мM} - \varphi_{мP}$. Координаты точек: $x_M = 0{,}5$ м; $y_M = 0{,}5$ м; $x_N = 0$; $y_N = 0{,}5$ м; $x_p = -0{,}5$ м; $y_p = -0{,}5$ м.

Необходимо построить качественную картину МП двухпроводной линии. При решении выбрать путь интегрирования, соединяющий точки M и N, M и P так, чтобы он не пронизывал контур с током.

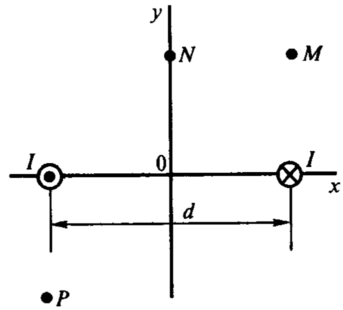
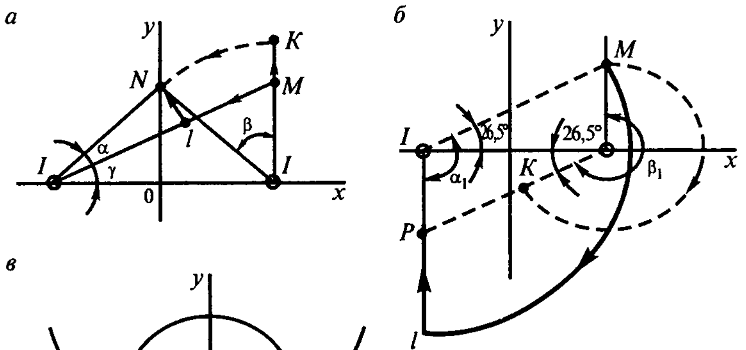


Рис. 15.7
Двухпроводная линия
с постоянным током



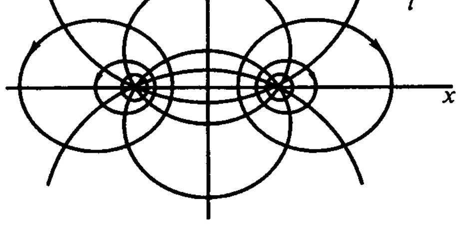


Рис. 15.8
МП двухпроводной линии

Р е ш е н и е.

Магнитное напряжение между точками M и N по пути

$$H_y = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A_y = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

обусловленное током левого провода (см. рис. 15.8*а*),

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}.$$

Магнитное напряжение между точками M и N по пути MkN, обусловленное током правого провода $\vec{A}$, где $\beta = 45°$. Так как $\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + \text{const}$, $\alpha = 45° - 26{,}5° = 18{,}5°$.

Магнитное напряжение между точками M и N:

$$A = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln r + \text{const}\ \text{А}.$$

Магнитное напряжение между точками M и P (рис. 15.8*б*):

$$H = \frac{\tau}{2\pi r}\ \text{А},$$

где $\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$; $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{c}{ab}$.

15.3. ВЕКТОРНЫЙ МАГНИТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

З а д а ч а 15.10. По медному прямолинейному проводу радиуса R протекает постоянный ток I. Найти векторный магнитный потенциал в точке M, удаленной от оси провода на расстояние x. Окружающая среда — воздух.

Р е ш е н и е.

Применим уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала (15.4). Пусть провод протянут в направлении оси z, ток течет вдоль оси z, плотность тока направлена также вдоль оси z, уравнение Пуассона имеет вид (15.6)

$$\vec{\nabla}^2 A_z = -\mu\delta_z,$$

т. е. векторный магнитный потенциал $\vec{A}$ имеет только одну составляющую, направленную вдоль оси z. Нас интересует, как меняется вектор A_z в функ-

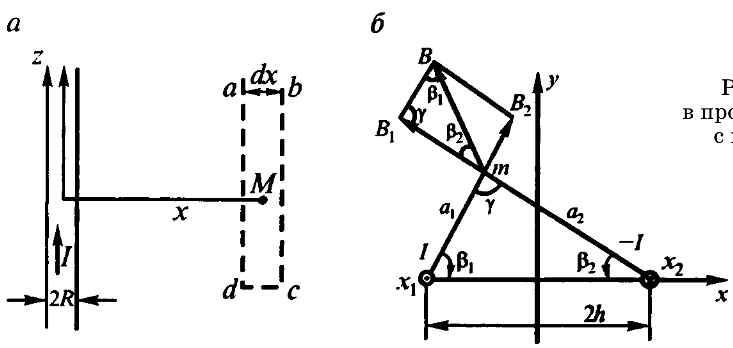


Рис. 15.9
Распределение МП
в пространстве от провода
с постоянным током

ции x, т. е. нужно найти $A_z(x)$. Для краткости эту величину будем называть просто A.

Окружим точку M рамкой $abcd$, стороны которой $ad = bc$ соответствуют длине провода, $ab = dc = dx$ (рис. 15.9*а*). МП тока в проводе создает в рамке магнитный поток:

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu I}{2\pi x} l dx.$$

Выражая поток в рамке через векторный магнитный потенциал по теореме Стокса (15.8), получим

$$d\Phi = Al - \left(A + \frac{\partial A}{\partial x}dx\right)l = -l\frac{\partial A}{\partial x}dx,\ \frac{\mu I}{2\pi x}ldx = -\frac{\partial A}{\partial x}ldx,$$

$$dA = -\frac{\mu I}{2\pi}\frac{dx}{x},\ A = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln x + \mathrm{const}.$$

Полагая $A = 0$ на поверхности провода (при $x = R$), найдем

$$\mathrm{const} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln R,$$

откуда

$$A = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R}{x}.$$

Провод рассматривается длинный. Теоретически при $l \to \infty$, а практически при $l \gg R$ линии напряженности поля есть окружности радиуса x, нормальные к проводу. Т. е. в прямоугольной системе координат $H = H_x$, в цилиндрической системе координат $H = H_\varphi(x)$.

Так как $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A},\ \vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A},$ то, пользуясь выражением ротора вектора через проекции вектора в сферической системе координат, найдем

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu I}{2\pi}(\ln R - \ln x)\right];\ H = \frac{I}{2\pi x}.$$

З а д а ч а 15.11. Определить векторный магнитный потенциал двухпроводной линии (рис. 15.9*б*).

Р е ш е н и е.

Используя решение предыдущей задачи, найдем векторный магнитный потенциал от левого провода:

$$A = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln a + \mathrm{const},$$

где a — расстояние от точки m до оси левого провода.

Векторный магнитный потенциал от правого провода:

$$A = -\frac{\mu(-I)}{2\pi}\ln b + \mathrm{const},$$

где b — расстояние от точки m до оси левого провода. Ток взят со знаком «−», т. к. в правом проводе он течет в противоположную сторону (в сравнении с левым проводом).

Векторный потенциал в точке m от обоих проводов:

$$A = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} + \text{const}.$$

Для определения постоянной интегрирования положим $A = 0$ на оси y (см. рис. 15.9*б*), тогда

$$A = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Из последнего выражения посредством дифференцирования могут быть определены оба слагаемых напряженности поля, рассматриваемого в прямоугольной системе координат:

$$H_x = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A_x = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y},$$

поскольку $A = A_z$, $A_y = 0$.

$$H_y = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A_y = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

так как $Ax = 0$.

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2};\ B = \mu H.$$

То есть для нахождения B и H через векторный потенциал $\vec{A}$ необходимо выполнить достаточно сложные математические преобразования, в то время как и без векторного потенциала значение B и H найдено в задаче 15.10 достаточно просто.

Вполне закономерно возникает вопрос: «Зачем же нужен векторный потенциал, если уже известно МП?» Ответ здесь может быть следующим: часто вычисление векторного потенциала полезно, потому что позволяет найти качественную картину, которая может быть полезна для отыскания количественных результатов.

Как уже отмечалось, понятие векторного потенциала в МП соответствует скалярному потенциалу в ЭП. Их выражения часто оказываются подобными, из чего часто следует и подобие полей: электрического и магнитного. Например, см. табл. 15.1.

Таблица 15.1

Подобие электрического и магнитного полей

	Электрическое поле	Магнитное поле
Поле уединенного провода	$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + \text{const}$	$A = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln r + \text{const}$
	$E = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon}$	$H = \frac{I}{2\pi r}$
Поле двух проводов	$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$	$A = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$
	$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{c}{ab}$	$H = \frac{I}{2\pi}\frac{c}{ab}$

15.4. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

З а д а ч а 15.12. Двухпроводная линия состоит из цилиндрических проводов с радиусом сечения $r_0 = 2$ см, расстояние между осями проводов $2h = 40$ см. В проводах линии протекает ток $I = 25$ А. Окружающая среда — воздух. Определить для точки m, находящейся на расстояниях $a_1 = 18$ см и $a_2 = 33{,}5$ см от осей проводов, величину скалярного магнитного потенциала, величины векторов магнитной индукции и напряженности МП (рис. 15.10).

Р е ш е н и е.

При $2h \gg r_0$ задачу можно решать, считая, что токи проходят в бесконечно тонких нитях, совпадающих с осями проводов.

Поместим начало координат в точку O. Скалярный магнитный потенциал в точке m, обусловленный током в левом проводе, определяется углом β_1, отсчитываемым от направления оси x по часовой стрелке; потенциал, обусловленный током в правом проводе, определяется углом β_2, отсчитываемым от направления оси x против часовой стрелки. Различие в направлениях отсчета объясняется противоположным направлением тока в проводах. Скалярный магнитный потенциал:

$$\varphi_м = \frac{I}{2\pi}\beta_1 + \frac{I}{2\pi}\beta_2 + \text{const},$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \pi - \gamma,$$

следовательно, $\varphi_м = \dfrac{I}{2}\left(1 - \dfrac{\gamma}{\pi}\right) + \text{const}.$

Предположим, что $\varphi_м = 0$ во всех точках оси x, лежащих справа от правого провода и слева от левого провода. Для этих точек $\gamma = 0$, поэтому

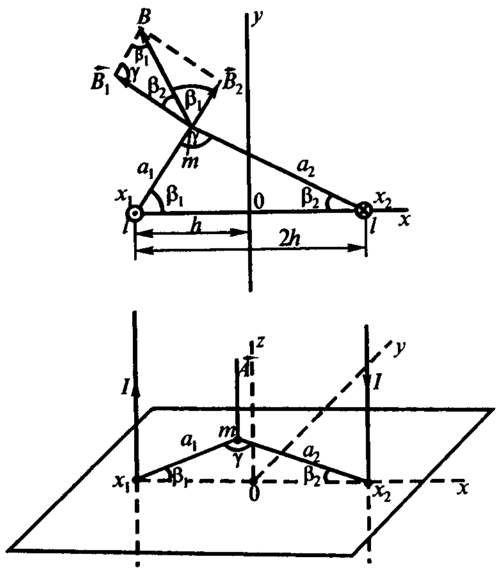


Рис. 15.10
Расчетная схема

$$\text{const} = -\frac{I}{2} \text{ и } \varphi_м = -\frac{I}{2\pi}\gamma.$$

В нашем случае (точка m) $\gamma = 97°20' = 1{,}7$ рад.

$$\varphi_м = -\frac{25 \cdot 1{,}7}{6{,}28} = -6{,}77 \text{ А}.$$

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в точке m имеет составляющие: $\vec{B}_1$, обусловленную током в левом проводнике, $\vec{B}_2$, обусловленную током в правом проводнике. Его удобно вычислять, пользуясь подобием треугольников mB_1B и x_1x_2m (рис. 15.10); эти треугольники имеют по одинаковому углу γ;

прилегающие к этим углам стороны одного треугольника по построению обратно пропорциональны сторонам другого:

$$B_1 = \frac{\mu I}{2\pi a_1};\ B_2 = \frac{\mu I}{2\pi a_2}.$$

Из подобия треугольников следует

$$\frac{B}{B_1} = \frac{2h}{a_2},$$

откуда $B = B_1 \frac{2h}{a_2} = \frac{\mu I \cdot 2h}{2\pi \cdot a_1 a_2}$, численно $B = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ Тл, $H = \frac{B}{\mu} = 26{,}4$ А/м.

15.5. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

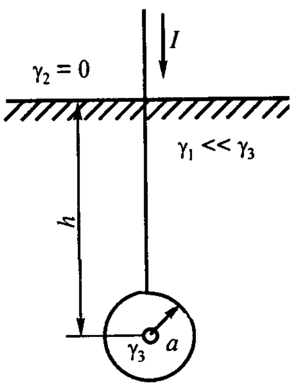


Рис. 15.11
Сферический электрод, находящийся в земле

З а д а ч а 15.13. На глубине h под поверхностью земли (рис. 15.11) находится сферический электрод (проводимость γ_3) радиусом $a (h \gg a)$, к которому подводится постоянный ток I по изолированному вертикальному кабелю. Требуется найти МП в земле и воздухе, считая проводимость земли γ постоянной. Второй электрод расположен далеко от первого — на расстоянии, значительно превышающем h.

Р е ш е н и е.

Для определения плотности тока в земле можно воспользоваться методом зеркальных отображений: влияние границы раздела сред (поверхности земли) заменяем током $I' = I$ фиктивного электрода (рис. 15.12). Применяя принцип наложения, определим МП в земле. Поле истинного тока:

$$H_{\alpha 1} = H_1 = \frac{1}{4\pi r}(1 - \cos\theta_1).$$

Поле изображения тока:

$$H_{\alpha 2} = H_2 = \frac{1}{4\pi r}(1 - \cos\theta_2).$$

Общее магнитное поле в земле:

$$H = H_\alpha = H_1 + H_2 = \frac{1}{4\pi r}(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

МП в воздухе по-прежнему $H' = H'_\alpha = I / 2\pi r$. На границе ($\theta_2 = \pi - \theta_1$) получаем $H_\alpha = I / 2\pi r = H'_\alpha$.

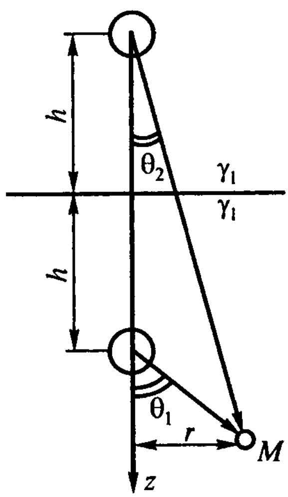


Рис. 15.12
Расчетная схема

З а д а ч а 15.14. Прямолинейный длинный изолированный провод, по которому протекает ток $I = 60$ А, расположен в воздухе параллельно плоской поверхности стальной плиты на расстоянии

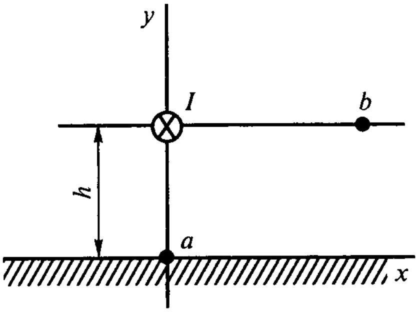


Рис. 15.13
Провод с постоянным током над поверхностью земли

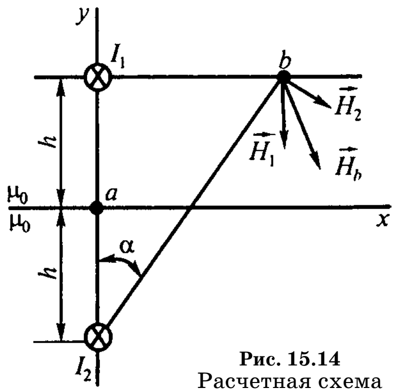


Рис. 15.14
Расчетная схема

$h = 2$ см от нее (рис. 15.13). Относительная магнитная проницаемость стали $\mu_r \to \infty$. Требуется найти напряженность МП в точках a и b. Координаты точек a и b: $x_a = 0$; $y_a = 0$; $x_b = 3$ см; $y_b = 2$ см.

Решение.

Воспользуемся методом зеркальных отображений. Найдем фиктивный ток I_2 (рис. 15.14):

$$I_2 = I_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = I_1 = I.$$

В силу симметрии напряженность МП в точке a: $\vec{H}_a = 0$. Напряженность МП в точке b: $\vec{H}_b = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $\vec{H}_1 = -\vec{j}\dfrac{I_1}{2\pi x_b} = -\vec{j}318$ А/м;

$$\vec{H}_2 = \vec{i} H_2 \cos\alpha - \vec{j} H_2 \sin\alpha = \vec{i}\,\frac{I_2 2h}{2\pi(x_b^2 + 4h^2)} - \vec{j}\,\frac{I_2 x_b}{2\pi(x_b^2 + 4h^2)} = \vec{i}172 - \vec{j}114 \text{ А/м}.$$

Окончательно получим

$$\vec{H}_b = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{i}172 - \vec{j}432, \text{ А/м},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные орты вдоль осей x и y.

15.6. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНА БИО–САВАРА

Во многих случаях закон Био–Савара позволяет с меньшими усилиями (чем с помощью векторного потенциала) рассчитать МП. Рассмотрим этот закон подробнее, как это сделано в [15.1].

Уравнения Максвелла были сформулированы в 1873 г. на основе предшествовавших экспериментальных фактов и теоретических соображений. Относящиеся к этому экспериментальные данные были получены Био и Саваром в 1820 г. Если в замкнутом линейном контуре протекает ток I, то по закону Био–Савара напряженность МП в любой точке пространства (в «точке наблюдения») равна

$$\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\oint\limits_{l}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}^{0}}{r^{2}}. \qquad (15.19)$$

В этом равенстве $d\vec{l}$ длина элемента проводника (м), направление $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока в рассматриваемом элементе (рис. 15.15*а*); $\vec{r}^{0}$ — единичный вектор, направленный из указанного элемента проводника в точке наблюдения; r — расстояние (м) между отрезком проводника и точкой наблюдения.

Интегрирование должно быть произведено вдоль всего замкнутого контура. Хотя в любой точке пространства имеет смысл лишь общая напряженность магнитного поля и лишь она может быть обнаружена на опыте, формулу (3.20) можно все же толковать и так, что каждый элемент проводника создает свою слагаемую общей напряженности магнитного поля, определяемую формулами

$$d\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}^{0}}{r^{2}};\ dH=\frac{I}{4\pi}\frac{dl}{r^{2}}\sin\varphi,$$

причем векторы $d\vec{l}$, $\vec{r}^{0}$, $d\vec{H}$ в указанной последовательности образуют правовинтовую систему (рис. 15.15*б*).

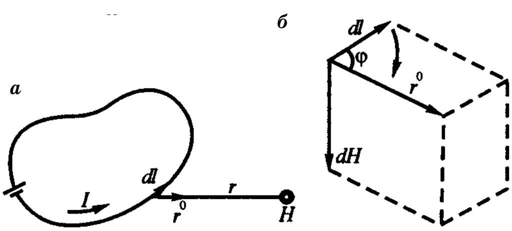


Рис. 15.15
Электрический ток в замкнутом контуре

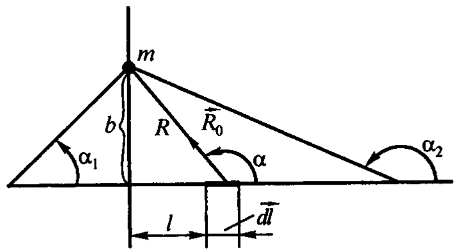


Рис. 15.16
Расчетная схема

Применяя выражение (15.19) к бесконечно длинному прямолинейному проводнику, найдем, что линии МП в виде окружностей охватывают проводник, а их направление связано с направлением тока так же, как направление вращения правоходового винта связано с направлением осевого перемещения:

$$\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\oint\limits_{l}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}^{0}}{r^{2}}=\frac{I}{4\pi}\oint\limits_{l}\frac{dl}{r^{2}}\sin\varphi=\frac{I}{2\pi r}.$$

З а д а ч а 15.15. Определить напряженность поля в произвольной точке m, создаваемую отрезком линейного провода с током I (рис. 15.16). Точка m удалена от провода на расстояние b.

Р е ш е н и е.

Угол между $d\vec{l}$ и $\overrightarrow{R_0}$ обозначим α. Из рис. 15.16 имеем

$$R=\frac{b}{\sin\alpha};\ l=-b\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{dl}{d\alpha} = -b\frac{d}{d\alpha}(\operatorname{ctg}\alpha) = -\frac{b}{(-\sin^2\alpha)};\ dl = \frac{b}{\sin^2\alpha}d\alpha,$$

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_l \frac{[d\vec{l}\cdot\vec{R}_0]}{R^2};\ [d\vec{l}\cdot\vec{R}_0] = dl\cdot 1\cdot\sin\alpha,$$

$$\frac{[d\vec{l}\cdot\vec{R}_0]}{R^2} = \frac{dl\cdot\sin\alpha}{R^2} = \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{\sin\alpha d\alpha}{b},$$

$$H = \frac{I}{4\pi b}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{I}{4\pi b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \tag{15.20}$$

Если провод бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 180°$; $\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = 2$; $H = \dfrac{I}{2\pi b}$.

З а д а ч а 15.16. Определить напряженность МП на оси круглого витка с током I (рис. 15.17). Радиус витка равен a.

Р е ш е н и е.

Выделим элемент тока $Id\vec{l}$. Напряженность поля $d\vec{H}$, создаваемая этим элементом в точке b на оси витка, находящейся на расстоянии z от плоскости витка, равна

$$\frac{I[d\vec{l}\cdot\vec{R}_0]}{4\pi(a^2+z^2)},$$

напряженность $\overrightarrow{dH}'$ перпендикулярна $d\vec{l}$ и $\vec{R}_0$. От диаметрально противоположного элемента тока $Id\vec{l}$ в той же точке будет напряженность $\overrightarrow{dH}''$. По модулю $\overrightarrow{dH}'$ и $\overrightarrow{dH}''$ одинаковы. При геометрическом суммировании $\overrightarrow{dH}'$ и $\overrightarrow{dH}''$ будет получен вектор, направленный по оси витка.

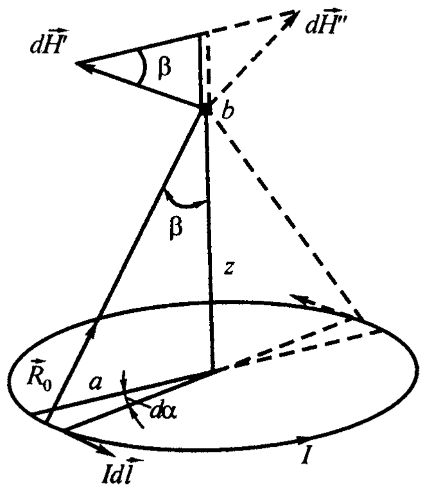


Рис. 15.17
Схема определения МП на оси круглого витка с током

Если суммировать напряженности поля, создаваемые в точке всеми элементами $d\vec{l}$ витка, получим результирующий вектор $\vec{H}$, также направленный по оси витка.

Итак, $dl = ad\alpha$; на оси витка

$$H = \int_0^{2\pi}\frac{Iad\alpha\cdot\sin\beta}{4\pi(a^2+z^2)} = \frac{Ia}{4\pi(a^2+z^2)}\frac{a}{(a^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\alpha = \frac{Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}. \tag{15.21}$$

В частном случае в центре витка (при $z = 0$)

$$H = \frac{I}{2a}. \tag{15.22}$$

З а д а ч а 15.17. Катушка намотана в виде плоской спирали (рис. 15.18) из большого числа w плотно уложенных витков, по которым течет постоянный

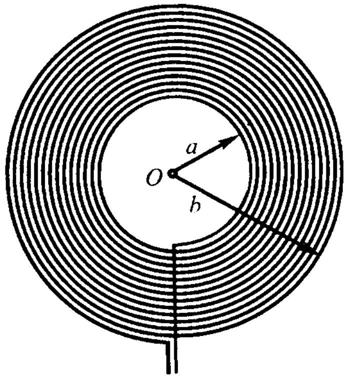


Рис. 15.18
Катушка в виде плоской спирали

ток I. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны a и b. Найти напряженность поля в центре катушки — точке O.

Решение.

Вклад в результирующую напряженность от одного витка радиуса r равен

$$H_1 = \frac{I}{2r}.$$

От всех витков:

$$H = \int H_1 dw,$$

где dw — число витков в интервале $(r, r + dr)$,

$$dw = \frac{w}{b-a} dr.$$

Подставив значения H_1 и dw в выражение для H, найдем

$$H = \frac{I}{2} \frac{w}{b-a} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{wI}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a}.$$

Задача 15.18. Тонкое диэлектрическое немагнитное кольцо, заряженное с объемной плотностью заряда ρ, вращается вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 15.19), частота вращения кольца в секунду равна n. Требуется определить магнитную индукцию в точке, лежащей на оси вращения на расстоянии y от плоскости кольца. Радиусы кольца равны r_1 и r_2, толщина — Δy. Магнитная проницаемость окружающей кольцо среды равна $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

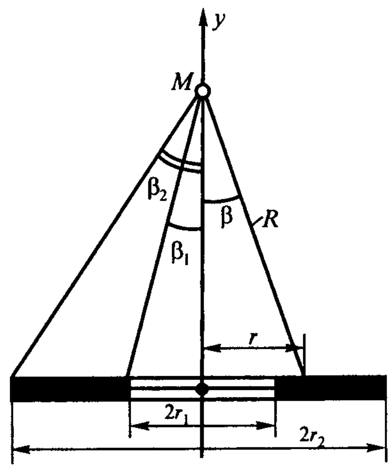


Рис. 15.19
МП тонкого диэлектрического немагнитного кольца, вращающегося вокруг центральной оси

Решение.

Плотность тока движущихся зарядов $\delta = \rho v = \rho\omega r = 2\pi\rho n r$. Элементарный ток, приходящийся на элемент длины радиуса dr:

$$dI = \delta dr \Delta y = \Delta y 2\pi\rho n r dr.$$

По закону Био–Савара напряженность поля на оси, обусловленная элементарным кольцевым током dI:

$$dH = dH_y = dI \frac{2\pi r}{4\pi R^2} \sin\beta = dI \frac{\sin^3\beta}{2r} = \Delta y \rho\pi n \sin^3\beta dr.$$

Искомая напряженность поля всего кольца на его оси:

$$H = H_y = \int dH = \int \Delta y \rho\pi n \sin^3\beta dr.$$

Радиус r можно выразить через β:

$$r = y\,\mathrm{tg}\,\beta \text{ и } dr = y(d\beta/\cos^2\beta).$$

При этом

$$H = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \Delta y \rho \pi n y \frac{\sin^3\beta}{\cos^2\beta} d\beta = 2\pi\Delta y \rho n[r_2\,\mathrm{tg}(0{,}5\beta_2)\sin^2(0{,}5\beta_2) - r_1\,\mathrm{tg}(0{,}5\beta_1)\sin^2(0{,}5\beta_1)];$$

$$B = \mu_0 H.$$

Если $r_1 = 0$, т. е. кольцо превращается в диск радиуса r_2, тогда

$$H = 2\pi\Delta y \rho n[r_2\,\mathrm{tg}(0{,}5\beta_2)\sin^2(0{,}5\beta_2)].$$

15.7. СИЛЫ, МОМЕНТЫ И ЭНЕРГИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

15.7.1. СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ДВИЖУЩИМИСЯ ЧАСТИЦАМИ И ТОКАМИ

Сила, действующая на заряженную частицу при движении ее в МП (сила Лоренца), равна

$$\vec{f} = Q[\vec{v}\cdot\vec{B}], \qquad (15.23)$$

где Q — заряд частицы; $\vec{v}$ — скорость ее движения; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции в точке, где находится частица.

З а д а ч а 15.19. Определить силу, действующую на частицу с зарядом $Q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, движущуюся в магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5$ Тл. Частица движется со скоростью $v = 2{,}5\cdot10^6$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к направлению вектора магнитной индукции.

Р е ш е н и е.

Согласно (15.23)

$$\vec{f} = Q[\vec{v}\cdot\vec{B}] = Q\cdot v\sin\alpha\cdot B = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2{,}5\cdot10^6\cdot\sin45°\cdot1{,}5 = 4{,}24\cdot10^{-13}\ \text{Н}.$$

Так как заряженная частица движется под углом к направлению магнитного поля, то ее траектория представляет собой винтовую линию. При движении заряженной частицы под прямым углом к направлению магнитного поля ее траектория была бы окружностью в плоскости, нормальной к магнитному полю.

15.7.2. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ ВО ВНЕШНЕМ МП (СИЛА АМПЕРА)

Каждый носитель тока испытывает действие магнитной силы. Действие этой силы передается проводнику, по которому заряды движутся. В результате МП действует с определенной силой на сам проводник с током. Найдем эту силу.

Пусть объемная плотность заряда, являющегося носителем тока (например, электроны в металле), равна ρ. Выделим элемент объема dv проводника. В нем находится заряд — носитель тока, равный ρdv. Сила, действующая на элемент dv проводника, согласно (15.23) равна

$$d\vec{f} = \rho[\vec{v} \cdot \vec{B}]dV.$$

Так как плотность тока

$$\vec{J} = \rho\vec{V},$$

то

$$d\vec{f} = [\vec{J}\vec{B}]dV. \tag{15.24}$$

Если ток течет по тонкому проводнику, то т. к. $\vec{J}dv = \vec{J}d\vec{s} \cdot d\vec{l} \approx JSd\vec{l} = Id\vec{l}$,

$$d\vec{f} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}], \tag{15.25}$$

где $d\vec{l}$ — вектор, совпадающий по направлению с током и характеризующий элемент длины тонкого проводника.

Формулы (15.24) и (15.25) выражают закон Ампера. Интегрируя эти выражения по элементам тока (объемным или линейным), можно найти магнитную силу, действующую на тот или иной объем проводника или его линейный участок.

Силы, действующие на токи в МП, называют силами Ампера.

Направление силы $\vec{f}$ определяется по правилу левой руки.

З а д а ч а 15.20. Плоскость рамки составляет угол $\alpha = 30°$ с направлением однородного МП в воздухе с индукцией $B = 0{,}1$ Тл (рис. 15.20). Площадь рамки $S = 100$ см^2. Число витков $w = 50$, ток в рамке $I = 4$ А. Определить вращающий момент рамки.

Р е ш е н и е.

Сила, действующая на сторону рамки:

$$f = BIlw,$$

где l — длина рамки.

Вращающий момент рамки:

$$M_{\text{вр}} = fa\cos\alpha,$$

где a — ширина рамки.

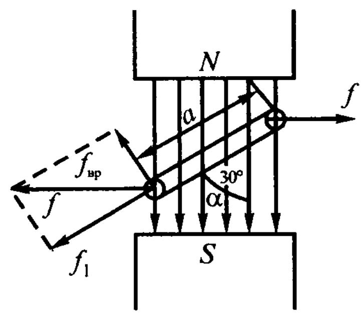


Рис. 15.20
Рамка с током в МП

$$M_{\text{вр}} = BIlwa\cos\alpha = 0{,}1 \cdot 4 \cdot 50 \cdot 0{,}01 \cdot \cos 30° = 0{,}173 \text{ Н·м}.$$

Наибольший вращающий момент у рамки будет при $\alpha = 0$, когда она займет вертикальное положение, наименьший вращающий момент, равный нулю, будет при горизонтальном положении рамки. Рамка с постоянным током стремится занять такое положение, при котором ее пронизывает максимальный магнитный поток.

15.7.3. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОВОДАМИ С ТОКОМ

$$f = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 l, \qquad (15.26)$$

при условии $d \ll l$. Здесь B_1 — магнитная индукция на оси второго провода от тока I_1; I_1 — ток в первом проводе; I_2 — ток во втором проводе; l — длина проводов; d — расстояние между осями проводов.

Если токи в проводах направлены одинаково, провода притягиваются. Если токи в проводах направлены в разные стороны — провода отталкиваются.

З а д а ч а 15.21. Расстояние между проводами $d = 10$ см (рис. 15.21). Токи в проводах $I_1 = 1000$ А, $I_2 = 500$ А направлены в одну сторону. Длина проводов 1 м. Определить магнитную силу взаимодействия f.

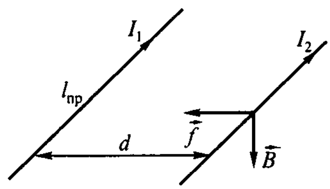


Рис. 15.21
Взаимодействие между проводами

Р е ш е н и е.

$$f = \frac{I_1 I_2 \mu_0 l}{2\pi d} = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 0{,}1} = 1\,\text{Н}.$$

Провода притягиваются.

З а д а ч а 15.22. По двум параллельным проводам двухпроводной линии протекают равные по величине, но противоположно направленные токи $I_1 = I_2 = 400$ А. Расстояние между осями проводов $d = 0{,}3$ м. Найти величину и направление магнитной силы, действующей на 1 км длины каждого провода.

Р е ш е н и е.

$$f = \frac{I_1 I_2 \mu_0 l}{2\pi d} = \frac{400^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}{2\pi \cdot 0{,}3} = 106{,}4\ \text{Н}.$$

Эти силы отталкивают провода.

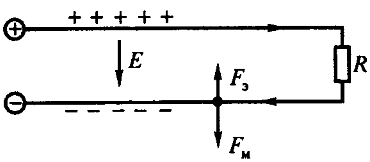


Рис. 15.22
Взаимодействие между проводами, замкнутыми на сопротивление

З а д а ч а 15.23. Два длинных провода с пренебрежимо малым сопротивлением замкнуты с одного конца на сопротивление R, а с другого конца подключены к источнику постоянного напряжения (рис. 15.22). Радиус сечения каждого провода r_0 в 20 раз меньше расстояния между осями проводов a. При каком значении сопротивления R результирующая сила взаимодействия проводов обратится в нуль?

Р е ш е н и е.

На каждом из проводов (протекает по ним ток или нет) при подключении их к источнику напряжения имеются свободные заряды. Линейная плотность зарядов

$$\tau = \frac{Q}{\ell}.$$

Поэтому, кроме магнитной силы $f_м$, необходимо учесть и электрическую $f_э$. Электрическая сила $f_э$, действующая на единицу длины провода со стороны другого провода,

$$f_э = \tau E.$$

Величина E получена в задаче 13.8. Она равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \cdot a},$$

поэтому

$$f_э = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0 \cdot a}.$$

Магнитная сила $f_м$ на единицу длины провода согласно (15.25)

$$f_м = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a},$$

где I — сила тока в проводе.

Обе силы — электрическая и магнитная, направлены в противоположные стороны: электрическая сила обусловливает притяжение проводов, магнитная — их отталкивание. Отношение сил:

$$\frac{f_м}{f_э} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 I^2}{\tau^2}.$$

Воспользовавшись решением задачи 13.8, можно найти связь между током I и поверхностной плотностью заряда τ. Действительно, емкость двухпроводной линии на единицу ее длины:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{a}{r_0}}.$$

Поверхностная плотность заряда:

$$\tau = CU = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{a}{r_0}} U,$$

где $U = RI$. Отсюда

$$\frac{I}{\tau} = \frac{\ln\dfrac{a}{r_0}}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

При этом отношение:

$$\frac{f_м}{f_э} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\ln^2\dfrac{a}{r_0}}{\pi^2 R^2}.$$

Результирующая сила взаимодействия проводов обращается в нуль, когда последнее отношение равно единице. Это будет при $R = R_0$, где

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ln 20}{\pi} = 360 \text{ Ом}.$$

Если $R < R_0$, то $f_м > f_э$ — провода отталкиваются; если $R > R_0$, то $f_м < f_э$ — провода притягиваются. Это можно наблюдать на опыте [15.2].

Таким образом, утверждение, что провода, по которым текут токи противоположного направления, отталкиваются, справедливо тогда, когда электрической частью взаимодействия можно пренебречь, т. е. при достаточно малом сопротивлении R в схеме (см. рис. 15.22).

15.7.4. СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПОМЕЩЕННЫЕ В НИХ ТЕЛА

Механическая работа и приращение энергии МП совершаются за счет той части энергии источников $\sum_{k=1}^{n} e_k i_k dt$, которую последние отдают в цепи за вычетом тепловых потерь $\sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k dt$, т. е. за счет части энергии $\sum_{k=1}^{n} i_k d\psi_k$, так как

$$\sum_{k=1}^{n} e_k i_k dt = \sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^{n} i_k d\psi_k.$$

Последнее выражение получится, если уравнение равновесия в цепи, содержащей активные сопротивления и индуктивности, домножить на $i_k dt$

$$\sum e_k = \sum i_k R_k + \sum \frac{d\psi_k}{dt}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} i_k d\psi_k = f dx + dW_м. \qquad (15.27)$$

В соответствии со сказанным первое слагаемое выражения (15.27) — механическая работа (сила действует в направлении x), второе — приращение энергии магнитного поля, откуда

$$f = \frac{\sum_{k=1}^{n} i_k d\psi_k - dW_м}{dx}.$$

Из последнего выражения вытекают два важных случая.

1. Перемещение под действием силы f происходит таким образом, что потокосцепление контуров остается неизменным (при $\psi_k = \text{const}$, $d\psi_k = 0$).

$$f = -\frac{dW_м}{dx},$$

или, в общем случае,

$$f = -\left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{\psi=\text{const}}, \qquad (15.28)$$

где g — обобщенная координата.

Механическая работа совершается за счет убыли энергии МП.

2. Перемещение происходит так быстро, что токи в контурах не успевают измениться. Тогда, так как

$$W_м = \frac{1}{2}\sum i_k \psi_k \ \text{ и } \ dW_м = \frac{1}{2}\sum i_k d\psi_k,$$

то в соответствии с (15.27)

$$\sum i_k d\psi_k = f dx + \frac{1}{2}\sum i_k d\psi_k,$$

откуда

$$f = \frac{\sum i_k d\psi_k - \frac{1}{2}\sum i_k d\psi_k}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sum i_k d\psi_k}{dx} = \frac{dW_м}{dx}$$

или, в общем случае,

$$f = \left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{i=\mathrm{const}}. \qquad (15.29)$$

Выражение (15.29) отличается от (15.28) лишь знаком.

Формулы (15.28), (15.29) для определения механической силы в МП аналогичны формулам для расчета механической силы в ЭП. Однако, как известно, электрические машины построены по принципу взаимодействия через МП, а не по принципу взаимодействия через ЭП. Попытаемся дать этому объяснение.

Силы в МП и ЭП будут равны, если окажутся равными производные по соответствующей координате от энергий МП и ЭП, т. е. при условии

$$\frac{\partial W_м}{\partial g} = \frac{\partial W_e}{\partial g}.$$

Если мы желаем достичь этого равенства, то при одинаковых перемещениях dg мы должны иметь в тех и других устройствах одинаковые изменения энергии $\partial W_м$ и ∂W_e. При одинаковых рабочих поверхностях перемещающихся частей это требует того, чтобы объемные плотности $W'_м$ и $\partial W'_e$ в пространстве между взаимодействующими частями в обоих типах устройств были одного порядка, т. е. чтобы соблюдалось равенство

$$\frac{BH}{2} = \frac{DE}{2}.$$

Обычно это пространство заполнено воздухом, следовательно, должно быть

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}; \ \frac{B^2}{E^2} = \mu_0\varepsilon_0; \ \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c.$$

В электрических машинах, основанных на принципе взаимодействия через МП, магнитная индукция в воздушном зазоре $B = 1$ Тл или более. Значит, в машине, основанной на взаимодействии через ЭП, должно быть

$$E = Bc = 1 \cdot 3{\cdot}10^8 \text{ В/м}.$$

Такие большие напряженности не могут быть достигнуты. Пробивная напряженность ЭП в воздухе — 30 кВ/см. Если даже между подвижной и неподвижной частями машины обеспечить идеальный вакуум, то и в этом случае заметное вырывание электронов из металла (электронная эмиссия) наступает при напряженностях до 10^6 В/см.

З а д а ч а 15.24. Вычислить магнитную индукцию B в магнитопроводе подковообразного магнита, если подъемная сила его $F = 95$ кГ, а поперечное сечение $S = 8$ см^2.

Р е ш е н и е.

Сила магнита $f = -\dfrac{dW_M}{dx}$, где W_M — магнитная энергия между полюсами магнита (магнитной энергией, запасенной в магнитопроводе магнита, можно пренебречь); x — координата, перпендикулярная плоскости полюсов магнита. $W_M = \int\limits_V W_0 dv$, где $W_0 = B^2/2\mu_0$ — удельная магнитная энергия в единице объема между полюсами, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость пустоты.

$$W_M = \int\limits_V W_0 dv = \int\limits_x \frac{B^2}{2\mu_0} S dx = \frac{B^2 Sx}{2\mu_0}.$$

$$f = -\frac{dW_M}{dx} = -\frac{B^2 S}{2\mu_0},$$

откуда

$$B = \sqrt{\frac{2f\mu_0}{S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 95 \cdot 9{,}81 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 10^{-4}}} = 1{,}73 \text{ Тл}.$$

З а д а ч а 15.25. На кольцевой стальной магнитопровод нанесена обмотка, имеющая $w = 600$. В кольце сделан поперечный зазор длиной $l_1 = 0{,}4$ мм. Средняя длина магнитной линии в кольце $l_2 = 0{,}4$ м. Поперечное сечение кольца $S = 10^{-3}$ м^2. Относительная магнитная проницаемость стали $\mu_r = 800$. Определить энергию магнитного поля в стали $W_с$ и в зазоре W_B при токе в обмотке $I = 1$ А. Зная полную энергию магнитного поля, определить индуктивность катушки и силу, стремящуюся уменьшить зазор.

Р е ш е н и е.

$$W_с = 0{,}5\mu_0\mu_r l_2 S\left(\frac{Iw}{l_2 + \mu_r l_1}\right)^2 = 0{,}14 \text{ Дж};$$

$$W_B = 0{,}5 l_1 S\left(\frac{Iw\mu_r}{l_2 + \mu_r I_1}\right)^2 = 0{,}112 \text{ Дж}; \; L = 0{,}504 \text{ Гн};$$

$$f = 0{,}5\mu_0\mu_r S(\mu_r - 1)\left(\frac{Iw}{l_2 + \mu_r I_1}\right)^2 = 279{,}5 \text{ Н} = 28{,}5 \text{ кГ}.$$

З а д а ч а 15.26. Якорь электромагнита удален на расстояние x от ярма. В магнитной системе образовано два зазора. Длина каждого из них x, поперечное сечение $S/2$ (см. рис. 15.23). Энергия МП в каждом зазоре равна произведению плотности энергии $BH/2$ на объем зазора $(S/2 \cdot x)$, так как МП в зазоре считается однородным.

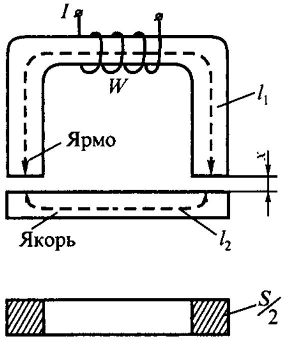


Рис. 15.23
Схема С-образного электромагнита

Решение.

Поскольку участки по стали имеют проницаемость в тысячи раз большую, чем в зазоре, то при не очень малых зазорах при $B = \text{const}$, $H_з \gg H_{cm}$, энергия МП в зазоре много больше энергии МП в сердечнике ($W_{\text{мз}} \gg W_{\textit{м}\,\text{ст}}$), т. е.

$$W_{\textit{м}} = W_{\text{мз}} + W_{\textit{м}\,\text{ст}} \cong W_{\text{мз}}.$$

При притяжении якоря электромагнита к ярму меняются МП, сопротивление, магнитный поток и потокосцепление. Ток в обмотке электромагнита не меняется (если электромагнит подключен к источнику постоянного напряжения), поэтому для определения силы f пользуемся выражением (15.29)

$$f = \left|\frac{dW_{\textit{м}}}{dx}\right| = \frac{d}{dx}\left(BH \cdot \frac{S}{2} x \cdot 2\right) = \frac{BH}{2} \cdot S. \qquad (15.30)$$

Формула (15.30) совпадает с формулой Максвелла

$$f = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S}. \qquad (15.31)$$

Действительно,

$$f = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S} = \frac{(BS)^2}{2\mu_0 S} = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \frac{BH}{2} S.$$

Фактически объяснить притяжение якоря к ярму можно следующим образом: электрический ток в цепи замыкается по пути (или через участки) наименьшего сопротивления. Магнитный поток в магнитной цепи также стремится замкнуться по пути наименьшего сопротивления. Если магнитная цепь стационарна, потоки просто замыкаются по таким путям. Если имеются определенные степени свободы в магнитной цепи, позволяющие уменьшить магнитное сопротивление, то магнитный поток стремится замкнуться по более короткому пути, например якорь притягивается к ярму, сердечник втягивается внутрь катушки и т. д. (см. ниже).

При $B = 1{,}5$ Тл, $S = 20$ см^2.

$$f = \frac{BH}{2} S = \frac{B^2 S}{2\mu_0}; \; f = \frac{1{,}5^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6}} = 3600 \text{ Н}.$$

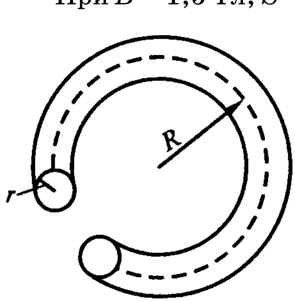


Рис. 15.24
Схема витка с током

Задача 15.27. По круглому медному витку радиусом R толщиной $2r$ (рис. 15.24) протекает ток I. Индуктивность витка определяется по формуле

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{r} - 1{,}75\right).$$

Определить механические силы, действующие на виток.

Р е ш е н и е.

Согласно (15.29) при постоянном токе в витке

$$f = \left(\frac{\partial W_м}{\partial g} \right)_{I=\text{const}},$$

где g — обобщенная координата. В рассматриваемом случае обобщенными координатами являются R и r.

$$f_R = \left(\frac{\partial W_м}{\partial R} \right)_{I=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{LI^2}{2} \right) = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial R} = \frac{I^2}{2}\frac{\partial}{\partial R}\left[\mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{r} - 1{,}75 \right) \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{r} - 1{,}75 \right).$$

Сила $f_R > 0$. Она стремится увеличить радиус витка R, т. е. растянуть контур с током и увеличить индуктивность витка L.

$$f_r = \left(\frac{\partial W_м}{\partial r} \right)_{I=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{LI^2}{2} \right) = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{I^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{r} - 1{,}75 \right) \right] = -\frac{I^2 \mu_0 R}{2r}.$$

Сила $f_r < 0$. Она стремится уменьшить радиус провода (за счет этого и растягивается контур) и увеличить индуктивность витка L.

З а д а ч а 15.28. Индуктивность однослойной короткой катушки приближенно определяется выражением (Гн)

$$L = \frac{0{,}4R^2 w^2}{9R + 10l} \cdot 10^{-3},$$

где R — радиус витков; l — длина катушки; w — число витков катушки.

Определить силу, сжимающую катушку и стремящуюся разорвать виток катушки (увеличить ее радиус), при $I = 2{,}45$ А, $R = 0{,}05$ м, $l = 0{,}2$ м, $w = 100$.

Р е ш е н и е.

Сила, сжимающая катушку,

$$f = \frac{\partial W_м}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{LI^2}{2} \right) = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{I^2}{2} 0{,}4R^2 w^2 \cdot 10^{-3}\left(-\frac{10}{(9R + 10l)^2} \right) =$$

$$= \frac{2{,}45^2}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}\left(-\frac{10}{2{,}45^2} \right) = -0{,}05 \text{ Н}.$$

Знак «−» указывает на то, что сила сжимает катушку.

Сила, стремящаяся разорвать витки,

$$f = \frac{\partial W_м}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{LI^2}{2} \right) = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial R} = \frac{I^2}{2} 0{,}4w^2 \cdot 10^{-3}\left[\frac{2R(9R + 10l) - 9R^2}{(9R + 10l)^2} \right] =$$

$$= \frac{2{,}45^2}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}\left[\frac{2 \cdot 0{,}05 \cdot 2{,}45 - 9 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{2{,}45^2} \right] = 0{,}445 \text{ Н}.$$

Знак «+» — сила положительна, направлена наружу.

З а д а ч а 15.29. При изменении расстояния x между контурами, показанными на рис. 15.25, коэффициент связи изменяется по закону $k = \dfrac{A}{x^3}$, где $A = 2$ см^3. Найти силу взаимодействия обоих контуров при $x = 3$ см, если

$L_1 = 0{,}4$ мГн, $L_2 = 6{,}25$ мГн, $I_1 = I_2 = 100$ А. Токи I_1 и I_2 имеют одинаковое направление.

Р е ш е н и е.

Так как заданы токи контуров, то воспользуемся формулой (15.29)

$$f = \left(\frac{\partial W_м}{\partial g}\right)_{I=\text{const}}.$$

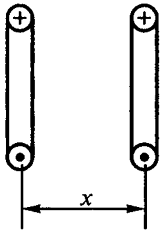


Рис. 15.25
Два параллельных витка с токами

Энергия системы двух контуров:

$$W_м = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2;\ M = k\sqrt{L_1 L_2} = \frac{A}{x^3}\sqrt{L_1 L_2};$$

$$f = \frac{\partial W_м}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{A}{x^3}\sqrt{L_1 L_2} I_1 I_2\right) = -\frac{3A}{x^4} L I^2 = -117 \text{ Н}.$$

Отрицательный знак указывает на то, что контуры притягиваются.

З а д а ч а 15.30. По обмотке стального тороида с числом витков $w = 400$ проходит ток $I = 4$ А. Площадь сечения сердечника $S = 4$ см^2. В сердечнике имеется воздушный зазор $\delta = 2$ мм. Определить силу, с которой притягиваются торцы сердечника, считая магнитное поле в зазоре однородным, а магнитную проницаемость стали бесконечно большой ($\mu_r = \infty$).

Р е ш е н и е.

Силу будем определять по формуле Максвелла (15.31)

$$f = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S}.$$

Магнитный поток:

$$\Phi = \frac{Iw}{R_м} = \frac{Iw}{R_{м\,ст} + R_{м\,з}} \approx \frac{Iw}{R_{м\,з}} = \frac{Iw\mu_0 S}{\delta},$$

где $R_{м\,ст} = \dfrac{l_{ст}}{\mu_r \mu_0 S} \approx 0$ — магнитное сопротивление стали, $R_{м\,з} = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$ — магнитное сопротивление зазора.

$$f = \left(\frac{Iw\mu_0 S}{\delta}\right)\frac{1}{2\mu_0 S} = 160{,}8 \text{ Н}.$$

З а д а ч а 15.31. Электромагнит, показанный на рис. 15.26, имеет площадь каждого полюса $S = 0{,}01$ м^2, индукцию при притянутом якоре $B = 1$ Тл. Определить подъемную силу электромагнита, т. е. силу отрыва якоря от полюсов.

Р е ш е н и е.

$$f = 2\frac{\Phi^2}{2\mu_0 S} = 2\frac{(BS)^2}{2\mu_0 S} = 2\frac{0{,}01}{2\cdot 1{,}25\cdot 10^{-6}} = 8000 \text{ Н}.$$

Цифра 2 перед дробью объясняется тем, что силу притяжения создает каждый полюс, а всего их два.

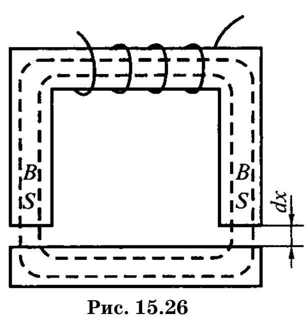


Рис. 15.26
Схема С-образного электромагнита 2

З а д а ч а 15.32. Имеется контур с током, у которого AB — подвижная перемычка (рис. 15.27). Индуктивность этого контура зависит определенным образом от координаты x, т. е. известно $L(x)$. Найти силу Ампера двумя способами: при $I = \text{const}$ и при $\Phi = \text{const}$.

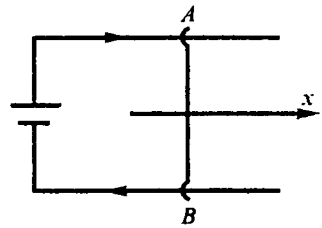


Рис. 15.27
Схема контура с током

Р е ш е н и е.

Магнитная энергия системы

$$W_м = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L},$$

где $\Phi = LI$. Переместим перемычку, например, вправо на dx. Так как $dA_{\text{мех}} = f x dx$, то

$$f_x = \frac{\partial W}{\partial x}\bigg|_{I=\text{const}} = \frac{I^2}{2}\frac{dL(x)}{dx},$$

или

$$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x}\bigg|_{\Phi=\text{const}} = \frac{\Phi^2}{2L^2}\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{I^2}{2}\frac{dL(x)}{dx},$$

т. е. расчет по обеим формулам дает один и тот же результат.

З а д а ч а 15.33. При поражении молнией трубчатого молниеотвода труба оказалась сплющенной. Требуется определить давление, действовавшее на трубу при токе молнии $I = 200000$ А, в предположении, что ток протекал лишь в тонком поверхностном слое трубы (скинэффект). Наружный радиус трубы $r_0 = 1{,}25$ см.

Р е ш е н и е.

Силу, с которой МП действует на поверхность трубы, определим из выражения $F_\eta = \partial W/\partial\eta$, где η — обобщенная координата, F_η — составляющая силы по этой координате. Применим это выражение к силе, действующей на элемент поверхности, $dS = zr_0 d\alpha$. Так как ток сосредоточен на поверхности трубы, то МП отлично от нуля лишь вне трубы.

Если элемент поверхности под воздействием силы перемещается на dr, то приращение энергии МП $dW = -W_0 dV = -0{,}5BHdSdr$ и сила, действующая на элемент поверхности dS, $dF_r = \partial W/\partial r = -0{,}5BHdS$.

Давление

$$p = \frac{dF_r}{dS} = -0{,}5BH = -0{,}5\mu_0 H^2 = -0{,}5\mu_0\left(\frac{I}{2\pi r_0}\right)^2.$$

Знак минус указывает на то, что сила стремится уменьшить радиус, т. е. сжимает трубку. Подставляя числовые данные, получаем $p = 407$ Н/см^2.

З а д а ч а 15.34. Можно ли вычисление силы в задаче 15.35 производить так: поле тока $B = \mu_0 I/2\pi r_0$; на единицу периметра приходится ток $I_0 = I/2\pi r_0$ и сила $F = BI_0$?

Р е ш е н и е.

Таким путем силу определить нельзя. Хотя практически ток протекает по поверхности трубы, толщина слоя тока не равна нулю. Если на внешней поверхности токового слоя индукция равна указанному в условии значению

$B = \mu_0 I/2\pi r_0$, то на внутренней поверхности токового слоя она равна нулю. Следовательно, не все элементы тока находятся в одном и том же МП. Указанное значение индукции является максимальным. Можно взять среднее значение индукции — между максимальным и минимальным (равным нулю). При этом получатся правильные значения силы и давления, найденные в задаче 15.35. Решение не зависит от распределения плотности тока по толщине токового слоя Δ, если она достаточно мала. Действительно, сила, действующая на элемент тока,

$$d^2F = BJdV = BJdSdr.$$

В качестве dS принимаем элемент цилиндрической поверхности $dS = lrd\alpha$. Далее,

$$J_z = \mathrm{rot}_z \vec{H} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH\alpha) = \frac{H}{r} + \frac{dH}{dr}.$$

Сила, действующая на элемент dS, равна

$$dF = \mu_0 l d\alpha \int\limits_{r_0-\Delta}^{r_0} \frac{1}{r}(rH)d(rH) = 0{,}5\mu_0 l d\alpha\left[r_0 H_0^2 + (H^2{}_{\text{ср}})\Delta\right].$$

Здесь применена теорема о среднем и учтено, что на глубине, большей Δ, вектор $H = 0$.

Если толщина токового слоя $\Delta \to 0$, то

$$dF = 0{,}5\mu_0 l d\alpha r_0 H_0^2 = 0{,}5\mu_0 H_0^2 dS.$$

Давление

$$p = \frac{dF}{dS} = 0{,}5\mu_0 H_0^2 = 0{,}5\mu_0\left(\frac{I}{2\pi r_0}\right)^2.$$

З а д а ч а 15.35. На рис. 15.28 схематически показан якорь электрической машины, имеющей всего один виток. Продольная длина якоря $l = 0{,}5$ м, наружный диаметр якоря равен 0,2 м, диаметр окружности, на которой расположены провода, $d = 0{,}16$ м.

Магнитная проницаемость стали $\mu_r = 500$. Ток в витке $I = 50$ А. Требуется определить значение вращающего момента M, действующего на якорь, оценить силу F, действующую на провода, и момент, обусловленный давлением проводов, M_0, считая магнитное поле под полюсами однородным с индукцией $B = 1$ Тл (при токе в витке, равном нулю).

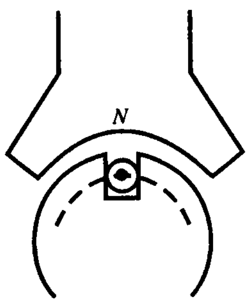


Рис. 15.28
Схема поперечного разреза электрической машины

Р е ш е н и е.

Обозначим индукцию в зазоре слева от проводника $B_Л$, справа — $B_П$. $\mu_{cm} \gg \mu_0$. Тогда $(B_Л - B_П)\delta = \mu_0 I$, где δ — зазор.

Пусть при отсутствии тока в якоре индукция в зазоре B_0, тогда $B_Л + B_П = 2B_0$. Энергия МП в зазоре слева $W_{0Л} = B_Л^2/2\mu_0$, справа $W_{0П} = B_П^2/2\mu_0$. Приращение энергии ΔW при повороте якоря по часовой стрелке на угол α:

$$\Delta W = \left(\frac{B_Л^2}{2\mu_0} - \frac{B_П^2}{2\mu_0}\right) 2\partial\delta \frac{D}{2}\Delta\alpha = \left(\frac{I}{\delta}B_0\right) l\delta D\Delta\alpha = IB_0 lD\Delta\alpha.$$

Изменением энергии в стали при повороте якоря на угол $\Delta\alpha$ можно пренебречь, т. к. $\mu_r \gg 1$. Тогда

$$M = \frac{\Delta W}{\Delta\alpha} = IB_0 lD = 5\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Силу, действующую на провод в пазу, можно оценить, исходя из следующих соображений. Если паз глубокий, то можно считать, что напряженность магнитного поля в нем приблизительно равна напряженности поля в стали, а индукция в μ раз меньше, чем в стали. Следовательно, сила, действующая на провод в пазу,

$$F = \frac{B_0}{\mu} lI = 0{,}05\ \text{Н},$$

а момент этой силы:

$$M_0 = Fd = \frac{B_0 lI}{\mu} d = M\frac{d}{D}\frac{1}{\mu} = 8\cdot 10^{-3}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, момент, действующий на провода в пазу, примерно в μ раз меньше момента, действующего на ротор.

З а д а ч а 15.36. Требуется рассчитать вращающий момент реактивного двигателя применительно к конструкции, показанной на рис. 15.29.

Р е ш е н и е.

При включении тока в обмотке w и возникновении магнитного потока Ф, замыкающегося по ярму Я, полюсным наконечникам П и ротору Р, выполненным из стали, на последний действует момент, стремящийся повернуть ротор вокруг оси 0–0. Для определения этого момента необходимо выражение для энергии МП двигателя продифференцировать по углу α, определяющему положение ротора. При этом с целью облегчения последующих расчетов выберем в качестве этого угла угол α, опирающийся на дугу перекрытия цилиндрических поверхностей полюсных наконечников и ротора.

Энергию МП двигателя рассчитаем через индуктивность обмотки, которую запишем в виде

$$L = \frac{w^2}{R_м} = \frac{w^2}{R_{м1} + R_{м\Delta}},$$

где $R_{м1}$, $R_{м\Delta}$ — магнитные сопротивления соответственно участков магнитопровода и воздушных зазоров между полюсными наконечниками и ротором. Для получения оценочных расчетных величин пренебрежем магнитным сопротивлением $R_{м1}$ путей магнитного потока по стальным участкам магни-

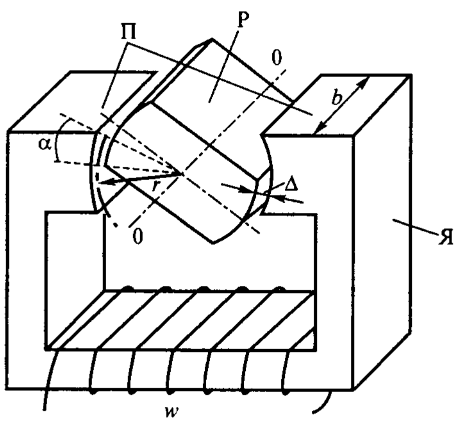


Рис. 15.29
Схема реактивного двигателя

топровода (ярмо, полюсные наконечники и ротор) по сравнению с магнитным сопротивлением $R_{м\Delta}$ воздушных зазоров и тем самым упростим выражение для индуктивности:

$$L \approx \frac{w^2}{R_{м\Delta}},$$

причем для суммарного магнитного сопротивления двух воздушных зазоров имеем

$$R_{м\Delta} = 2\frac{\Delta}{\mu_0 S} = 2\frac{\Delta}{\mu_0 br\alpha},$$

где S — площадь перекрытия полюсных наконечников и ротора, Δ — длина каждого зазора, r — средний радиус ротора и расточки полюсных наконечников, b — толщина магнитопровода (см. рис. 15.28).

Таким образом, для энергии МП двигателя имеем

$$W_м = 0{,}5LI^2 = 0{,}5\frac{W^2}{R_{м\Delta}}I^2 = \frac{W^2 I^2}{4\Delta}\mu_0 br\alpha.$$

Выполняя дифференцирование при условии постоянства токов, для момента реактивного двигателя получим

$$M = \frac{\partial W_м}{\partial \alpha} = \frac{w^2 I^2 \mu_0 br}{4\Delta}.$$

Положительный ответ показывает, что момент стремится увеличить угол α, т. е. стремится повернуть ось ротора до совпадения с осью полюсов.

15.7.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ С ПОМОЩЬЮ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

По определению магнитным моментом $\vec{p}_м$ называют величину

$$\vec{p}_м = IS\vec{n}, \tag{15.32}$$

где I — ток; S — площадь, ограниченная контуром; $\vec{n}$ — нормаль к контуру, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта (рис. 15.30).

В магнитном отношении элементарный контур с током вполне характеризуется его магнитным моментом $\vec{p}_м$. При этом сила Ампера, действующая на элементарный контур с током в МП, которая определяется как

$$\vec{f} = I\oint(d\vec{l} \times \vec{B}),$$

может быть также определена с помощью магнитного момента [15.2]:

$$\vec{f} = -p_м \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

где $p_м$ — модуль магнитного момента контура; $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial n}$ — производная вектора $\vec{B}$ по направлению нормали $\vec{n}$ или по направлению вектора $\vec{p}_м$.

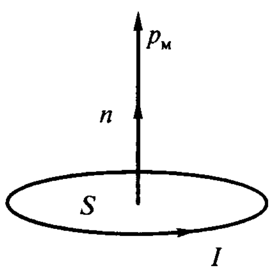


Рис. 15.30
Виток с током

15.8. ПОЛЯ НА ЗНАЧИТЕЛЬНОМ УДАЛЕНИИ ОТ ИСТОЧНИКОВ

Понятие магнитного момента контура используется не только для определения сил в МП. Оно используется также и для расчета МП на значительном удалении от источников.

В [15.3] рассмотрено МП многослойного соленоида. МП на оси многослойного соленоида (рис. 15.31) определяется по формуле

$$H = \frac{Iw_1w_2}{DL}B_1. \tag{15.33}$$

Здесь I — ток в соленоиде; w_1 — число витков в каждом слое соленоида; w_2 — число слоев, D — общая толщина слоев, L — длина соленоида; B_1 определяется выражением

$$B_1 = (l+x)\ln\frac{b+\sqrt{b^2+(l+x)^2}}{a+\sqrt{a^2+(l+x)^2}} + (l-x)\ln\frac{b+\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{a+\sqrt{a^2+(l-x)^2}}, \tag{15.34}$$

где a — внутренний радиус соленоида; b — его внешний радиус; $l = 0{,}5L$; x — расстояние от центра соленоида O до рассматриваемой точки на оси соленоида.

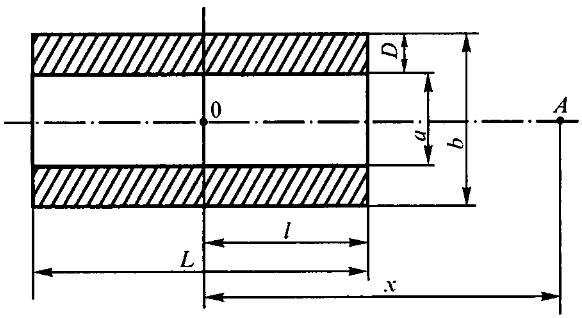


Рис. 15.31
Многослойный соленоид

Формула (15.33) используется авторами для определения напряженности поля (или магнитной индукции) на значительном удалении от источника.

В [15.4] отмечено, что магнитное поле катушки с током на расстоянии от ее центра, равном или превышающем наибольший габаритный размер катушки, совпадает с полем среднего витка, по которому протекает полный ток (Iw). Поле витка с током описывается достаточно сложной зависимостью, которая выражается через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Однако поле витка приближенно может быть заменено полем магнитного диполя с переменным магнитным моментом:

$$P_м = I\pi R^2\lambda,$$

где $\lambda = \left(\frac{z^2+\rho^2}{R^2+z^2+\rho^2}\right)^{3/2}$; ρ, z — цилиндрические координаты; R — радиус витка.

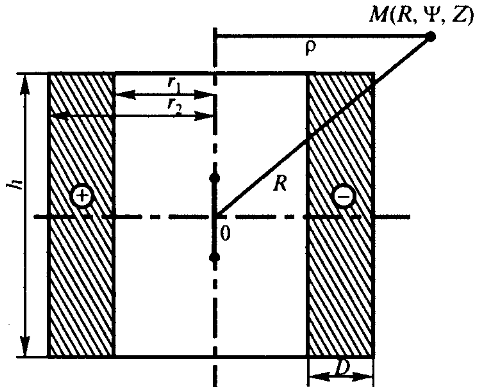


Рис. 15.32
Многовитковая катушка

Тогда составляющие напряженности поля:

$$H_z = -\frac{p_м(\rho^2 - 2z^2)}{4\pi r^5},$$

$$H_\rho = \frac{3p_м z\rho}{4\pi r^5}, \; r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Как показывают расчеты, данные выражения достаточно хорошо аппроксимируют поле витка с током уже на расстоянии $r \geq 2Г$ (Г — наибольший габаритный размер).

По приведенным формулам можно рассчитать поле обмоток, расположенных на шихтованных и ленточных магнитопроводах, т. к. в этих случаях вклад поля, возбуждаемого вихревыми токами, мал и практически может не учитываться.

При расположении обмоток на сплошных магнитопроводах (например, на магнитопроводах из феррита) внешнее поле ослабляется действием вихревых токов и при очень больших частотах становится достаточно слабым; для этих систем поле определяется по формуле

$$H = \frac{Iw}{\pi}\sqrt{\frac{R}{r}}\left(\frac{1}{r-R} + \frac{1}{r+R} - \frac{2\sqrt{\gamma\omega\mu}}{1+(r+R)\sqrt{\gamma\omega\mu}}\right),$$

здесь R — радиус обмотки, r — расстояние до рассматриваемой точки от центра обмотки; γ — удельная проводимость; μ — абсолютная магнитная проницаемость; ω — угловая частота возбуждаемого поля.

При наличии нескольких обмоток результирующее поле находят как сумму полей отдельных эквивалентных витков с учетом направлений и величин токов в каждом их них, а также фазовых соотношений.

В другой работе [15.5] используется тот же прием: рассматриваемый источник заменяется полем среднего витка многослойного соленоида и от него рассчитывается поле в рассматриваемой точке $M(r, \varphi, z)$ (рис. 15.32).

15.9.
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Уравнения МП постоянных токов (15.1)–(15.3) можно рассматривать как законы магнитных цепей. Действительно,

$$B = \mu H \rightarrow BS_м = \mu H S_м \frac{l_м}{l_м} \rightarrow \Phi = \frac{Hl_м}{\dfrac{l_м}{\mu S_м}} = \frac{U_м}{R_м}. \tag{15.35}$$

Выражение (15.35) является законом Ома для участка магнитной цепи. Здесь $U_м = Hl_м$ — магнитное напряжение; $R_м = \dfrac{l_м}{\mu S_м}$ — магнитное сопротивление участка магнитной цепи; $l_м$ — длина участка магнитопровода, $S_м$ — его сечение.

$$\operatorname{div}\vec{B}=0\to\oint_S\vec{B}d\vec{S}=0\to\sum\Phi=0 \qquad (15.36)$$

— это первый закон Кирхгофа для магнитной цепи.

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{J}\to\oint_\ell\vec{H}d\vec{l}=wI\to\sum U_м=\sum F \qquad (15.37)$$

— это второй закон Кирхгофа (здесь $F = Iw$ — МДС).

Законы магнитных цепей и их параметры аналогичны законам и параметрам электрических цепей (табл. 15.2).

Таблица 15.2

Соотношения законов и параметров магнитных цепей и законов и параметров электрических цепей

Электрические цепи	Магнитные цепи
Электродвижущая сила E	Магнитодвижущая сила $F = Iw$
Электрический ток I	Магнитный поток Ф
Электрическое напряжение U	Магнитное напряжение $U_м$
Электрическое сопротивление $R=\frac{l}{\gamma S}$	Магнитное сопротивление $R_м=\frac{l_м}{\mu S_м}$
Закон Ома $I=\frac{U}{R}$	Закон Ома $\Phi=\frac{U_м}{R_м}$
Первый закон Кирхгофа $\sum I=0$	Первый закон Кирхгофа $\sum\Phi=0$
Второй закон Кирхгофа $\sum U=\sum E$	Второй закон Кирхгофа $\sum U_м=\sum F$

На основе приведенной аналогии можно сделать вывод о том, что магнитные цепи могут быть рассчитаны теми же методами, что и электрические цепи.

З а д а ч а 15.37. Рассчитать магнитную цепь, приведенную на рис. 15.33*а* (слева). Магнитную проницаемость считать постоянной.

Р е ш е н и е.

На рис. 15.33*б* (справа) изображена схема, соответствующая магнитной цепи на рис. 15.33*а*. Направление МДС определено по правилу правого винта. Магнитные сопротивления:

$$R_{м\,с}=\frac{l_м}{\mu S_м};\ R_{м\,з}=\frac{\delta}{\mu_0 S_м};\ F=Iw.$$

Здесь $R_{м\,с}$ — магнитное сопротивление стального магнитопровода, $R_{м\,з}$ — магнитное сопротивление зазора магнитной цепи.

$$\Phi=\frac{F}{R_{м\,с}+R_{м\,з}};\ B=\frac{\Phi}{S_м};\ H_с=\frac{B}{\mu};\ H_з=\frac{B}{\mu_0}.$$

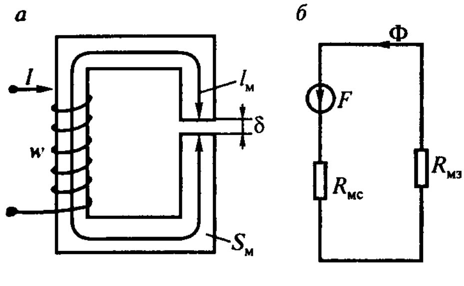


Рис. 15.33
Схема магнитной цепи

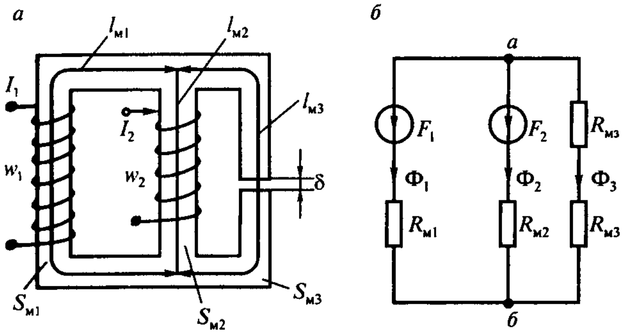


Рис. 15.34
Схема Ш-образного магнитопровода

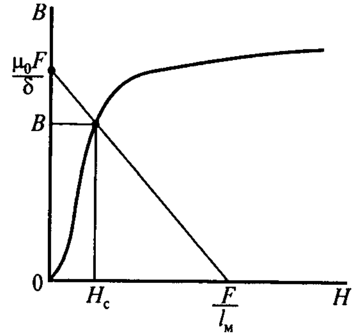


Рис. 15.35
Основная кривая намагничивания материала магнитной цепи

З а д а ч а 15.38. Рассчитать магнитную цепь, изображенную на рис. 15.34*а*. Магнитную проницаемость считать постоянной.

Р е ш е н и е.

На рис. 15.34*б* изображена схема, соответствующая магнитной цепи на рис. 15.34*а*. Направления МДС и величины магнитных сопротивлений определяются аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче.

Поскольку магнитная цепь сложная (два источника МДС), рассчитываем цепь методом узловых магнитных напряжений. Принимаем скалярный магнитный потенциал точки *б*: $\varphi_{м\,б} = 0$, тогда магнитное напряжение между точками *а* и *б*: $U_{м\,аб} = \varphi_{м\,а}$.

$$\varphi_{м\,а}\left(\frac{1}{R_{м1}} + \frac{1}{R_{м2}} + \frac{1}{R_{м3} + R_{м\,з}}\right) = -\frac{F_1}{R_{м1}} - \frac{F_2}{R_{м2}}.$$

Определив из последнего выражения величину $\varphi_{ма}$, можно найти магнитные потоки в стержнях магнитной цепи:

$$Ф_1 = \frac{F_1 - \varphi_{м\,а}}{R_{М1}};\ Ф_2 = \frac{F_2 - \varphi_{м\,б}}{R_{М2}};\ Ф_3 = \frac{\varphi_{м\,а}}{R_{м3} + R_{м\,з}}.$$

З а д а ч а 15.39. Рассчитать магнитную цепь, изображенную на рис. 15.34*а*, если зависимость $B(H_c)$ нелинейна (рис. 15.35).

Р е ш е н и е.

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи (рис. 15.35):

$$F = U_{м\,с} + U_{м\,з} = H_с l_м + H_з \delta.$$

Поделим все слагаемые последнего выражения на $l_м$:

$$\frac{F}{l_м} = H_с + H_з \frac{\delta}{l_м}.$$

На рис. 15.35 построена зависимость $B(H_с)$, соответствующая этому уравнению: $H_з = 0$ (что соответствует $B = 0$, т. к. $B = \mu_0 H_з$); $H_с = \dfrac{F}{l_м}$. Hс $= 0$; $H_з = \dfrac{F}{\delta}$ (что соответствует $B = \mu_0 H_з = \mu_0 \dfrac{F}{\delta}$). Через две точки строим прямую $B(H_с)$.

На пересечении двух кривых — только что построенной прямой и заданной кривой намагничивания — определяем искомые значения B и $H_с$; $H_з = \dfrac{B}{\mu_0}$.

З а д а ч а 15.40. Возьмем тороидальный сердечник из магнитотвердого материала и сделаем в нем распилы. Намотаем на него обмотку и пропустим по ней постоянный ток. После этого ток выключим и обмотку смотаем. Часть сердечника между двумя распилами вынем (рис. 15.36*а*) — получим постоянный магнит. Определить значение магнитной индукции постоянного магнита. Зависимость $B(H_c)$ магнитотвердого материала изображена на рис. 15.36*б*.

Р е ш е н и е.

После того как пропустили ток по обмотке, намагничивание сердечника характеризовалось точкой 1. После того как выключили — точкой 2. После того как вынули часть сердечника между двумя распилами — точкой 3. Чтобы найти положение точки 3, составим уравнение по второму закону Кирхгофа для магнитной цепи рис. 15.36*а*:

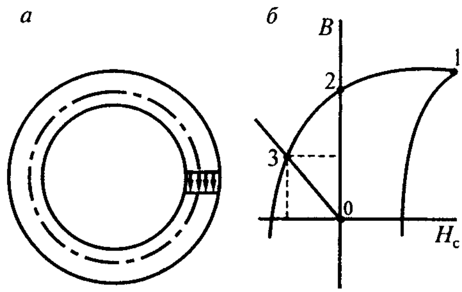


Рис. 15.36
Тороидальный магнитопровод
с зазором

$$H_с l_м + H_з \delta = 0,$$

откуда

$$H_з = -\frac{H_с l_м}{\delta}.$$

Умножим левую и правую части последнего выражения на μ_0:

$$H_з \mu_0 = B = \mu_0 \frac{l_м}{\delta} H_с.$$

Построим прямую $B(H_с)$ на рис. 15.36*б*. На пересечении этой прямой с кривой намагничивания найдем искомую точку 3.

Контрольные вопросы

1. Наличие МП в некоторой области пространства можно определить... (выберите наиболее полный ответ).

В а р и а н т ы:

а) измерением величины $\vec{H}$ в этой области пространства;
б) измерением величин $\vec{H}$, $\vec{B}$ в этой области пространства;
в) измерением величины $\vec{B}$ в этой области пространства;
г) измерением магнитных сил взаимодействия в этом пространстве.

2. Наиболее полно аналитически МП постоянных токов сформулировано в виде... (выберите ответ).

В а р и а н т ы:

а) $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$;
б) $\mathrm{rot}\vec{H} = 0$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$;
в) $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{\delta}$.

3. МП постоянного тока описываются следующими уравнениями математической физики... (выберите ответ).

Варианты:

а) $\Delta\vec{H}=0,\ \Delta U_M=0;$

б) $\Delta\vec{A}=-\mu\vec{\delta};$

в) $\Delta\vec{H}+k^2\vec{H}=0;$

г) $\Delta\vec{H}+\gamma\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0.$

4. Заземление всех видов аппаратуры, источников электрической энергии и приемников электрической энергии применяется для... (выберите наиболее полный ответ).

Варианты:

а) снижения опасности попадания обслуживающего персонала под напряжение;
б) обеспечения равного потенциала у источников энергии и у приемников энергии;
в) выравнивания фазных токов в цепях нагрузки;
г) возможного отвода атмосферного электричества;
д) защиты людей и оборудования от опасного воздействия электрического тока и обеспечения нормальной работы.

5. Энергия в ЭМП в объеме dv рассчитывается по формулам... (выберите одну из предложенных).

Варианты:

а) $W_0dv=(\gamma E^2+\dfrac{\varepsilon E^2}{2}+\dfrac{\mu H^2}{2})dv;$

б) $W_0dv=(\dfrac{\mu H^2}{2})dv;$

в) $W_0dv=(\dfrac{\varepsilon E^2}{2})dv;$

г) $W_0dv=(\dfrac{\varepsilon E^2}{2}+\dfrac{\mu H^2}{2})dv.$

6. Принцип соответствия плоскопараллельных ЭП и МП заключается в соответствии ряда величин... (выберите ответ).

Варианты:

а) $\rho\leftrightarrow\delta_Z$; $\varphi\leftrightarrow A_Z$; $\varepsilon\leftrightarrow 1/\mu$; $\vec{E}\leftrightarrow\vec{B}$; $\vec{D}\leftrightarrow\vec{H}$; $\tau\leftrightarrow I$; $U\leftrightarrow\Phi$; $C\leftrightarrow 1/L$, где C, τ, L, Φ — соответственно емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток, а z — координата распространения поля;
б) $\varphi\leftrightarrow A_Z$; $\vec{E}\leftrightarrow\vec{B}$; $\vec{D}\leftrightarrow\vec{H}$; $U\leftrightarrow\Phi$, где z — координата распространения поля;
в) $\rho\leftrightarrow\delta_Z$; $\varphi\leftrightarrow A_Z$; $\varepsilon\leftrightarrow 1/\mu$; $\tau\leftrightarrow I$; $C\leftrightarrow 1/L$, где C, τ, L, Φ — соответственно емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток, а z — координата распространения поля;
г) $\vec{E}\leftrightarrow\vec{B}$; $\vec{D}\leftrightarrow\vec{H}$; $\tau\leftrightarrow I$; $U\leftrightarrow\Phi$; $C\leftrightarrow 1/L$, где C, τ, L, Φ — соответственно емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток.

7. Силу, действующую в точке среды на помещенное в нее тело в МП, можно определить... (выберите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) сила является производной по расстоянию от магнитной энергии, в данной среде ее можно определить по формуле $f=-\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int(\mu H^2/2)dv,$ где x — координата, по которой идет изменение энергии;
б) сила является производной по расстоянию от магнитной энергии, в данной среде, ее можно определить по формуле $f=-\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int(B^2/2\mu)dv,$ где x — координата, по которой идет изменение энергии;

в) сила является интегральной характеристикой среды, определяемой по формуле $f = \vec{B}\vec{I}l$, где $\vec{B}$ — вектор плотности магнитного потока; $\vec{I}$ — вектор электрического тока, l — геометрический размер.

8. Плотность электрического тока в воздушной среде описывается в виде... (выберите наиболее полный ответ).

Варианты:

а) $\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \rho\vec{v}$;

б) $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$;

в) $\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$;

г) $\vec{\delta} = \gamma\vec{E} + \rho\vec{v}$;

д) $\vec{\delta} = \rho\vec{v}$.

9. Характеристики ЭМП — $\vec{D}, \vec{B}$ являются... (выберите ответ).

Варианты:

а) во всех средах векторными;
б) могут быть скалярными в изотропных средах;
в) могут быть скалярными и векторными;
г) могут быть векторными в изотропных средах и тензорными в анизотропных средах.

10. Аналитическая зависимость $\oint\limits_l \vec{A}d\vec{l} = \int\limits_S \mathrm{rot}\vec{A}d\vec{s}$, представляющая теорему Стокса, характеризует... (выберите полный ответ).

Варианты:

а) связь между линейным и поверхностным интегралами;
б) связь между векторной функцией и ее ротором;
в) зависимость, позволяющую перейти от поверхностного интеграла векторной функции к линейному интегралу этой же функции.

11. Аналитическая зависимость $\oint\limits_S \vec{A}d\vec{s} = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{A}dv$, представляющая теорему Остроградского, характеризует... (выберите полный ответ).

Варианты:

а) связь между поверхностным и объемным интегралами;
б) связь между векторной функцией и ее дивергенцией;
в) зависимость, позволяющую перейти от объемного интеграла векторной функции к поверхностному интегралу этой же функции.

12. МП, образующееся вокруг проводника с током $\vec{I}$, характеризуется напряженностью $\vec{H}$, описываемой... (выберите наиболее полный ответ).

Варианты:

а) законом полного тока: $\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = I$;

б) законом полного тока: $\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \vec{I}$;

в) формулой $\vec{H} = \dfrac{wI}{2\pi r}$, где r — радиус окружности, на которой измеряется магнитная напряженность;

г) первым уравнением Максвелла: $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$, где $\vec{\delta}$ — вектор плотности тока в проводнике.

16

ГЛАВА 16

РАСЧЕТЫ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

16.1. УСЛОВИЯ КВАЗИСТАТИЧНОСТИ

На практике обычно имеют дело с переменными токами, меняющимися по гармоническому закону, например $i = I_m \sin\omega t$, где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, f — частота переменного тока, $T = 1/f$ — период. Токи создают в окружающем пространстве МП. Изменение тока приводит и к изменению МП. Однако это изменение не может произойти сразу во всем пространстве. Оно будет распространяться, например, в вакууме или в воздухе со скоростью света $c = 3\cdot10^8$ м/с. Очевидно, что в каждый момент времени МП в непосредственной близости от проводника определяется мгновенным значением создающего его тока, если изменения тока во времени значительно медленнее, чем время распространения в пространстве этого изменения. Математически это можно описать выражением

$$T = \frac{1}{f} \gg \frac{l}{c},\ f \ll \frac{c}{l}, \tag{16.1}$$

где l — протяженность проводника, в котором наводится ЭДС.

Условие (16.1) называют условием квазистационарности; при его соблюдении мгновенные значения индукции МП синхронно меняются с током (эффектом распространения МП можно пренебречь). Отметим также, что постоянный ток — это частный случай квазистационарного переменного тока с частотой $f = 0$.

Возможен и другой (хотя по существу тот же, но другими словами) подход: ЭМП, периодически изменяющееся во времени по синусоиде с не слишком высокими частотами, можно рассматривать в квазистатическом приближении при условии

$$\gamma\vec{E} \gg \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{16.2}$$

(в уравнениях Максвелла пренебрегается токами смещения по сравнению с токами проводимости), откуда следует $\gamma \gg \omega\varepsilon$, где γ — электрическая проводимость среды, 1/Ом·м; ω — круговая частота ЭМП; ε — диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м. Если учесть, что $\omega = 2\pi f$, то $f \ll (\gamma/2\pi\varepsilon)$. Практически можно ограничиться частотами $f < 10^5$, Гц. Примерно к такому же выводу можно прийти на основании (16.1).

16.2. ЭДС, НАВОДИМЫЕ В ТЕЛАХ И КОНТУРАХ

Задача 16.1. Металлический диск радиусом $r = 15$ см, расположенный перпендикулярно МП с индукцией $B = 2$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр (рис. 16.1). Два скользящих контакта (один на оси диска, другой на его краю) соединяют диск с сопротивлением $R = 4$ Ом. С какой угловой скоростью должен вращаться диск, чтобы на сопротивлении выделялась мощность 5 Вт?

Решение.

При повороте на угол $\Delta\alpha$ радиус диска описывает площадь $\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\alpha$ и при этом пересекает некоторое число линий магнитной индукции. Изменение магнитного потока при повороте диска на угол $\Delta\alpha$ равно $\Delta\Phi = \frac{1}{2} B r^2 \Delta\alpha$. Индуктируемая при этом между контактами ЭДС:

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} B\omega r^2,$$

где $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$ — угловая скорость вращения диска. Электрический ток в цепи (ток будет постоянный, т. к. ЭДС также постоянна во времени):

$$I = \frac{e}{R} = \frac{B\omega r^2}{2R}.$$

Выделяемая им мощность:

$$P = I^2 R = \frac{B^2\omega^2 r^4}{4R},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{4RP}{B^2 r^4}} = 200\frac{1}{c}.$$

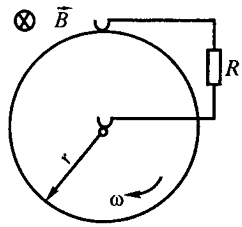


Рис. 16.1
Металлический диск на оси

Количество оборотов в минуту диска определяется из соотношений

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n_1 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30};\ n = \frac{30\omega}{\pi},$$

здесь n_1 — количество оборотов диска в секунду; n — количество оборотов в минуту.

Задача 16.2. Круглый виток радиуса a, изготовленный из медной проволоки площадью поперечного сечения $S_{пр}$, находится в однородном МП (в воздухе), напряженность которого за некоторое время меняется от 0 до H_0. Какое количество электричества пройдет через поперечное сечение проволоки за то время, пока там находится электрический ток?

Решение.

При изменении магнитного потока, пронизывающего виток, в нем индуктируется ЭДС:

$$|e| = \pi a^2 \frac{dB}{dt} = \pi a^2 \mu_0 \frac{dH}{dt}.$$

Ток, протекающий по кольцу $i = \frac{|e|}{R}$, где $R = \frac{l}{\gamma S_{\text{пр}}}$, $l = 2\pi a$, γ — удельная проводимость провода (меди), поэтому

$$i = \frac{\pi a^2 \mu_0 \gamma S_{\text{пр}}}{2\pi a} \frac{dH}{dt} = \frac{\mu_0 \gamma S_{\text{пр}} \cdot a}{2} \frac{dH}{dt}.$$

Количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника,

$$Q = \int_0^{t_0} i dt = \int_0^{H_0} \frac{\mu_0 \gamma S_{\text{пр}} a}{2} \frac{dH}{dt} dt = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma S_{\text{пр}} a H_0.$$

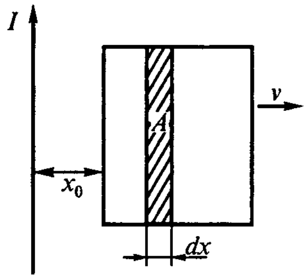


Рис. 16.2
Схема задачи 16.3

Задача 16.3. Имеется бесконечно длинный проводник, по которому проходит постоянный ток $I = 0{,}8$ А. В направлении, перпендикулярном к проводнику, движется квадратная рамка со стороной $a = 0{,}7$ м (рис. 16.2). Скорость рамки постоянна и равна v. В некоторый момент времени расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки $X_0 = 0{,}5$ м. Какова должна быть скорость рамки, чтобы в этот момент в ней индуцировалась ЭДС $e = 5 \cdot 10^{-6}$ В?

Решение.

Индукция МП в произвольной точке A на расстоянии x от проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Магнитный поток через элемент площади рамки, который на рисунке заштрихован:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx.$$

Магнитный поток через всю рамку:

$$\Phi = \int_{x_0}^{x_0 + a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \ln \frac{x_0 + a}{x_0}.$$

Для произвольного положения рамки индуктированная в ней ЭДС:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi} \frac{x}{x + a} \cdot \frac{a}{x^2} \cdot v = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi (x + a) x},$$

откуда

$$v = \frac{e \cdot 2\pi (x + a) x}{\mu_0 I a^2}.$$

При $x = x_0$:

$$v = \frac{e \cdot 2\pi(x_0 + a)x_0}{\mu_0 I a^2} \approx 38 \text{ м/с}.$$

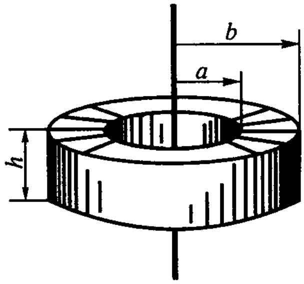


Рис. 16.3
Прямолинейный провод с током в центре тороидальной катушки

З а д а ч а 16.4. Внутри однослойной тороидальной катушки прямоугольного сечения протянут длинный прямой провод (рис. 16.3), по которому протекает ток $I = I_m \sin\omega t$. Число витков катушки w, магнитная проницаемость μ_0. Найти ЭДС, индуктируемую в катушке.

Р е ш е н и е.

Искомая ЭДС

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -w\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток через поперечное сечение катушки:

$$\Phi = \int_a^b B_n dS = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}.$$

Здесь $B_n = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ — значение индукции, создаваемой током в проводе на расстоянии r от него. ЭДС, индуктируемая в катушке,

$$e = -w\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 h \omega I_m \cos\omega t}{2\pi} \ln\frac{b}{a}.$$

З а д а ч а 16.5. Плоская спираль с числом витков w, плотно прилегающих друг к другу, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости спирали (рис. 16.4). Наружный радиус витков спирали равен a. МП меняется во времени по закону $B = B_m \sin\omega t$. Найти амплитудное значение ЭДС индукции, наведенной в спирали.

Р е ш е н и е.

ЭДС в каждом витке спирали:

$$e_r = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 B_0 \omega \cos\omega t,$$

где r — радиус рассматриваемого витка. На радиус dr приходится число витков $dw = \dfrac{w}{a} dr$. Витки соединены последовательно, поэтому полная ЭДС индукции в спирали:

$$e = \int_0^a e_r dw = \int_0^a -\pi r^2 B_0 \omega \cos\omega t \cdot \frac{w}{a} dr.$$

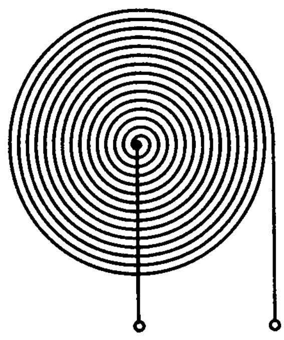


Рис. 16.4
Катушка спиральной намотки с током

Амплитудное значение ЭДС:

$$E_m = \frac{1}{3}\pi a^2 B_0 \omega w.$$

З а д а ч а 16.6. Между проводами двухпроводной линии симметрично и в одной плоскости с ними расположена рамка, имеющая 100 витков (см. рис. 16.5). Через рамку проходит ток $i = 10\sin 500t$, А. Вывести формулу коэффициента

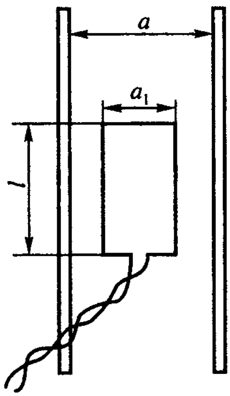


Рис. 16.5
Схема расчета к задаче 16.6

взаимной индуктивности. Определить величину ЭДС, наводимой в линии, если $a = 40$ мм, $a_1 = 25$ мм, $l = 50$ мм.

Р е ш е н и е.

Контур, образованный двухпроводной линией, обозначим цифрой 1, контур, образованный рамкой, — цифрой 2. Поскольку в линейной среде $M_{12} = M_{21}$, предположим, что ток течет по линии, а в рамке наводится ЭДС. Эта ЭДС, наводимая в рамке от двухпроводной линии:

$$e_r = -\frac{d\Phi}{dt} = -w\frac{d\Phi}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}.$$

Магнитный поток Φ' в рамке от левого провода:

$$\Phi' = \int\limits_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a-a_1}{2}+a_1} \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a+a_1}{2}} \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_{\frac{a-a_1}{2}}^{\frac{a+a_1}{2}} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{a+a_1}{a-a_1},$$

где $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ — магнитная индукция на расстоянии r от левого провода; $ds = ldr$.

Магнитный поток в рамке от правого провода будет таким же, поэтому магнитный поток в рамке от обоих проводов

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\psi}{i_1} = \frac{w\Phi}{i_1} = \frac{\mu_0 wl}{\pi}\ln\frac{a+a_1}{a-a_1}.$$

Численные значения: $M_{12} = M_{21} = 2{,}93\cdot10^{-6}$ Гн.

Используя полученный коэффициент взаимной индукции, найдем ЭДС, наводимую в линии:

$$e = -M_{12}\frac{di_2}{dt} = -\frac{\mu_0 wl}{\pi}\ln\frac{a+a_1}{a-a_1}\frac{d}{dt}(10\sin 500t) =$$
$$= -2{,}93\cdot10^{-6}\cdot10\cdot500\cos\omega t = 0{,}0147\cos\omega t.$$

З а д а ч а 16.7. Плоская проволочная петля расположена вблизи провода с током $i = 100\sin 314t$, А (рис. 16.6). Ось провода лежит в плоскости, проходящей через петлю. Вычислить ЭДС, наводимую в петле.

Р е ш е н и е.

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}, \quad \Phi = \int\limits_{r_1}^{r_2}\vec{B}d\vec{r} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} l\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Здесь r_1 — расстояние от провода до ближайшей к нему стороны петли (50 мм); r_2 — то же до удаленной стороны (100 мм); $l = 200$ мм; $\mu_0 \approx 1{,}25\cdot10^{-6}$ Гн/м. А значит,

$$e = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\frac{d}{dt}(100\sin 314t) =$$
$$= -\frac{100\cdot314\mu_0 l}{2\pi}\cos 314t = -0{,}87\cos 314t \text{ мВ}.$$

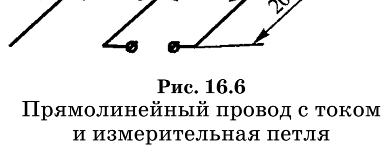


Рис. 16.6
Прямолинейный провод с током и измерительная петля

Задача 16.8. Определить взаимную индуктивность между двухпроводной линией передачи и линией связи (рис. 16.7). Провода линий проходят параллельно.

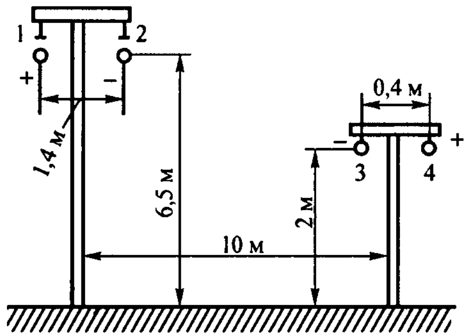


Рис. 16.7
Взаимосвязь между двухпроводной ЛЭП и линией связи

Решение.

В соответствии с предыдущей задачей магнитный поток, созданный проводом 1 в рамке (линии связи):

$$\Phi_1 = \int_{d_{14}}^{d_{13}} \vec{B}d\vec{S} = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\int_{d_{14}}^{d_{13}}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\ell n\frac{d_{13}}{d_{14}}.$$

Магнитный поток, созданный проводом 2 в линии связи:

$$\Phi_2 = \int_{d23}^{d_{24}} \vec{B}d\vec{S} = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\int_{d_{23}}^{d_{24}}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i\ell l}{2\pi}\ln\frac{d_{24}}{d_{23}}.$$

Суммарный поток, сцепляющийся с линией связи:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\left(\ln\frac{d_{13}}{d_{14}} + \ln\frac{d_{24}}{d_{23}}\right) = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\ln\frac{d_{13}\cdot d_{24}}{d_{14}\cdot d_{23}},$$

$$M = \frac{\psi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{d_{13}\cdot d_{24}}{d_{14}\cdot d_{23}}. \qquad (16.3)$$

Такое же выражение для взаимной индуктивности двух параллельных линий получено в [16.1].

Задача 16.9. По контактному проводу электрифицированной железной дороги протекает ток $I = 1000$ А частотой 50 Гц. Какая ЭДС будет наводиться на единицу длины проводов линии связи, проходящей параллельно полотну железной дороги при различном расположении проводов А и Б, указанном на рис. 16.8? Расстояние между проводами линии связи 0,5 м.

Решение.

Для определения наводимой ЭДС воспользуемся формулой (16.3), причем $l = 1$ м.

У данной задачи есть два варианта решения.

1. Заменяем рельсы одним проводником, расположенным посередине. Расположение проводов связи А:

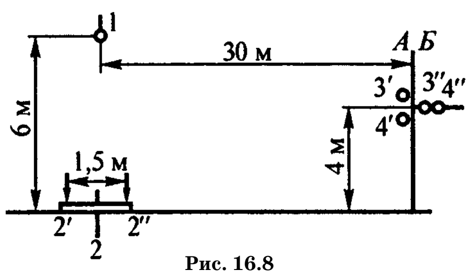


Рис. 16.8
Схема расчета к задаче 16.9

$$M_A = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{d_{13'}\cdot d_{24'}}{d_{14'}\cdot d_{23'}} = 2\cdot 10^{-7}(-3{,}3\cdot 10^{-3}) = -6{,}6\cdot 10^{-10}\ \text{Гн/м},$$

$d_{13'}$, d_{14}, $d_{23'}$, $d_{24'}$ — расстояния между соответствующими проводами,

$$E_A = \omega M_A I = 2\pi\cdot 50(-6{,}6\cdot 10^{-10})\cdot 10^3 = -2{,}06\cdot 10^{-4} \approx -0{,}2\ \text{мВ/м}.$$

Расположение проводов связи Б:

$$M_Б = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13''} \cdot d_{24''}}{d_{14''} \cdot d_{23''}} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}02 = 0{,}04 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

$$E_Б = \omega M_Б I = 314 \cdot 0{,}04 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 = 1{,}25 \cdot 10^{-3} = 1{,}25 \text{ мВ/м.}$$

2. Ток в рельсах распределяется поровну.

Расположение проводов связи А. Коэффициент взаимной индукции между левым рельсом и линией связи:

$$M'_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13'} \cdot d_{2'4'}}{d_{14'} \cdot d_{2'3'}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м.}$$

Коэффициент взаимной индукции между правым рельсом и линией связи:

$$M''_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13'} \cdot d_{2''4'}}{d_{14'} \cdot d_{2''3'}} = -24 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м,}$$

$$E_A = \omega (M'_A + M''_A) \cdot \frac{I}{2} = 314 \cdot (-18 \cdot 10^{-10}) \cdot 5 \cdot 10^2 = -2{,}8 \cdot 10^{-4} = -0{,}28 \text{ мВ/м.}$$

Расположение проводов связи Б:

$$M'_Б = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13''} \cdot d_{2'4''}}{d_{14''} \cdot d_{2'3''}} = -7{,}4 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м,}$$

$$M''_Б = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{13''} \cdot d_{2''4''}}{d_{14''} \cdot d_{2''3''}} = 0{,}6 \cdot 10^{-10} \text{ Гн/м,}$$

$$E_Б = \omega (M'_Б + M''_Б) \cdot \frac{I}{2} = 314 \cdot (-6{,}9) \cdot 10^{-10} \cdot 500 = -1{,}06 \cdot 10^{-4} \approx -0{,}1 \text{ мВ/м.}$$

Задача 16.10. Металлический диск, насаженный на вал, вращается с постоянной скоростью 3000 об/мин в однородном магнитном поле, индукция которого 1 Тл, она перпендикулярна плоскости диска. Радиус диска $R = 0{,}1$ м. Требуется определить ЭДС, возникающую между валом и внешней окружностью диска.

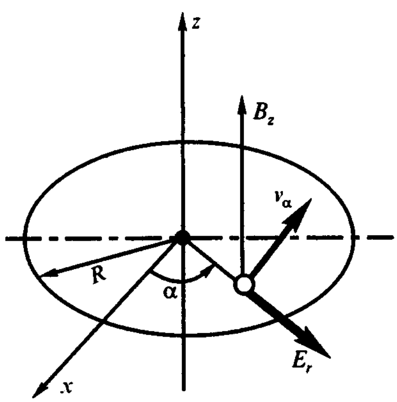


Рис. 16.9
Схема расчета к задаче 16.10

Решение.

Напряженность ЭП определяется векторным произведением $\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{B}$. В системе координат, изображенной на рис. 16.9, ЭДС:

$$e = \int_0^R E_r dr = \frac{\omega R^2 B}{2}, \; E = E_r = v_\alpha B_z = \omega r B.$$

Поскольку $\omega = 2\pi f = \pi n/30$, то окончательно $e = \pi n R^2 B/60$. Аналогичный результат получен в задаче 16.1.

Задача 16.11. Стержень AD движется в МП (рис. 16.10) со скоростью $v = 0{,}25$ м/с. Магнитная индукция между полюсами электромагнита (т. е. на пло-

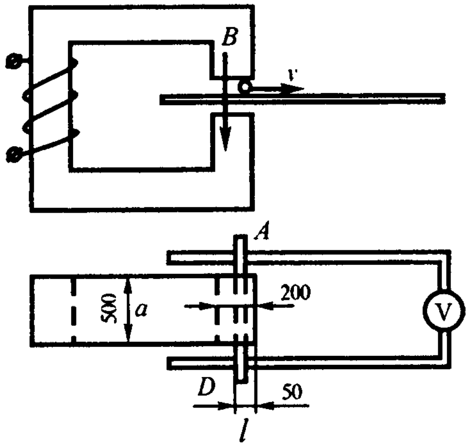


Рис. 16.10
Схема расчета к задаче 16.11

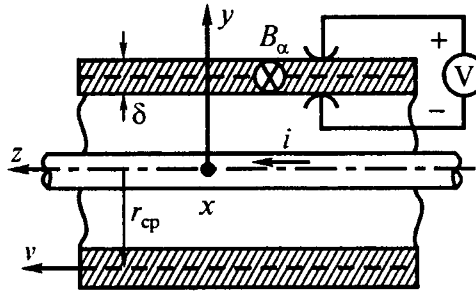


Рис. 16.11
Схема расчета к задаче 16.12

щади 0,5 м × 0,2 м) изменяется во времени по закону $B = B_0(1 - kt)$, где $B_0 =$ $= 1$ Тл, $k = 5\ с^{-1}$, t — время, отсчитываемое от момента, когда стержень AD расположен, как показано на рис. 16.10. В остальной части проводникового контура, замкнутого вольтметром, МП можно пренебречь. Требуется определить ЭДС, наводимую в контуре (показание вольтметра V).

Р е ш е н и е.

ЭДС, наводимая в контуре, определяется по закону электромагнитной индукции:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BS) = -\left(S\frac{dB}{dt} + B\frac{dS}{dt}\right).$$

В условиях данной задачи $B = B_0(1 - kt)$; $S = a(l - vt)$; $dB/dt = -B_0k$; $dS/dt =$ $= -av$, где $a = 0{,}5$ м; $l = 0{,}05$ м и $e = aB_0(lk + v - 2vkt)$.

Заметим, что часть ЭДС, обусловленная движением контура (BdS/dt), может быть определена иным способом по напряженности ЭП, возникающей в проводнике, движущемся в МП: $aB_0(1 - kt)v$.

З а д а ч а 16.12. Медная цилиндрическая труба малой толщины δ при среднем радиусе $r_{ср}$ коаксиально надета на провод с током I и движется со скоростью v в направлении, совпадающем с осью проводника (рис. 16.11). Требуется определить показания вольтметра, присоединенного к внутренней и внешней поверхностям трубы посредством щеток. Зависят ли показания вольтметра от магнитных и электрических свойств трубы? Возникают ли в трубе напряженность поля, ток и заряды?

Р е ш е н и е.

Для решения задачи выберем круговую цилиндрическую систему координат с центром на оси провода. Вокруг провода с током образуется магнитное поле в трубе с индукцией $B = B_\alpha = I\mu/2\pi r_{ср}$. При движении трубы со скоростью $v = v_z$ в МП с индукцией B_α возникает радиальная напряженность ЭП $E_{ст} = vB$, которую будем называть сторонней. В проводящей трубе под действием ЭП должен протекать ток плотностью $\vec{J} = \gamma(E + E_{\text{ст}})$, где E — напряженность ЭП при покоящейся трубе. Так как цепь тока разомкнута (считаем, что сопротивление вольтметра бесконечно велико) и, следовательно, $\vec{J} = 0$, то $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ст}}$, т. е. в трубе образуется радиальная составляющая напряженности поля $E_r = -vB$.

Из общего выражения для напряженности поля $\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ следует, что в условиях задачи $E_r = -(\nabla\varphi)_r = -vB = -vI\mu/2\pi r_{\text{ср}}$, так как $\partial A/\partial t = 0$. Вне трубы ЭП равно нулю. На внешней поверхности трубы появляются положительные, на внутренней — отрицательные заряды.

Показания вольтметра вычислим, применяя закон электромагнитной индукции $\oint \vec{E}d\vec{l} = -\partial\Phi/\partial t$. Отметим, что под интегралом стоит $E = -\nabla\varphi$, не включающее $E_{\text{ст}}$.

Выберем контур, проходящий через вольтметр, по соединительным проводам и вдоль радиуса трубы между щетками, связанный с направлением потока правилом правоходового винта. Тогда $E_r\delta + U = \partial\Phi/\partial t$ или $U = \partial\Phi/\partial t + vB\delta$.

При движении немагнитной трубы поток, сцепленный с контуром, не изменяется, т. е. $\partial\Phi/\partial t = 0$ и

$$U = v\delta B = v\delta I\mu_0/2\pi r_{\text{ср}}.$$

При движении магнитной трубы с проницаемостью μ поток уменьшается со скоростью v. Тогда

$$\partial\Phi/\partial t = -\frac{I}{2\pi r_{cp}}(\mu - \mu_0)v\delta \text{ и } U = v\delta I\mu_0/2\pi r_{\text{ср}}.$$

Как следует из приведенного решения, показания вольтметра не зависят от магнитных и электрических свойств материала трубы.

16.3. СИЛЫ И ЭНЕРГИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

З а д а ч а 16.13. Проводник $ABCD$ изогнут в форме, как показано на рис. 16.12. Подвижный проводник ab скользит свободно сверху вниз без нарушения контакта. Сопротивление подвижного проводника R, масса m, длина l. Вся конструкция помещена в однородное МП $\vec{B}$, перпендикулярное плоскости рисунка. Какова максимальная скорость проводника ab?

Р е ш е н и е.

Пусть скорость проводника в какой-то момент времени равна v. Тогда ЭДС индукции в контуре $abcd$:

$$e = Blv,$$

а ток

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Так как по проводнику ab течет ток, то со стороны МП на него будет действовать сила Ампера:

$$\overrightarrow{df} = i[d\vec{l} \cdot \vec{B}],$$

где $d\vec{l}$ — элемент длины проводника. Эта сила направлена вверх и препятствует свободному падению проводника ab. Так как $l \perp B$, то

$$f = i\int_0^\ell Bdl = iBl.$$

После подстановки в последнее выражение значения тока, найдем

$$f = \frac{B^2l^2v}{R}.$$

Ускорение проводника ab в рассматриваемый момент времени определяется из соотношения

$$ma = mg - f.$$

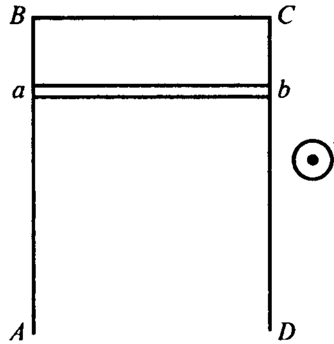


Рис. 16.12
Схема расчета к задаче 16.13

Максимальную скорость проводник достигнет, когда сила Ампера и сила тяжести сравняются (ускорение проводника будет равно нулю). Вначале, когда скорость v была мала, сила тяжести была больше силы Ампера. Если сила Ампера станет больше силы тяжести, скорость будет уменьшаться:

$$v_{\max} = \frac{mgR}{B^2\ell^2}.$$

З а д а ч а 16.14. Пластинами конденсатора являются металлические диски радиусом b. Конденсатор включен в цепь переменного тока $i = I_m\cos\omega t$ (рис. 16.13). Определить максимальное значение энергии МП, локализованного в конденсаторе. Расстояние между обкладками $d = 1$ мм, $I_m = 1$ мА, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

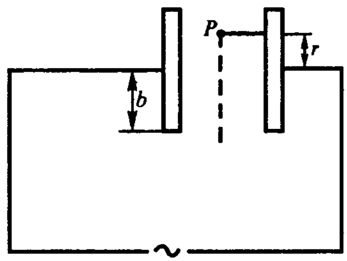


Рис. 16.13
К расчету энергии МП в конденсаторе

Р е ш е н и е.

Для произвольной точки P внутри конденсатора

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = i_S,$$

где L — длина окружности радиуса r, i_S — ток, проходящий через площадку $S = \pi r^2$.

$$i_S = \frac{i\cdot\pi r^2}{\pi b^2} = i\frac{r^2}{b^2};$$

$$H\cdot 2\pi r = i\frac{r^2}{b^2};\ H = i\frac{r^2}{b^2\cdot 2\pi r} = i\frac{r}{2\pi b^2}.$$

Энергия магнитного поля, заключенного в конденсаторе:

$$W_м = \frac{\mu_0}{2}\int_0^b H^2dV,$$

где $dV = 2\pi r dr\cdot d$.

$$W_м = \frac{\mu_0}{2}\cdot i^2\frac{2\pi d}{4\pi^2b^4}\int_0^b r^3dr = \frac{\mu_0 i^2 d}{16\pi}.$$

Максимальное значение энергии МП:

$$W_{M\max} = \frac{\mu_0 I_m^2 d}{16\pi} = 0{,}25 \cdot 10^{-16}\,\text{Дж}.$$

З а д а ч а 16.15. Тороидальная катушка имеет однослойную обмотку с $w = 500$ витков. Длина тороида $l = 30$ см. По обмотке течет ток $I = I_m \sin\omega t$, $I_m = 1$ А, $\omega = 2\pi f$, $f = 100$ Гц. Найти плотность тока смещения внутри тороида как функцию расстояния r от его оси. Вычислить максимальное значение энергии электрического поля, локализованного внутри тороида. Диаметр обмотки $2R_0 = 8$ см, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Р е ш е н и е.

Напряженность МП внутри обмотки:

$$H = \frac{wi}{l};\; B = \frac{\mu_0 wi}{l}.$$

В контуре, ограничивающем сечение внутри обмотки:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

т. к. $e = \int\limits_L \vec{E} d\vec{l}$ и $\Phi = \int\limits_S B_n dS$, то выбирая контур L внутри обмотки, для некоторого расстояния r от оси получим

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2,$$

где $\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{\mu_0 w}{l}\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\mu_0 w}{l}\omega I_m \cos\omega t$, и окончательно

$$E = -\frac{\mu_0 w \omega I_m r}{2l}\cos\omega t.$$

Плотность тока смещения внутри обмотки:

$$J_{\text{см}} = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 w \omega^2 I_m r}{2\ell}\sin\omega t.$$

Энергия ЭП в обмотке:

$$W_e = \int\limits_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV,$$

где $dV = 2\pi r dr \cdot l$,

$$W_e = \frac{\mu_0^2 \varepsilon_0 w^2 \omega^2 I_m^2 \cos^2\omega t \cdot 2l}{4l^2}\int\limits_0^{R_0} r^3 dr = \frac{\pi\varepsilon_0 \mu_0^2 w^2 \omega^2 R_0^4 I_m^2 \cos^2\omega t}{8l}\ \text{Дж};$$

$$W_{e\max} = \frac{\pi\varepsilon_0 \mu_0^2 w^2 \omega^2 R_0^4 I_m^2}{8l} = 1{,}11 \cdot 10^{-17}\ \text{Дж}.$$

З а д а ч а 16.16. При поражении молнией трубчатого молниеотвода труба оказалась сплющенной. Определить давление, действовавшее на трубу при токе молнии $I = 200$ кА в предположении, что ток протекал лишь в тонком поверхностном слое трубы (поверхностный эффект). Наружный радиус трубы $r_0 = 1{,}25$ см.

Р е ш е н и е.

Сила, действующая на элемент поверхности dS,

$$df = \frac{dW}{dr} = -\frac{1}{2}BHdS,$$

где dW — приращение энергии в единице объема $dV = dS \cdot dr$:

$$dW = -W'dV = -\frac{1}{2}BHdS \cdot dr,$$

W' — энергия МП в единице объема. Знак минус указывает на то, что МП, созданное током, протекающим по трубе, находится вне трубы и действует не во внешнюю от трубы сторону (тогда был бы знак плюс), а во внутреннюю — внутрь трубы.

Давление, действовавшее на трубу,

$$p = \frac{df}{dS} = -\frac{1}{2}BH = -\frac{1}{2}\mu_0 H^2 = -0{,}5 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot (2{,}55)^2 \cdot 10^{12} = -4{,}06 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2,$$

где $H = \dfrac{I}{2\pi r_0} = \dfrac{2 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-2}} = 2{,}55 \cdot 10^6$ А/м.

З а д а ч а 16.17. Рассчитать силу левитации в МП.

Р е ш е н и е.

Простым примером возникновения силы левитации является подъем и сохранение подвешенного состояния благодаря силам МП замкнутого металлического кольца, надетого на стержень, помещенный внутри катушки индуктивности при протекании по ней переменного тока (рис. 16.14).

В замкнутом металлическом кольце МП индуктирует вихревые токи. В результате взаимодействия вихревых токов с внешним МП и возникает сила, поднимающая кольцо. Определим величину этой силы. На каждый малый участок кольца Δl во внешнем МП действует сила Ампера:

$$\Delta\vec{f} = i[\Delta\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

В цилиндрической системе координат с осью z, направленной вертикально (рис. 16.14), МП имеет две составляющие (рис. 16.15): B_r — радиальную

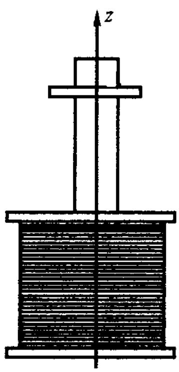


Рис. 16.14
К расчету левитации в МП

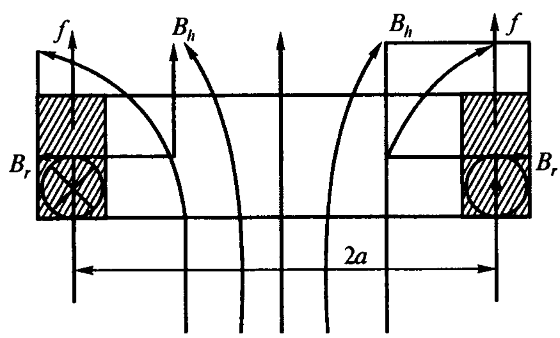


Рис. 16.15
Схема расчета к задаче 16.17

(горизонтальную) и B_h — осевую (вертикальную). На кольцо со средним радиусом a действует сила

$$f = 2\pi a i B_r. \qquad (16.4)$$

Независимо от направления тока i в катушке сила f действует вертикально вверх, т. е. стремится поднять кольцо. Действительно, пусть направление МП, пронизывающего кольцо, таково, как показано на рис. 16.15. Направление тока, индуктированного в кольце полем B_h, определяется по правилу Ленца. Направление силы, действующей на кольцо, определяется по правилу левой руки. Нетрудно убедиться, что если направление МП в катушке изменится на противоположное, то направление силы, действующей на кольцо, не изменится.

Для расчета силы f, действующей на кольцо, найдем количественную связь между индуктированным в кольце током и внешним МП катушки. Переменный синусоидальный ток в катушке создает синусоидально изменяющееся во времени МП:

$$B_r = B_{rm}\sin\omega t;\ B_h = B_{hm}\sin\omega t.$$

По закону электромагнитной индукции изменяющееся во времени МП B_h вызывает в замкнутом кольце ЭДС

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -S\frac{dB}{dt} - S\omega B_{hm}\cos\omega t,$$

где S — площадь сечения, пронизываемая магнитным потоком (при малой толщине кольца $S = \pi a^2$), $\omega = 2\pi f$ — угловая частота.

В комплексной форме записи последнее выражение имеет вид

$$\dot{E}_m = S\omega B_{hm} e^{-j90^\circ}.$$

Тогда комплексная амплитуда индуктированного в кольце тока:

$$\dot{I}_m = \dot{E}_m / \underline{Z}_k,$$

где $\underline{Z}_k$ — комплексное сопротивление кольца переменному току;

$$\underline{Z}_k = R_k + j\omega L_k = z_k e^{j\varphi_k};\ z_k = \sqrt{R_k^2 + (\omega L_k)^2};\ \varphi_k = \mathrm{arctg}(\omega L_k / R_k);$$

R_k — активное сопротивление кольца; L_k — индуктивность кольца.

После подстановки значений $\dot{E}_m$ и $\underline{Z}_k$ получим

$$\dot{I}_m = \frac{S\omega B_{hm} e^{-j90^\circ}}{z_k e^{j\varphi_k}} = \frac{S\omega B_{hm}}{z_k} e^{-j(90^\circ + \varphi_k)}.$$

Переходя от комплексной формы записи тока к действительной, найдем

$$i(t) = \frac{S\omega B_{hm}}{z_k}\sin(\omega t - 90^\circ - \varphi_k).$$

Подставляя значения $B_r(t)$, $i(t)$, в (16.4), получим

$$f(t) = -\frac{2\pi a \cdot \pi a^2 \cdot \omega B_{rm} \cdot B_{hm}}{z_k} \cdot \sin\omega t \cdot \sin(\omega t - 90^\circ - \varphi_k).$$

Знак «−» в последнем выражении указывает на то, что сила вызвана индуктированным током, а потому (по правилу Ленца) препятствует причине, ее вызвавшей, т. е. МП намагничивающей катушки.

Среднее значение силы за период изменения по абсолютной величине равно

$$f = \frac{\pi^2 a^3 \omega}{z_k} B_{hm} B_{rm} \cos(90^\circ + \varphi_k) = \frac{\pi^2 a^3 \omega}{z_k} B_{hm} B_{rm} \sin\varphi_k.$$

Так как $\omega L_k \ll R_k$, что следует из сопоставления индуктивной и активной составляющих полного сопротивления катушки, то $Z_k \approx R_k$, $\varphi_k = \mathrm{arctg}\dfrac{\omega L_k}{R_k}$.

Так как при малых углах $\sin\varphi_k = \mathrm{tg}\,\varphi_k = \dfrac{\omega L_k}{R_k}$, то

$$f = \frac{\pi^2 a^3 \omega^2 L_k}{R_k^2} B_{rm} B_{hm}. \tag{16.5}$$

Для расчета силы f по этой формуле необходимо знать активное сопротивление кольца $R_k = l_k/\gamma S_k$ ($l_k = 2\pi a$, $S_k = b_k c_k$, где $b_k c_k$ — соответственно высота и толщина кольца, γ_k — удельная проводимость материала, из которого изготовлено кольцо) и индуктивность кольца:

$$L_k = \mu_0 a\left(\ln\frac{8a}{b_k + c_k} - 0{,}5\right). \tag{16.6}$$

Задача 16.18. Определить высоту подъема кольца, изготовленного из алюминия ($\gamma = 34{,}5 \cdot 10^6$ Сим/м) со следующими параметрами: средний радиус кольца $a = 16{,}7$ мм; высота кольца $b_k = 20$ мм; толщина кольца $c_k = 0{,}75$ мм; масса $m = 4{,}5$ г $= 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ кГ при заданных зависимостях $B_{rm}(h)$ и $B_{hm}(h)$, полученных опытным путем и построенных на рис. 16.16 для катушки, изображенной на рис. 16.14.

Решение.

Сила, действующая на кольцо, уравновешивает силу тяжести:

$$f = mg = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 = 44{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Индуктивность кольца, определенная по формуле (16.6), $L_k = 28{,}4 \cdot 10^{-9}$ Гн. Активное сопротивление кольца:

$$R_k = \frac{2\pi a}{\gamma S_k} = \frac{2\pi a}{\gamma b_k c_k} = 0{,}203 \cdot 10^{-3}\ \text{Ом}.$$

Сомножитель выражения (16.5):

$$\frac{\pi^2 a^3 \omega^2 L_k}{R_k^2} = 3{,}1;$$

произведение:

$$B_{hm} \cdot B_{rm} = \frac{f}{\dfrac{\pi^2 a^3 \omega^2 L_k}{R_k^2}} = 1{,}42.$$

Этому значению соответствует произведение $B_{hm} \cdot B_{rm}$ (кривые на рис. 16.16), соответствующее $h = 8{,}5$ см.

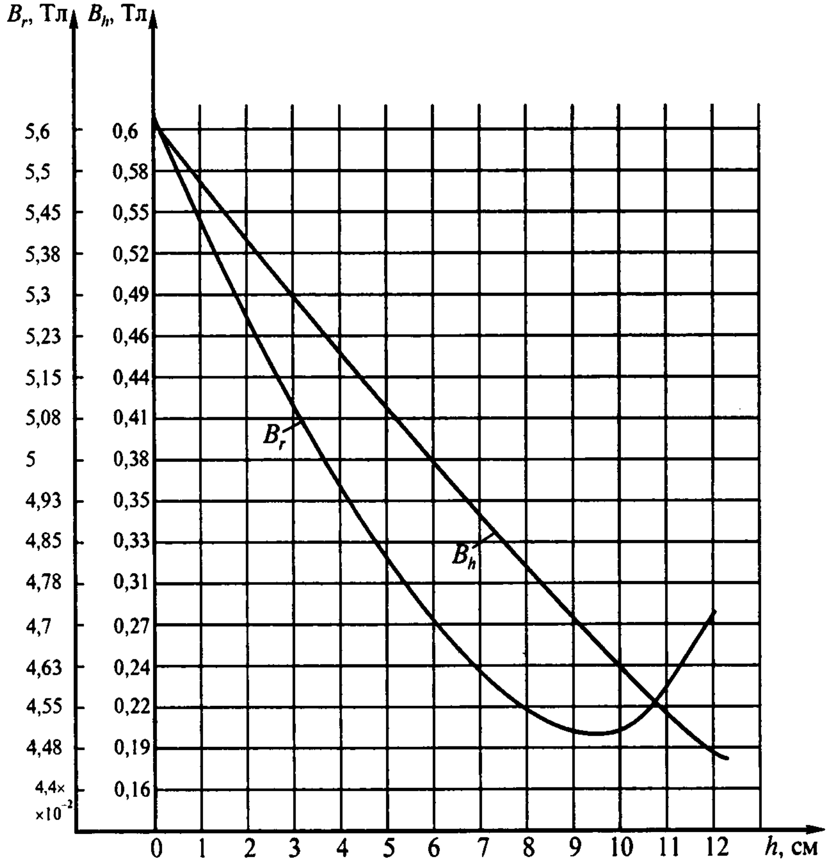


Рис. 16.16
Результаты эксперимента для задачи 16.18

З а д а ч а 16.19. Тонкая дисковая катушка с числом витков w и током i находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном ее плоскости (рис. 16.17). Определить силу, стремящуюся изменить средний радиус катушки.

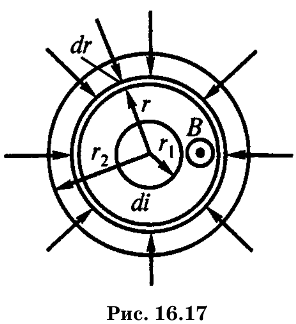


Рис. 16.17
Тонкая дисковая катушка

Р е ш е н и е.

Вырежем в теле катушки элементарную кольцевую трубку с током

$$di = \frac{iwdr}{r_2 - r_1}.$$

Радиальная сила, действующая на нее, $df = B2\pi rid$. Суммарная сила, действующая в радиальном направлении,

$$f = \int df = \int_{r_1}^{r_2} B2\pi r \frac{iw}{r_2 - r_1} dr = \pi Bwi(r_1 + r_2).$$

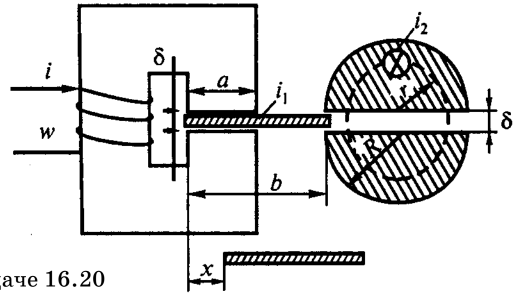


Рис. 16.18
Расчетная схема к задаче 16.20

З а д а ч а 16.20. В узкую щель между двумя половинами расщепленного по диаметру стального провода полем электромагнита выталкивается плоская тонкая латунная шина длиной l (рис. 16.18). Ток i_1 по сечению шины и ток i_2 по сечению провода распределены равномерно. Ток i_1 достаточно мал, и его влиянием на поле в зазорах электромагнита и провода можно пренебречь. Определить смещение шины от начального положения, показанного на рисунке, если магнитная проницаемость половинок провода и сердечника электромагнита велика ($\mu \approx \infty$), а их длина больше длины шины.

Р е ш е н и е.

Напряженность МП в сердечнике электромагнита и в половинках провода равна нулю ($\mu \approx \infty$). Намагничивающая сила обмотки w при этом должна быть равна намагничивающей силе зазора электромагнита, и напряженность в его зазоре:

$$H = \frac{wi}{\delta}.$$

Так как зазор δ мал, можно считать, что силовые линии поля в половинках провода будут полуокружностями. Применяя закон полного тока к одной из них (показана пунктиром), найдем напряженность поля в щели:

$$H_2 = \frac{i_2 r^2}{2\delta R^2}.$$

Внизу рис. 16.18 условно показано устойчивое положение шины, сместившейся на расстояние x. Так как поле в зазоре электромагнита однородно, электромагнитную силу, выталкивающую из него шину, можно определить как силу, действующую на проводник с током, равным той части тока i_1, которая находится в этом поле:

$$f = \mu_0 H l i_1 \frac{a-x}{b} = \mu_0 i_1 l \frac{wi}{\delta} \frac{a-x}{b}.$$

Поле в щели между половинками провода неоднородно. Сила, действующая на элементарное волокно шины с током $di_1 = i_1 \dfrac{dr}{b}$, равна

$$df_2 = \mu_0 H_2 l di_1.$$

Суммарная сила, выталкивающая шину из щели,

$$f_2 = \int df_2 = \mu_0 \int\limits_{R-x}^{R} \frac{i_2 r^2}{2\delta R^2} l \frac{i_1}{b} dr = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{6\delta R^2} \frac{R^3 - (R-x)^3}{b}.$$

В положении равновесия силы f и f_2 должны быть равны. Приравнивая их, получаем уравнение

$$(R-x)^3 = R^2[R-6w\frac{i}{i_2}(a-x)^2].$$

Обозначим левую часть через $f_1(x)$, а правую — через $f_2(x)$, и, придавая x ряд последовательных значений, можно построить графики этих функций. Искомое значение x соответствует точке пересечения.

Заметим, что если половинки провода будут неферромагнитными, но напряженность поля в щели:

$$H_2 \approx \frac{i_2 r}{2\pi R^2}.$$

Сила, выталкивающая шину из щели, равна

$$f_2 = \int \mu_0 H_2 l di_1 = \int\limits_{R-x}^{R} \mu_0 \frac{i_2 r}{2\pi R^2} l \frac{i_1}{b} dr = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{4\pi R^2}\frac{2Rx - x^2}{b}.$$

Приравнивая f и f_2, получаем уравнение

$$\frac{iw}{\delta}\frac{4\pi R^2}{i_2}(a-x) = 2Rx - x^2.$$

Его решение:

$$x = R\left[1+2\pi w\frac{iR}{i_2\delta} - \sqrt{\left(1+2\pi w\frac{iR}{i_2\delta}\right)^2 - 4\pi w\frac{ia}{i_2\delta}}\right].$$

Задача 16.21. По двухпроводной линии протекает постоянный ток $I = 100$ А при напряжении в начале линии $U = 100$ В, наружный радиус проводов $r_0 = 1{,}5$ мм, расстояние между осями $d = 300$ мм, удельная проводимость материала проводов $\gamma = 57\cdot10^4$ Сим/м. Определить значение и направление вектора Пойнтинга в воздухе у поверхности левого провода в точке M на расстоянии $l = 10$ м от начала линии.

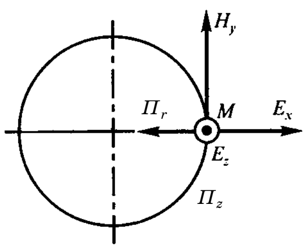


Рис. 16.19
Направление вектора Пойнтинга относительно проводника

Решение.

Напряжение между проводами в сечении, где находится точка M, U_M меньше напряжения U в начале линии на величину падения напряжения в проводах:

$$U_M = U - IR;\ R = 2\frac{l}{\gamma S_{\text{пр}}};\ l = 10 \text{ м}.$$

Вектор Пойнтинга в точке M имеет две составляющие. Составляющая Π_z (рис. 16.19), определяющая плотность потока мощности, передаваемого вдоль линии:

$$\Pi_z = E_x H_y = \frac{U_M I}{4\pi\ln(d/r_0)}\frac{d^2}{x^2(x-d)^2} \approx \frac{U_M I}{4\pi\ln(d/r_0)}\cdot\frac{1}{r_0^2} = 7200 \text{ Вт/см}^2.$$

Вторая составляющая Π_r направлена внутрь провода:

$$\Pi_r = E_z H_y = \frac{I^2}{2\pi^2 r_0^3} = 0{,}264 \text{ Вт/см}^2,$$

где E_z — тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ на поверхности провода:

$$E_z = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{\pi r_0^2 \gamma}.$$

H_y — напряженность МП:

$$H_y = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d - r_0}\right) \approx \frac{I}{2\pi r_0}.$$

З а д а ч а 16.22. По двухпроводной линии передается энергия от генератора к приемнику. Расстояние между осями проводов d = 1 м, радиус провода r_0 = 5 мм, напряжение между проводами линии $u = 10^4 \sin\omega t$ В, ток в линии

$$i = 100\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ А}.$$

Найти среднее значение вектора Пойнтинга в двух точках, лежащих на линии, соединяющей оси проводов (на оси x). Первая точка находится на внутренней поверхности левого провода, вторая — посередине между проводами. Влиянием земли и сопротивлением проводов можно пренебречь.

Р е ш е н и е.

В задаче 16.21 получено выражение для вектора Пойнтинга вдоль линии, соединяющей оси проводов при постоянном токе:

$$\varPi_z = \frac{UI}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{x^2(x-d)^2}.$$

Чтобы определить среднее значение $\varPi_z$, нужно вычислить среднее значение произведения

$$ui = U_m \sin\omega t I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt = \frac{U_m I_m}{2T}\int_0^T [\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]dt = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi.$$

Если подставить полученное значение в выражение для $\varPi_z$, то получим

$$\varPi_{z\,\text{ср}} = \frac{U_m I_m \cos\varphi}{8\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{x^2(x-d)^2} = \frac{3{,}75}{x^2(x-1)^2} \text{ кВт/м}^2.$$

При $x = r_0$ = 5 мм, $\varPi_{z\,\text{ср}} = 1{,}52 \cdot 10^5$ кВт/м^2.

При $x = \dfrac{d}{2} = 5$ мм, $\varPi_{z\,\text{ср}} = 60{,}1$ кВт/м^2.

16.4.
РАСЧЕТ ЕМКОСТИ ТРЕХФАЗНОЙ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

Строго говоря, все емкостные соотношения в различных системах тел справедливы только для ЭСП. Однако с большой степенью точности они могут быть использованы и при вычислении параметров ЛЭП при низкой частоте (например, f = 50 Гц). Критерием, при котором переменное ЭП около проводов линии в отдельные моменты времени можно приближенно рассматривать как ЭСП, может служить соотношение между линейными размерами области, в которой рассматривается поле, и длиной электромагнитной волны. Длина электромагнитной волны λ связана с частотой колебаний f соотношением $\lambda = v/f$, где v — скорость ее распространения. В воздухе $v = 3\cdot10^8$ м/с и при частоте 50 Гц имеем $\lambda = 6\cdot10^6$ м. На длине волны фаза колебаний напряженности поля меняется на 2π. В пределах области, линейные размеры которой значительно меньше λ, можно считать фазу колебаний напряженности поля одинаковой во всех точках области и с большой степенью точности рассматривать поле в каждый момент времени как электростатическое.

В уравнениях, связывающих заряды и потенциалы, необходимо под Q и U понимать в этом случае мгновенные значения зарядов проводов и напряжений между проводами и землей. При синусоидальном режиме эти уравнения могут быть написаны в символической форме для комплексных действующих значений $\dot{Q}$ и $\dot{U}$ зарядов и напряжений. Для случая трехпроводной линии уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \beta_{11}\dot{U}_1 + \beta_{12}\dot{U}_2 + \beta_{13}\dot{U}_3; \\ \dot{Q}_2 &= \beta_{21}\dot{U}_1 + \beta_{22}\dot{U}_2 + \beta_{23}\dot{U}_3; \\ \dot{Q}_3 &= \beta_{31}\dot{U}_1 + \beta_{32}\dot{U}_2 + \beta_{33}\dot{U}_3. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Предположим, что напряжения $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ образуют симметричную систему, т. е. $\dot{U}_2 = a^2\dot{U}_1$ и $\dot{U}_3 = a\dot{U}_1$, где a — комплексный множитель. Имеем

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -0{,}5 + j0{,}5\sqrt{3};\ a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -0{,}5 - j0{,}5\sqrt{3};$$
$$a^2 = 1,\ \frac{1}{a} = a^2,\ \frac{1}{a^2} = a.$$

В этом случае уравнения могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= (\beta_{11} + a^2\beta_{12} + a\beta_{13})\dot{U}_1; \\ \dot{Q}_2 &= (\beta_{22} + a^2\beta_{23} + a\beta_{21})\dot{U}_2; \\ \dot{Q}_3 &= (\beta_{33}\dot{U}_1 + a^2\beta_{31} + a\beta_{32})\dot{U}_3. \end{aligned} \tag{16.8}$$

Величины, стоящие в скобках, вещественны при условии, что провода линии расположены симметрично относительно друг друга, т. е. если $\beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31}$, так как $(a + a^2) = -1$ есть вещественное число. При этом стоящие в скобках величины представляют собой емкости проводов относительно земли или, что то же самое, емкость линии на одну фазу при соединении звездой.

При отсутствии симметрии в расположении проводов, т. е. если $\beta_{12} \neq \beta_{23} \neq \beta_{31}$, стоящие в скобках величины оказываются комплексными. Их вещественные части являются емкостями проводов относительно земли, так как они определяют часть заряда, изменяющуюся в фазе с напряжением, и, следовательно, определяют реактивную составляющую тока, сдвинутую по фазе на угол $\pi/2$ относительно напряжения. Мнимые части величин, стоящих в скобках, определяют активные составляющие токов в проводах, находящиеся в фазе или в противофазе с напряжениями. Заметим, что сумма мнимых частей для всех трех фаз равна нулю, так как при суммировании мы получаем перед всеми коэффициентами β_{12}, β_{23}, β_{31} вещественные множители $(a + a^2) = -1$. Это значит, что если в одних фазах они определяют положительную активную мощность, то в других они определяют такую же по абсолютной величине, но отрицательную активную мощность. Физически это означает, что при несимметричном расположении проводов некоторое количество энергии передается за период путем электростатической индукции из одной фазы в другую. Это своеобразное явление проявляется в несимметрии токов при симметричных напряжениях. Естественно, что несимметрия токов определяется не только появлением разных по величине и знаку активных составляющих, но также и различием реактивных составляющих вследствие того, что емкости проводов различны.

Полная симметрия в расположении проводов может быть достигнута только в кабеле, в котором заземленная оболочка охватывает симметрично все три провода. В воздушной линии даже при расположении проводов по вершинам равностороннего треугольника (рис. 16.20*а*) наличие земли вносит несимметрию. К тому же несимметричной оказывается линия с расположением проводов согласно рис. 16.20*б*.

Обычно изменяют расположение проводов на опорах через равные расстояния так, что постепенно осуществляется круговая перестановка (транспозиция) проводов. При наличии круговой перестановки средние значения параметров всей линии получаются одинаковыми для всех фаз. И всю линию можно рассматривать как симметричную. В среднем для всей линии не будет иметь места передача энергии за целый период из одной фазы в другую путем электростатической индукции.

С достаточной для практики точностью напряжения на отдельных проводах трехфазной системы можно получить, вводя в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \alpha_{11}\dot{Q}_1 + \alpha_{12}\dot{Q}_2 + \alpha_{13}\dot{Q}_3; \\ \dot{U}_2 &= \alpha_{21}\dot{Q}_1 + \alpha_{22}\dot{Q}_2 + \alpha_{23}\dot{Q}_3; \\ \dot{U}_3 &= \alpha_{31}\dot{Q}_1 + \alpha_{32}\dot{Q}_2 + \alpha_{33}\dot{Q}_3 \end{aligned} \tag{16.9}$$

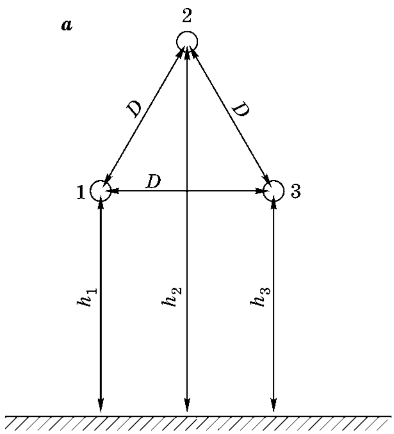
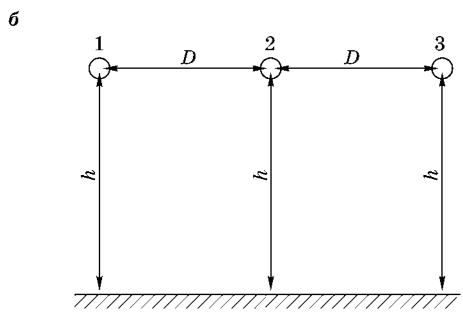


Рис. 16.20
Трехфазная линия электропередачи



средние для всей линии значения потенциальных коэффициентов α. Обозначим

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}}{3}; \ \alpha_0 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}}{3},$$

где $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$, — истинные значения коэффициентов для одного из участков, и будем считать в дальнейшем, что для всей линии все коэффициенты α с разными индексами равны α_m, и все коэффициенты α с одинаковыми индексами равны α_0.

Естественно, что в симметричной линии при симметричной системе напряжений и заряды $\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dot{Q}_3$ образуют также симметричную систему, т. е. $\dot{Q}_2 = a^2\dot{Q}_1, \ \dot{Q}_3 = a\dot{Q}_1$.

Уравнения в этом случае приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \alpha_0\dot{Q}_1 + \alpha_m\dot{Q}_2 + \alpha_m\dot{Q}_3 = [\alpha_0 + (a + a^2)\alpha_m]\dot{Q}_1 = \\ &= (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{Q}_1; \\ \dot{U}_2 &= \alpha_m\dot{Q}_1 + \alpha_0\dot{Q}_2 + \alpha_m\dot{Q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{Q}_2; \\ \dot{U}_3 &= \alpha_m\dot{Q}_1 + \alpha_m\dot{Q}_2 + \alpha_0\dot{Q}_3 = (\alpha_0 - \alpha_m)\dot{Q}_3. \end{aligned} \tag{16.10}$$

Следовательно, искомая емкость провода относительно земли равна

$$C = \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_m}.$$

Согласно формулам, приведенным в [16.2, с. 252], имеем

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2h_1}{R_1} + \ln\frac{2h_2}{R_2} + \ln\frac{2h_3}{R_3}\right);$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{3}\left(\ln\frac{r_{12'}}{r_{12}} + \ln\frac{r_{23'}}{r_{23}} + \ln\frac{r_{31'}}{r_{31}}\right).$$

Таким образом,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(2\frac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}}{\sqrt[3]{r_{12'} r_{23'} r_{31'}}}\right)}. \tag{16.11}$$

При расположении проводов согласно рис. 16.20*б* имеем

$$r_{12} = r_{23} = D; \ r_{31} = 2D; \ h_1 = h_2 = h_3 = h;$$

$$r_{12'} = r_{23'} = \sqrt{4h^2 + D^2}; \ r_{31'} = \sqrt{4h^2 + 4D^2}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2hD}{R\sqrt[3]{\left(4h^2 + D^2\right)\sqrt{h^2 + 4D^2}}}\right)}. \tag{16.12}$$

Пренебрегая влиянием земли, т. е. полагая $D << h$, получим

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}D}{R}}. \tag{16.13}$$

Контрольные вопросы

1. ЭМП представляет собой... (дайте полный ответ).

Варианты:

а) вакуум, в котором перемещаются электрические и магнитные заряды;

б) материальную среду, характеризующуюся определенными параметрами: электрической проводимостью γ, магнитной проницаемостью μ и диэлектрической постоянной ε;

в) материальную среду, характеризующуюся электрической $\vec{E}$ и магнитной напряженностью $\vec{H}$;

г) особое свойство материи, характеризующееся четырьмя векторными величинами: $\vec{E}$ — напряженностью ЭП; $\vec{D}$ — электрической индукцией; $\vec{H}$ — напряженностью магнитного поля (МП); $\vec{B}$ — магнитной индукцией.

2. Определить наличие ЭМП в некоторой области пространства — значит измерить... (дайте полный ответ).

Варианты:

а) величины $\vec{E}$, $\vec{H}$ в этой области пространства;

б) величины $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ в этой области пространства;

в) величины $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ в этой области пространства;

г) электромагнитные силы взаимодействия в этом пространстве.

3. Закон электромагнитной индукции заключается... (выберите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) во взаимосвязи некоторых функций в ЭМП, определяемых формулой $\mathrm{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, где использованы общепринятые в электротехнике обозначения;

б) во взаимосвязи некоторых функций в ЭМП, определяемых формулой $e = -\partial\psi/\partial t$, где использованы общепринятые в электротехнике обозначения;

в) в пересечении некоторого контура магнитным потоком, изменяющимся во времени, при этом в контуре индуктируется ЭДС.

4. Плоской электромагнитной волной является... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) волна, в которой векторы напряженности ЭП $\vec{E}$ и МП $\vec{H}$ в любой данный момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной распространению волны, и имеют в этой плоскости одинаковое значение (такая волна называется плоской), меняются они только в функции координаты Z (направления распространения волны) и времени t;

б) линейно-поляризованная волна называется плоской, в ней $\vec{E}$, $\vec{H}$ меняются только в функции координаты распространения волны и времени t;

в) волна, в которой $\vec{E}$, $\vec{H}$ изменяются только по координате распространения и во времени, но при этом векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке пространства имеют всевозможные направления, быстро и беспорядочно сменяющие друг друга так, что ни одно из этих колебаний не является преимущественным.

5. Диполь электрический представляет собой... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) два разноименных заряда, сдвинутые в пространстве на некоторое расстояние друг от друга и обладающие моментом $\vec{m}_э = Qd$, где Q — величина заряда (положительного или отрицательного); d — расстояние между зарядами;

б) два тока, текущие по параллельным проводам в противоположных направлениях;

в) два электрических разноименных электрических заряда, сдвинутые в пространстве на расстояние, стемящееся к нулю ($d \to 0$).

6. Диполь магнитный представляет собой... (приведите наиболее полную формулировку).

В а р и а н т ы:

а) виток с электрическим током I, создающим магнитный момент $\vec{m} = \vec{I}S$ А·м^2, где S — площадь пространства внутри витка, м;

б) катушку, намотанную w витками, по которой протекает электрический ток I;

в) поле, создаваемое любым током $i = i(t)$, протекающим в какой-то области пространства.

7. Нелинейная среда представляет собой среду... (выберите ответ).

В а р и а н т ы:

а) параметры ε, μ, γ которой изменяются во времени;

б) параметры ε, μ, γ которой изменяются при изменении тока или напряжения в электрической цепи;

в) параметры ε, μ, γ которой изменяются по координатам пространства.

8. Волновод в электротехнике представляет собой... (приведите наиболее полную формулировку).

В а р и а н т ы:

а) направлящую систему, которая может распространять электромагнитную волну в заданном направлении;

б) направляющую систему, представляющую собой полую трубу с диэлектрическим наполнителем (в качестве наполнителя возможен воздух), по которой направляется электромагнитная волна высоких и сверхвысоких частот;

в) направляющую систему, представляющую собой полую трубу с диэлектрическим наполнителем, по которой распространяются TEM-волны.

9. Вектор Умова–Пойнтинга представляет собой... (приведите наиболее полную формулировку).

В а р и а н т ы:

а) вектор $\vec{\Pi} = w\vartheta = \vec{E}\vec{H}$, он характеризует поток энергии, проходящий в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения поля;

б) мощность потока электрической энергии через единичную площадку;

в) энергию электрического поля в единице объема.

10. Неравномерное распределение тока в цилиндрическом проводе кругового сечения связано... (приведите наиболее полную формулировку).

В а р и а н т ы:

а) с поверхностным эффектом — вытеснением тока к поверхности проводника при повышении частоты питающего напряжения;

б) с неоднородным электрическим сопротивлением материала цилиндрического провода;

в) с изменением активного сопротивления r по сравнению с омическим R ($r > R$ при $f > 0$) в цепях переменнного тока.

11. Электромагнитное экранирование... (приведите наиболее полную формулировку).

В а р и а н т ы:

а) проявляется на высоких частотах ($5{\cdot}10^3 < f < 10^9$) Гц, когда индукционные токи играют первостепенную роль в величине эффективности экранирования. Как ЭП, так и МП вытесняются из экрана, квазистатические режимы переходят в электромагнитный режим экранирования, физическая сущность такого экранирования сводится к взаимодействию вторичного и первичного полей, которые близки по величине и противоположны по фазе, что приводит к ослаблению результирующего поля;

б) электромагнитное экранирование преследует две задачи: во-первых, отведение части излишнего магнитного потока от защищаемой области; во-вторых, снижение проникающего в защищаемую область магнитного потока с помощью вторичных полей, индуцированных в материале экрана внешним магнитным потоком;

в) любой ферромагнитный экран при определенных характеристиках поля, например высокой частоте ($5{\cdot}10^3 < f < 10^9$), становится электромагнитным как магнитный, он отводит часть магнитного потока от защищаемой области, а как электрический, снижает проникающее в защищаемую область поле с помощью вторичных полей, индуцированных в материале экрана.

12. Эквивалентная глубина проникновения — δ... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) зависит от параметров среды — ε, μ, γ;

б) зависит от частоты ω;

в) зависит от параметров среды — ε, μ, γ и частоты ω;

г) является постоянной величиной для данного материала.

13. Затухание электромагнитной волны в проводящей среде зависит от... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) длины пути распространения;

б) параметров ε, μ, γ пути распространения;

в) параметров ε, μ, γ пути распространения и скорости v распространения электромагнитной волны.

14. Сила, действующая в точке среды на помещенное в нее тело в ЭМП, представляет собой... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) суммарную силу, действующую в ЭМП на пробное тело: она складывается векторно из силы магнитной и силы электрической, действующих на это пробное тело, каждая из сил определяется соответствующим изменением энергии по изменению координаты пробного тела;

б) силу, определяемую по формуле $\vec{f} = \dfrac{\partial}{\partial q_i} \int\limits_V \left(\dfrac{E^2}{2\varepsilon} + \dfrac{H^2}{2\mu} \right) dv$, где $i = 1, 2, 3$, остальные обозначения общепринятые;

в) силу, определяемую по формуле $\vec{f} = \dfrac{\partial}{\partial q_i} \int\limits_V \left(\dfrac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \dfrac{\vec{H}\vec{B}}{2} \right) dv$, где $i = 1, 2, 3$, остальные обозначения общепринятые.

15. Энергия в ЭМП в объеме dv среды... (выберите формулу).

Варианты:

а) $W_0 dv = \left(\gamma E^2 + \dfrac{\varepsilon E^2}{2} + \dfrac{\mu H^2}{2} \right) dv$;

б) $W_0 dv = \left(\dfrac{\mu H^2}{2} \right) dv$;

в) $W_0 dv = \left(\dfrac{\varepsilon E^2}{2} \right) dv$;

г) $W_0 dv = \left(\dfrac{\varepsilon E^2}{2} + \dfrac{\mu H^2}{2} \right) dv$.

16. Суммарный магнитный поток ($\psi = w\Phi$), пересекающий замкнутый металлический контур, наводит в нем... (выберите ответ).

Варианты:

а) ЭДС e_L и электрический ток, если суммарный магнитный поток пересекает металлический контур перпендикулярно его плоскости;

б) ЭДС e_L и электрический ток, если суммарный магнитный поток пересекает металлический контур перпендикулярно его плоскости и изменяется при этом во времени;

в) ЭДС e_L и электрический ток, если суммарный магнитный поток направлен параллельно плоскости металлического контура;

г) ЭДС e_L и электрический ток, если суммарный магнитный поток направлен параллельно плоскости металлического контура и изменяется при этом во времени;

д) противоЭДС e_L и электрический ток, если суммарный магнитный поток пересекает контур перпендикулярно его плоскости.

17

ГЛАВА 17

РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

17.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ РАДИОВОЛН В ПОЛУПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Электромагнитные свойства полупроводящей среды характеризуются абсолютной диэлектрической проницаемостью ε (или относительной диэлектрической проницаемостью ε_r) и удельной электрической проводимостью γ. Будем рассматривать немагнитные среды, для которых магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$.

Наиболее простым случаем является распространение радиоволн в идеальном диэлектрике, для которого $\gamma = 0$, ε — const [17.1, 17.2]. Распространение плоской волны в такой среде описывается выражением

$$E = E_m \sin(\omega t - kr),$$

если волна прямая монохроматическая. В комплексной форме:

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t - kr)} = \dot{E}_m e^{-jkr};\ \dot{E}_m = E_m e^{j\omega t}.$$

С учетом

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} = \frac{\omega}{\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}}} = \frac{\omega}{c}\varepsilon_r,$$

$$\dot{E}_m = \dot{E}_m e^{-j\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}r}, \qquad (17.1)$$

где r — расстояние, которое волна прошла в данной среде.

Комплексные амплитуды напряженностей магнитного $\dot{H}_m$ и электрического $\dot{E}_m$ полей связаны соотношением

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{E}_m}{\rho} = \frac{\dot{E}_m}{120\pi}\sqrt{\varepsilon_r}, \qquad (17.2)$$

где $\rho = \dfrac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ — волновое сопротивление среды.

ЭП и МП изменяются во времени синфазно.

Рассмотрим теперь, как изменится уравнение плоской волны в среде с потерями, т. е. в полупроводящей среде. Для сравнения запишем первое уравнение Максвелла соответственно для идеального диэлектрика и для диэлектрика с потерями:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}; \tag{17.3}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}} + \gamma\dot{\vec{E}}. \tag{17.4}$$

Если ввести понятие комплексной диэлектрической проницаемости

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}, \tag{17.5}$$

то уравнение (17.4) запишется формально точно так же, как и уравнение (17.3):

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}.$$

Использование комплексной диэлектрической проницаемости позволяет получить выводы, относящиеся к распространению радиоволн в полупроводящей среде, из соответствующих формул для идеального диэлектрика путем замены в них вещественной диэлектрической проницаемости ε на комплексное значение $\dot{\varepsilon}$. Величину $\dot{\varepsilon}$ можно записать иначе, выразив круговую частоту через длину волны и подставив числовое значение электрической постоянной:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - j\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right). \tag{17.6}$$

Действительно, воспользуемся известными соотношениями для частоты f, скорости c, волнового сопротивления $Z_{\text{в}}$ электромагнитной волны, распространяющейся в среде с $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$,

$$f = \frac{c}{\lambda};\; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}};\; \frac{E}{H} = Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 36\pi}{10^{-9}}} = 120\pi.$$

Тогда выражение (17.5)

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{2\pi f} = \varepsilon - j\frac{\gamma\lambda}{2\pi\cdot c} = \varepsilon - j\frac{\gamma\lambda}{2\pi}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma\lambda}{2\pi}\frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) =$$

$$= \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma\lambda\cdot 120\pi}{2\pi\cdot\varepsilon_r}\right) = \varepsilon\left(1 - j\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right).$$

Величина $\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}$ представляет собой отношение плотности тока проводимости к плотности тока смещения. Действительно, поскольку ток проводимости равен γE, а ток смещения равен $\omega\varepsilon E$, то, поделив одно на другое, получим

$$\frac{\gamma|E|}{\omega\varepsilon|E|} = \left|\frac{J_{\text{пр}}}{J_{\text{см}}}\right| = \frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}. \tag{17.7}$$

Следовательно, если $\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r} \ll 1$, то в среде преобладает плотность тока смещения, и среда по своим свойствам приближается к диэлектрику. Если же

$\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r} \gg 1$, то в среде преобладает плотность тока проводимости, и эта среда по своим свойствам приближается к проводнику.

Мгновенное значение напряженности электрического поля при распространении плоской волны в полупроводящей среде записывается следующим образом:

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{\dot{\varepsilon}_r}\, r)}. \tag{17.8}$$

Обозначая

$$\frac{\omega}{c}\sqrt{\dot{\varepsilon}_r} = \beta - ja, \tag{17.9}$$

перепишем выражение (17.8) с учетом условия (17.9):

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t - \beta r) - ar}. \tag{17.10}$$

Подставляя в (17.2) условие (17.10) и определяя модуль и фазу полученного выражения, запишем

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{E}_m}{120\pi}\sqrt{\dot{\varepsilon}_r} = \dot{E}_m \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{120\pi} \cdot \frac{c}{\omega} e^{-j\varphi}, \tag{17.11}$$

где

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\alpha/\beta. \tag{17.12}$$

Из (17.12) следует, что составляющие электрического и магнитного поля сдвинуты по фазе на угол φ.

Величина α характеризует потери мощности в среде. Она называется коэффициентом поглощения. Физически потери обусловлены переходом энергии электромагнитных волн в тепловую энергию движения молекул.

Величина β характеризует изменение фазы волны, т. е. скорость распространения волны в данной среде.

Фазовую скорость распространения волны $v_\Phi = dr/dt$ определяют, как скорость перемещения точки постоянной фазы, для которой

$$\omega t - \beta r \text{ — const}.$$

Записав полный дифференциал этого выражения

$$\omega dt - \beta dr = 0,$$

можно определить v_Φ:

$$v_\Phi = \omega/\beta. \tag{17.13}$$

При относительном перемещении передатчика и приемника с радиальной скоростью v_R (составляющая скорости источника в направлении распространения волны) фаза волн ($\omega t - \beta r$) меняется, что можно рассматривать как изменение частоты колебаний. Принимаемая частота $\omega_Д$, называемая частотой Допплера, равна

$$\omega_Д = \omega - \beta\frac{\partial r}{\partial t} = \omega - \beta u_R.$$

Разницу в величинах частот передаваемых и принимаемых колебаний называют допплеровским смещением частоты и определяют как

$$\Delta\omega_Д = \omega_Д - \omega = -\beta u_R = -\omega\frac{u_R}{v_ф}.$$

Частота принимаемых колебаний зависит от свойств среды, возрастает при удалении передатчика и приемника и снижается при их сближении.

Отношение

$$n = \frac{c}{v_ф} = \frac{c}{\omega}\beta$$

называют коэффициентом преломления среды.

Длина волны в среде с учетом (17.13) равна

$$\lambda_{ср} = v_ф/f = 2\pi/\beta = \lambda/n.$$

Выразим коэффициенты α и β через параметры среды. Согласно условию (17.9) можно записать:

$$\dot{\varepsilon}_r = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2(\beta - j\alpha)^2. \tag{17.14}$$

С другой стороны, из (17.6) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_r = \varepsilon_r\left(1 - j\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right). \tag{17.15}$$

Правые части уравнений (17.14) и (17.15) равны. Приравнивая их действительные и мнимые части, а также решая совместно полученные уравнения, находим

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right)^2}}; \tag{17.16}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{2}}\sqrt{+1 + \sqrt{1 + \left(\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right)^2}}. \tag{17.17}$$

Перед внешними и внутренними радикалами берем положительные знаки, так как величины α и β считаем действительными, и за направление распространения принимаем направление возрастания расстояния r.

В некоторых встречающихся на практике случаях формулы могут быть значительно упрощены.

При $\varepsilon \gg 60\gamma\lambda$, пренебрегая в (17.17) вторым слагаемым, получаем

$$\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_r}; \tag{17.18}$$

$$v_ф \approx c/\sqrt{\varepsilon_r};\ n \approx \sqrt{\varepsilon_r};\ \lambda_{ср} \approx \lambda/\sqrt{\varepsilon_r}. \tag{17.19}$$

В формуле (17.16) нельзя просто пренебречь вторым слагаемым. Применяя к внутреннему радикалу бином Ньютона, получаем

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{-1 + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}\right)^2} = \frac{60\pi\gamma}{\sqrt{\varepsilon_r}}. \tag{17.20}$$

При $\varepsilon_r \ll 60\gamma\lambda$ в выражениях (17.16) и (17.17) можно пренебречь единицей по сравнению с $\dfrac{60\gamma\lambda}{\varepsilon_r}$. Тогда

$$\beta \approx \alpha \approx 2\pi\sqrt{\frac{30\gamma}{\lambda}}; \qquad (17.21)$$

$$v_ф \approx \frac{c}{\sqrt{30\gamma\lambda}};\ n \approx \sqrt{30\gamma\lambda};\ \lambda_{ср} = \sqrt{\frac{\lambda}{30\gamma}}. \qquad (17.22)$$

17.2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПО ВОЛНОВОДАМ

Волновод — устройство, которое ведет волну. Оно является средством сосредоточения электромагнитной энергии в определенном пространстве и передачи ее в заданном направлении. Волновод представляет собой полую металлическую трубку круглого или прямоугольного сечения, изготовленную из хорошо проводящего материала. Цилиндрические волноводы по сравнению с прямоугольными имеют меньшее затухание, а значит, наиболее приемлемы для дальней связи. Известны также другие конструкции волноводов (эллиптические, П-образные, Н-образные).

Волновод отличается от коаксиального кабеля отсутствием внутреннего проводника. Это значит, что передача энергии происходит по одному проводу. С увеличением частоты, т. е. при $\lambda < D$, внутренний проводник становится ненужным и ЭМП распространяется по законам волноводной передачи.

На рис. 17.1 показан путь движения электромагнитной волны в волноводе. Волны распространяются зигзагообразно, образуя с поперечным сечением волновода угол θ и многократно отражаясь под углом 2θ от стенок волновода. С уменьшением частоты угол θ уменьшается и при некой сравнительно низкой частоте наступает такой режим, когда $\theta = 0$ и волна, падая на стенку, отражается перпендикулярно. В волноводе устанавливается стоячая волна, и энергия вдоль волновода не перемещается. Частота, при которой наступает режим стоячей волны, называется критической f_0 — ниже этой частоты волны распространяться по волноводу не могут. Таким образом, волновод действует как фильтр низких частот, срезая частоты ниже критической и пропуская частоты, лежащие выше ее.

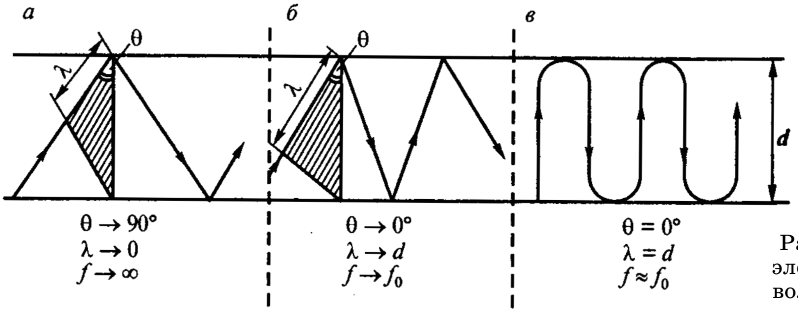


Рис. 17.1
Распространение электромагнитной волны в волноводе

Критическая длина волны $\lambda_0 = \dfrac{c}{f_0}$ соизмерима с диаметром цилиндрического волновода. Например, волновод диаметром 6 см будет пропускать частоты длиной, меньшей 6 см, и задерживать все более длинные волны.

Заметим, что основная волна TEM, векторы которой не имеют продольной составляющей, не может существовать в полом волноводе. Действительно, линии магнитной напряженности $\vec{H}$, будучи замкнуты, должны по закону полного тока охватить или ток проводимости (как это бывает в коаксиальном кабеле), или ток смещения, т. е. переменное электрическое поле, имеющее обязательную продольную составляющую. В волноводах распространяются либо волны E, либо H, либо гибридные смешанные волны.

Возникновение того или иного типа волн в волноводе зависит от свойств концевых устройств, в частности от устройства, генерирующего волны в начале волновода. Для возбуждения желаемого типа волн можно ввести в волновод металлический стерженек, расположив его ось в месте, где должно возникать наиболее сильное ЭП желаемой волны, и направив ось стерженька к линиям напряженности этого поля. Подведя напряжение высокой частоты между стерженьком и волноводом, например по концентрическому кабелю, можно возбудить колебания в волноводе. Можно также ввести в волновод небольшую петлю из проволоки, обтекаемую током, расположив петлю в месте ожидаемого максимума напряженности МП так, чтобы плоскость петли была перпендикулярна к направлению магнитных линий требуемого поля. На приемном конце волновода можно установить аналогичные устройства.

Рассмотрим с помощью уравнений ЭМП поперечные магнитные волны E (TM) в прямоугольном волноводе.

При рассмотрении волновода прямоугольного сечения целесообразно выбрать декартову систему координат. Расположим ее так, чтобы ось z совпадала с направлением трубы, а оси x и y лежали на внутренних поверхностях стенок a и b (рис. 17.2).

Рис. 17.2
Распределение силовых линий в прямоугольном волноводе

ЭМП указанного типа, ограниченное внутренней поверхностью идеальных стенок волновода, проще всего рассчитать, если воспользоваться магнитным векторным потенциалом $\dot{A}$, имеющим единственную компоненту $\dot{A}_z$. Эта составляющая удовлетворяет однородному скалярному волновому уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \dot{A}_z + k^2 \dot{A}_z = 0,$$

где $k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{\omega}{c}$ — волновое число, связанное с длиной волны λ вибратора соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

В декартовых координатах волновое уравнение раскроется в виде

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{A}_z = 0. \qquad (17.23)$$

Будем искать решение этого уравнения методом разделения переменных, полагая, что

$$\dot{A}_z(x,y,z) = \dot{X}(x)\dot{Y}(y)\dot{Z}(z), \tag{17.24}$$

где каждый из множителей зависит только от одной независимой переменной.

Вводя это выражение в (17.23) после дифференцирования и деления на $\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$, получаем уравнение в полных производных:

$$\frac{1}{\dot{X}}\frac{d^2\dot{X}}{dx^2} + \frac{1}{\dot{Y}}\frac{d^2\dot{Y}}{dy^2} + \frac{1}{\dot{Z}}\frac{d^2\dot{Z}}{dz^2} + k^2 = 0.$$

В этом уравнении переменные разделены, и оно распадается на три независимых уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\dot{X}}\frac{d^2\dot{X}}{dx^2} = -\xi^2; \\ &\frac{1}{\dot{Y}}\frac{d^2\dot{Y}}{dy^2} = -\eta^2; \\ &\frac{1}{\dot{Z}}\frac{d^2\dot{Z}}{dz^2} = -a^2, \end{aligned}\right\} \tag{17.25}$$

где постоянные разделения ξ^2, η^2, a^2 связаны уравнением

$$-\xi^2 - \eta^2 - a^2 + k^2 = 0$$

или

$$a^2 = k^2 - (\xi^2 + \eta^2). \tag{17.26}$$

Учитывая, что в направлении оси x (а также и y) можно ожидать (из-за отражения от стенок) возникновения стоячих волн, а в направлении оси z — бегущих, решения уравнений (17.26) представим в виде

$$\begin{aligned} &\dot{X} = \dot{D}_1 \sin(\xi x + \psi_x); \\ &\dot{Y} = \dot{D}_2 \sin(\eta y + \psi_y); \\ &\dot{Z} = \dot{D}_3 e^{-j\alpha z} + \dot{D}_4 e^{j\alpha z}. \end{aligned}$$

Полагая $\dot{D}_4 = 0$, т. е. ограничиваясь волной, распространяющейся в сторону положительных z, на основании (17.26) получим

$$\dot{A}_z = \dot{D}\sin(\xi x + \psi_x)\sin(\eta y + \psi_y)e^{-j\alpha z}, \tag{17.27}$$

где $\dot{D}_4 = \dot{D}_1 \cdot \dot{D}_2 \cdot \dot{D}_3$.

Для определения постоянных обратимся к граничным условиям для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, предварительно выразив последние через $\dot{A}_z$.

Напряженность магнитного поля:

$$\dot{H} = \operatorname{rot}\dot{A}. \tag{17.28}$$

Напряженность электрического поля можно определить через $\dot{\vec{H}}$ из уравнения

$$j\omega\varepsilon_0\dot{\vec{E}} = \operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{A}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}^2\dot{\vec{A}}.$$

Но из волнового уравнения следует, что

$$\vec{\nabla}^2 \dot{\vec{A}} = -k^2 \dot{\vec{A}},$$

поэтому

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{A}} + k^2\dot{\vec{A}}). \tag{17.29}$$

Так как векторный потенциал имеет единственную составляющую $\dot{A}_z$, зависящую от всех трех координат, то уравнения (17.28) и (17.29) раскроются следующим образом:

$$\dot{H}_x = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}; \tag{17.30}$$

$$\dot{H}_y = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}; \tag{17.31}$$

$$\dot{H}_z = 0. \tag{17.32}$$

Эти уравнения подтверждают, что линии вектора $\dot{\vec{H}}$ лежат в плоскостях поперечного сечения.

Далее, так как

$$\operatorname{div}\dot{A} = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial z} = -j\alpha\dot{A}_z,$$

то

$$\dot{E}_x = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\operatorname{grad}_x \operatorname{div}\dot{\vec{A}} = -\frac{\alpha}{\omega\varepsilon_0}\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} = \frac{\alpha}{\omega\varepsilon_0}\dot{H}_y; \tag{17.33}$$

$$\dot{E}_y = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\operatorname{grad}_y \operatorname{div}\dot{A} = -\frac{\alpha}{\omega\varepsilon_0}\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} = -\frac{\alpha}{\omega\varepsilon_0}\dot{H}_x; \tag{17.34}$$

$$\dot{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(\operatorname{grad}_z \operatorname{div}\dot{A} + k^2\dot{A}_z) = \frac{k^2 - \alpha^2}{j\omega\varepsilon_0}\dot{A}_z \tag{17.35}$$

и ЭП имеет также и продольную составляющую.

Интересно, что в поперечных плоскостях ЭП имеет чисто потенциальный характер, как это следует из уравнений (17.33) и (17.34). Это есть общее свойство всех поперечных магнитных волн, так как векторный потенциал в этом случае имеет только продольную составляющую, и напряженность ЭП, в общем случае равная

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi,$$

будет в любой поперечной плоскости выражаться как

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Иными словами, так как $H_z = 0$, то любой контур, лежащий в поперечной плоскости, не пронизывается МП, и поэтому

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Перейдем к рассмотрению граничных условий:

$$E_{1t} = E_{2t};\ B_{1n} = B_{2n};$$
$$H_{2t} - H_{1t} = J_N;\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Для рассматриваемой задачи, когда проводимость стенок трубы $\gamma = \infty$ и ЭМП в металле отсутствует, граничные условия преобразуются в следующие: на поверхности любой стенки волновода

$$E_t = 0;\ H_n = 0;\ H_t = \pm J_N;\ E_n = \pm(\sigma/\varepsilon_0).$$

Как было отмечено ранее, условия для нормальных составляющих векторов являются следствиями условий для тангенциальных составляющих в соответствии с тем, что уравнения поля для истоков вытекают из уравнений для вихрей (и уравнения непрерывности). Поэтому воспользуемся одним из наиболее простых условий ($E_t = 0$), т. е. потребуем, чтобы параллельные стенкам составляющие вектора $\vec{E}$ обращались в нуль у соответствующих стенок. Это значит, что (см. рис. 17.2)

$$\dot{E}_x = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и при } y = b;$$
$$\dot{E}_y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = a;$$
$$\dot{E}_z = 0 \text{ при } x = 0,\ y = 0,\ x = a,\ y = b.$$

Из уравнения (17.25) следует, что векторный потенциал $\dot{A}_z$ должен удовлетворять тем же требованиям, что и $\dot{E}_z$. Поэтому получаем из (17.27) и условия $\dot{A}_z = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, что $\sin(\xi x + \psi_x) = 0$ при $x = 0$ и $x = a$.

Полагая $x = 0$, получаем $\sin\psi_x = 0$ или $\psi_x = 0$; полагая $x = a$, получаем $\sin\xi a = 0$, откуда $\xi a = m\pi$ и $\xi = \dfrac{m\pi}{a}$ (здесь m — целое число).

Из условия $\dot{A}_z = 0$ при $y = 0$ и $y = b$ следует, что $\sin(\eta y + \psi_y) = 0$ при $y = 0$ и $y = b$. Отсюда получается $\psi_y = 0$ и $\eta = \dfrac{n\pi}{b}$ (n — целое число).

Внеся найденные значения четырех постоянных в (17.27), получаем окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\dot{A}_z = \dot{D}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\alpha z}, \tag{17.36}$$

а с помощью соотношений (17.30) и (17.35) также получим и выражения составляющих поля:

$$\dot{H}_x = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} = \frac{n\pi}{b}\dot{D}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\alpha z}; \tag{17.37}$$

$$\dot{H}_y = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} = -\frac{m\pi}{a}\dot{D}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\alpha z}; \tag{17.38}$$

$$\dot{E}_x = \frac{\alpha}{\omega\varepsilon_0}\dot{H}_y; \tag{17.39}$$

$$\dot{E}_y = -\frac{\alpha}{\omega\varepsilon_0}\dot{H}_x; \tag{17.40}$$

$$\dot{E}_z = \frac{k^2 - \alpha^2}{j\omega\varepsilon_0}\dot{A}_z. \tag{17.41}$$

Легко убедиться в том, что найденными значениями постоянных удовлетворяются все нулевые граничные условия ($E_t = 0$; $H_n = 0$). Ненулевым граничным условием, например $H_t = \pm J_N$, можно было бы воспользоваться для нахождения постоянной $\dot{D}$, но это, очевидно, связано с конкретными условиями возбуждения волновода, качественно не влияющими на изучаемые явления. Поэтому оставим эту постоянную не определенной (ее часто полагают равной единице).

Значения постоянной a зависят от $\xi = \frac{m\pi}{a}$ и $\eta = \frac{n\pi}{b}$ согласно (17.26) следующим образом:

$$\alpha^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{17.42}$$

Анализ полученных результатов начнем с рассмотрения величины α. Она играет роль коэффициента распространения для всех решений (17.36)–(17.41), и если α — вещественное число, то ею определяется:

а) фаза волны в волноводе $\omega t - \alpha z$;

б) фазовая скорость этой волны:

$$v_{\text{ф}} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{k}\frac{k}{\alpha} = c\frac{k}{\alpha} > c \quad \left(\frac{\mathrm{k}}{\alpha} > 1\right); \tag{17.43}$$

в) длина волны в волноводе:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{k}\frac{k}{\alpha} = \lambda\frac{k}{\alpha} > \lambda. \tag{17.44}$$

Но уравнение (17.42) показывает, что α может быть вещественной или мнимой. Если α — мнимая величина, то это означало бы, что волна вдоль волновода не распространяется, а ЭМП, меняясь гармонически в каждой точке, затухает экспоненциально вдоль волновода без переноса энергии. Действительно, из (17.37)–(17.40) следует, что при мнимом значении α поперечные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ сдвинуты по фазе друг относительно друга на четверть периода и продольная составляющая вектора Умова–Пойнтинга становится мнимой.

Для того чтобы волновой процесс существовал, необходимо, чтобы $\alpha^2 > 0$ или согласно (17.42)

$$\lambda < \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \tag{17.45}$$

т. е. чтобы длина волны $\lambda = c/f$, которую возбуждает излучатель, колеблющийся с частотой f в однородной неограниченной среде (например, в воздухе), была меньше некоторой критической длины волны:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \tag{17.46}$$

Выражение (17.46) показывает, что $\lambda_{\text{кр}}$ зависит от размеров поперечного сечения волновода a и b и от значений целых чисел m и n. Эти значения могут начинаться для волн E–TM только с единицы, так как $m = 0$ или $n = 0$ обращают в нуль и векторный потенциал, и все связанные с ним величины (17.36)–(17.40). Наибольшее значение имеет $\lambda_{\text{кр}}$ при $m = n = 1$:

$$\lambda_{\text{кр}11} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},$$

и если, например, сечение волновода представляет собой квадрат со стороной a, то

$$\lambda_{\text{кр}11} = a\sqrt{2},$$

т. е. $\lambda_{\text{кр}11}$ равна диагонали квадрата.

Таким образом, из (17.42) постоянная распространения:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[1 - \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \tag{17.47}$$

длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} > \lambda,$$

или

$$\Lambda = \frac{2\pi}{k}\frac{k}{\alpha} = \lambda\frac{k}{\alpha},$$

а фазовая скорость этой волны:

$$v_{\text{ф}} = \Lambda f = \frac{\lambda f}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} > c,$$

или

$$v_{\text{ф}} = \Lambda f = \lambda\frac{k}{\alpha}f = c\frac{k}{\alpha}.$$

Если числа m и n (или оба сразу) принимают значения больше единицы, то критическая длина волны $\lambda_{\text{кр}}$ уменьшается согласно (17.46). Может оказаться, что новое значение $\lambda_{\text{кр}}$ все еще превышает λ излучателя. Тогда в волноводе возможна наряду с прежней новая волна большей длины и с большей

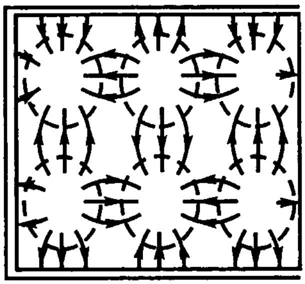


Рис. 17.3
График поля волны TM_{11}

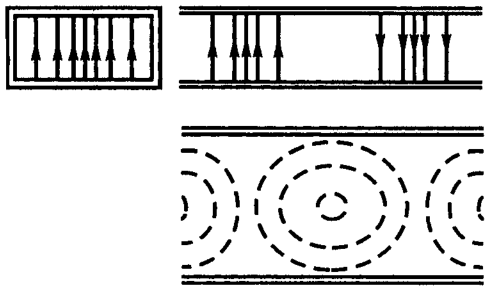


Рис. 17.4
Структура поля волны TM_{32}

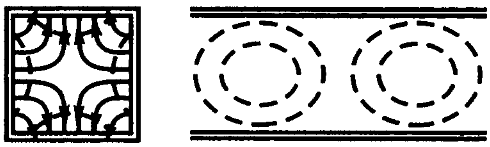


Рис. 17.5
График поля волны TE_{10}

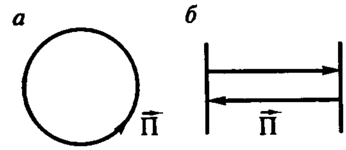


Рис. 17.6
График поля волны TE_{11}

фазовой скоростью. Поэтому принято добавлять к обозначению типа волн индексы mn. Например, волна E_{mn}. Из решений (17.36)–(17.41) видно, что в поперечных сечениях поле образует стоячие волны. Число m показывает, сколько полуволн установилось вдоль оси X, а число n определяет число стоячих полуволн вдоль оси $У$.

На рис. 17.3 изображен график поля волны TM_{11}. Волны с наименьшими индексами m и n называются простейшими. Волны TM_{10} и TM_{01} неосуществимы, так как магнитные силовые линии должны быть замкнутыми. Поэтому простейшей волной TM или E является TM_{11}.

Более сложные волны возникают, если увеличить поперечные размеры волновода или частоту колебаний так, чтобы вдоль размеров a и b укладывалась более чем одна полуволна. На рис. 17.4 изображена структура поля волны TM_{32}.

В случае TE-волн ($E_z = 0$) возможно существование волн при $m = 0$, $n \neq 0$, т. к. линии электрического поля могут быть прямыми, начинающимися и заканчивающимися на противоположных стенках волновода. Из волн TE_{10} (рис. 17.5) и TE_{11} (рис. 17.6), как их ячеек, составляются все сложные типы волн.

Отметим также, что согласно граничным условиям ($H_t = \pm J_N$ и $\varepsilon_0 E_n = \pm\alpha$) уравнения (17.37)–(17.40) дают распределение комплексных амплитуд поверхностных токов и зарядов на соответствующих стенках волновода.

Для волн E–TM поверхностные токи проводимости параллельны оси волновода и, изменяясь от точки к точке, дополняются токами смещения, пропорциональными перпендикулярной к стенке волновода составляющей вектора $\dot{E}$.

17.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В РЕЗОНАТОРАХ

17.3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РЕЗОНАТОРАХ

Квазистационарные колебательные системы, представляющие собой соединение емкостного и индуктивного элементов, не удается создать в диапазоне сверхвысоких частот. С укорочением волны размеры колебательного контура неизбежно приближаются к ее длине. В конечном счете из-за резко возрастающего излучения такая система становится неспособной к накоплению электромагнитной энергии и теряет резонансные свойства.

Между тем можно создать и неквазистационарные системы, энергия которых остается в пределах ограниченного объема. Для этого необходимо, чтобы движение энергии (рис. 17.7) носило циклический или колебательный характер. Оба вида движения легко реализовать, например, на основе направляющей системы, которая образует замкнутое кольцо или ограничена двумя полностью отражающими плоскостями. Именно по этому принципу и строят объемные резонаторы.

На рис. 17.7 схематически показано несколько устройств, в которых в качестве направляющей системы фигурирует двухпроводная линия, коаксиальная линия и волновод. Анализ показывает, что свойствами электромагнитного резонатора обладает всякая область пространства, ограниченная полностью отражающей оболочкой. Кроме резонаторов, построенных на основе полых волноводов, находят применение полые системы специальной формы — особенно в СВЧ-электронике. Два типа таких резонаторов изображены на рис. 17.8.

Резонатором может служить также диэлектрическое тело (рис. 17.9) в менее плотной среде (например, воздухе), если выполнены условия полного отражения от его границы. Подобные резонаторы представляют собой интересное явление в технике квантовых генераторов.

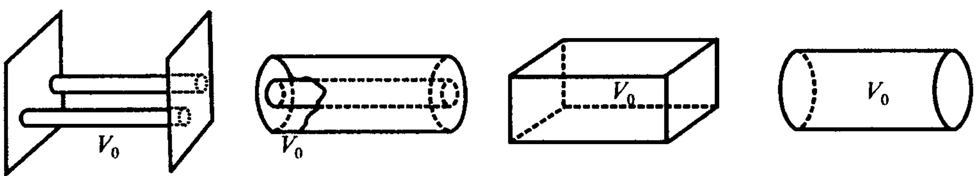


Рис. 17.7
Виды резонаторных систем

Рис. 17.8
Системы нестационарного резонаторного типа

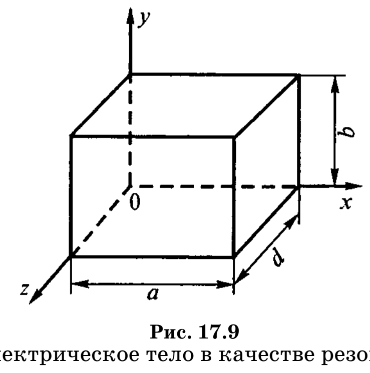


Рис. 17.9
Диэлектрическое тело в качестве резонатора

В колебательной системе, в которой используется LC-контур с сосредоточенными параметрами, энергия ЭП сосредоточена в конденсаторе, а энергия МП — в индуктивной катушке. Конденсатор и индуктивная катушка удалены в пространстве, поэтому переход энергии ЭП в энергию МП и обратный переход сопровождаются распространением ЭМП. Размеры элементов и соединительных проводов LC-контура в диапазонах длинных, средних и коротких волн очень малы по сравнению с длиной волны. При этом излучение ЭМП элементами LC-контура ничтожно мало и добротность контура определяется только потерями в индуктивных катушках и соединительных проводах и в диэлектрике конденсаторов.

По мере перехода в диапазон метровых, а затем и дециметровых волн для увеличения резонансной частоты контура ω_0 $[\omega_0 = (LC)^{-0,5}]$ и для получения заданной добротности Q $(Q = \sqrt{L/C}/R)$ необходимо уменьшать индуктивность и емкость элементов. С этой целью уменьшают площадь пластин конденсатора и увеличивают расстояние между пластинами, а также уменьшают число витков индуктивной катушки. Уже в диапазоне метровых волн размеры витка сравнимы с длиной волны. Поэтому LC-контур излучает ЭМП. Потери на излучение снижают добротность контура, и применение его в качестве колебательной системы невозможно. Параллельное включение в контур ряда витков приводит к уменьшению излучения поля (в результате экранирования поля витками), что позволяет уменьшить индуктивность и, следовательно, увеличить резонансную частоту. При бесконечном увеличении числа витков получаем тороидальный резонатор, ЭМП которого полностью экранировано от внешнего пространства.

Если соединить прямоугольные пластины конденсатора, то можно получить параллелепипед, образованный металлическими стенками, называемый прямоугольным объемным резонатором. Соединяя круглые пластины конденсатора и увеличивая их число, получаем цилиндр, образованный металлическими стенками, — цилиндрический объемный резонатор.

В объемных резонаторах нельзя выделить области пространства со свойствами только емкости или только индуктивности. Лишь в некоторых частных случаях резонатор специальной формы можно приближенно рассматривать как LC-контур и выделять области, где преимущественно сосредоточена энергия ЭП и МП. Например, в тороидальном резонаторе ЭП сосредоточено в основном между параллельными пластинами, а МП — в основном в желобе. Резонаторы этого типа называют квазистационарными.

Электромагнитные колебания могут существовать в ограниченном металлической поверхностью объеме любой формы, если линейные размеры объема достаточно велики по сравнению с длиной волны. В технике СВЧ наиболее широкое распространение получили прямоугольные, цилиндрические и коаксиальные резонаторы, которые можно рассматривать как отрезки направляющих систем. Закрытые объемные резонаторы применяются в диапазонах сантиметровых и дециметровых волн в качестве избирательных систем в усилителях, генераторах, измерителях частоты, для построения частотных фильтров. Они являются элементами таких электронных приборов, как клистрон и магнетрон.

Применение закрытых объемных резонаторов в диапазонах миллиметровых и оптических волн связано с теми же трудностями, что и применение закрытых направляющих систем. Поэтому в этих диапазонах применяются открытые объемные резонаторы, в которых часть металлических стенок удалена. При определенных условиях излучение поля в окружающее пространство может быть малым, а добротность системы значительной.

Из теории колебательных контуров известно, что собственные колебания в резонаторе возникают, когда от стороннего источника в течение малого промежутка времени в него вводится энергия электромагнитного поля. В резонаторе возникают собственные (свободные) колебания, не связанные с источником электромагнитного поля, причем энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля, и наоборот.

Объемный резонатор имеет ряд собственных частот ω_v. Колебанию каждой частоты соответствует определенная структура электромагнитного поля.

Вынужденные колебания обусловлены воздействием стороннего источника на поле в резонаторе. Если частота колебаний стороннего источника совпадает с одной из собственных частот ω_v, то амплитуды поля бесконечно возрастают (при отсутствии потерь) или становятся очень большими (при наличии потерь). Совпадение частоты вынужденных колебаний с одной из собственных частот является резонансом.

17.3.2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР

Если ограничить некоторый объем диэлектрика (воздуха) замкнутой металлической (идеально проводящей) поверхностью и возбудить в нем электромагнитное поля, то в полости образуются стоячие волны, частота колебаний которых зависит от формы и размеров объема. Такая полая металлическая коробка и называется объемным резонатором. Прямоугольный объемный резонатор представляет собой отрезок прямоугольного волновода, ограниченного двумя металлическими стенками, перпендикулярными оси z и расположенными одна от другой на расстоянии d (рис. 17.10). Вследствие этого по оси z, как и по осям x и y, установится стоячая волна.

Будем считать, что продольное направление в объемном резонаторе определяется осью z. В этом случае можно сохранить прежнюю классификацию типов волн: волны E–TM, волны H–TE и т. д., и прежний метод описания каждой волны векторным потенциалом.

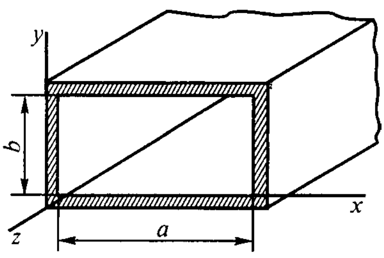


Рис. 17.10
Прямоугольный объемный резонатор

Очевидно, что решение волнового уравнения для векторного потенциала в случае объемного резонатора будет отличаться от решения для волновода тем, что множитель $e^{-j\alpha z}$, описывающий бегущую волну, должен быть заменен множителем $\sin(\alpha z + \psi_z)$, характеризующим стоячую волну. Прежней останется зависимость между постоянными разделения:

$$k^2 - \xi^2 - \eta^2 - \alpha^2 = 0. \qquad (17.48)$$

Очевидно также, что значения этих постоянных разделения получатся для волны любого типа из граничного условия $E_t = 0$ такими же, как и раньше:

$$\xi = \frac{mn}{\alpha};\ \eta = \frac{n\pi}{b}.$$

К ним добавится еще значение

$$\alpha = \frac{l\pi}{d},$$

где l — целое число, играющее такую же роль для оси z, какую m и n играют для осей x и y.

Этими значениями постоянных ξ, η, α определяются согласно уравнению (17.48) волновое число k и связанная с ним собственная частота колебаний (резонансная частота):

$$k = \frac{\omega_{mnl} i}{c} = \frac{2\pi f_{mnl}}{c} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2},$$

откуда

$$f_{mnl} = c\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{l}{2d}\right)^2}. \qquad (17.49)$$

Заметим, что только один их этих индексов может быть равен нулю для колебаний типа H и ни один не равен нулю для колебаний типа E. Выражение (17.49) показывает, что резонансные частоты получаются очень высокими, поэтому практический интерес обычно представляют только низшие типы колебаний.

17.3.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В РЕЗОНАТОРАХ

З а д а ч а 17.1. В прямоугольном волноводе (рис. 17.11) шириной $a = 8{,}64$ см и высотой $b = 4{,}32$ см распространяется поперечная электрическая волна H_{10}. Считая стенки волновода выполненными из сверхпроводящего материала, найти критическую длину волны, длину волны в свободном пространстве и длину волны в волноводе при частоте питающего генератора $f = 3\cdot10^9$ Гц. Вычислить фазовую и групповую скорости. Выяснить, может ли в данном волноводе распространяться волна типа H_{11}.

Р е ш е н и е.

Определим критическую длину волны для данного волновода:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}.$$

Учитывая, что $m = 1$ и $n = 0$, получим

$$\lambda_{\text{кр}} = (2a/m) = 2a = 17{,}28 \text{ см}.$$

Длина волны в свободном пространстве $\lambda_0 = c/f = 10$ см, где c — скорость света.

Так как $\lambda_{\text{кр}} > \lambda_0$, волна типа H_{10} может распространяться в данном волноводе.

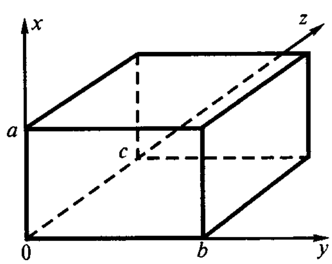


Рис. 17.11
Прямоугольный волновод

Найдем длину волны в волноводе:

$$\lambda_{\text{волн}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = 12{,}25 \text{ см}.$$

Групповая скорость:

$$v_{\text{гр}} = c\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2} = 2{,}45\cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

Фазовая скорость:

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}} = 3{,}68\cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

Проверим, может ли распространяться в данном волноводе волна типа H_{11}. Для этого определим критическую длину волны при $m = 1$ и $n = 1$:

$$\lambda_{\text{кр}_{11}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2}} = 7{,}72 \text{ см}.$$

Так как $\lambda_{\text{кр}11} > \lambda_0$, волна типа H_{11} распространяться в волноводе не может.

Задача 17.2. Прямоугольный резонатор имеет размеры $a = 0{,}01$ м; $b = 0{,}023$ м (см. рис. 17.11). В резонаторе возбуждаются колебания типа TE_{012}. Требуется определить составляющие векторов E и H, а также размер c резонатора вдоль оси z, если резонансная частота должна быть 10^{10} Гц.

Решение.

Если поперечное сечение волновода или резонатора совпадает с плоскостью xy, то волна ЭП типа TE может иметь составляющие по осям x и y. Для волны TE_{012}, как и для других волн типа TE_{0nl}, составляющая поля E_x не зависит от координаты x. Из условия $\operatorname{div}\dot{\vec{E}} = 0$ получаем, что в этом случае $E_y = 0$. Кроме того, составляющая E_x должна обращаться в нуль на тех стенках (четырех боковых) резонатора, где она будет тангенциальной. Поэтому для волны TE_{012} имеем

$$\dot{E}_x = \dot{A}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{2\pi z}{c},$$

где $\dot{A}$ — константа, определяемая мощностью возбуждения.

Поле $\dot{H}$ найдем из второго уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\dot{\vec{H}},$$

откуда

$$\dot{H}_y = \frac{2\pi j\dot{\vec{A}}}{\omega\mu_0 c}\sin\frac{\pi y}{b}\cos\frac{2\pi z}{c};\quad \dot{H}_z = -\frac{\pi j\dot{\vec{A}}}{\omega\mu_0 b}\cos\frac{\pi y}{b}\sin\frac{2\pi z}{c}.$$

Размер c резонатора для волны TE_{012} должен равняться длине волны в волноводе для волны TE_{01}:

$$c = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2b)}} = 0{,}0396 \text{ м},$$

где λ_0 — длина волны в вакууме при частоте 10^{10} Гц.

17.4. ПОТЕРИ МОЩНОСТИ В ВОЛНОВОДЕ

17.4.1. ПОТЕРИ МОЩНОСТИ

Для упрощения расчета ЭМП в волноводе, объемном резонаторе и коаксиальном кабеле можно исходить из допущения, что проводимость граничных металлических оболочек бесконечно велика. Это означает, что глубина проникновения волны в металл равна нулю и что поэтому отсутствует переход электромагнитной энергии в проводнике в тепловые потери. Если же нужно учесть эти потери, то можно с достаточной для практики точностью воспользоваться глубиной проникновения или толщиной поверхностного слоя

$$\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}.$$

Сделать это нужно для вычисления активного сопротивления участка проводника, конечно, при условии, что эта величина много меньше радиуса кривизны поверхности.

Пусть известна амплитуда тангенциальной составляющей H у поверхности идеального проводника:

$$H_t = J_N,$$

где J_N — амплитуда линейной плотности поверхностного тока (H_t перпендикулярно J_N).

Рассмотрим (рис. 17.11) элемент поверхностного слоя проводника толщиной $\frac{1}{b}$ с шириной $d\tau$,параллельной H_t, и с длиной dN, перпендикулярной H_t. Тогда амплитуда поверхностного тока, текущего вдоль этого элемента,

$$I = J_N d\tau = H_t d\tau.$$

Учтем теперь конечную проводимость γ проводника и вычислим активное сопротивление рассматриваемого элемента:

$$r = \frac{dN}{\gamma \frac{1}{b} d\tau}.$$

Активная мощность, которая будет поглощаться этим элементом слоя проводника:

$$dP = \frac{1}{2} I^2 r = \frac{1}{2} H_t^2 (d\tau)^2 \frac{dN}{\gamma \frac{1}{b} d\tau}$$

или

$$dP = \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\gamma}} H_t^2 dS,$$

где $dS = d\tau dN$ — элемент поверхности проводника.

17.4.2.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАТУХАНИЯ

Тепловые потери, которые возникают при распространении волны вследствие конечной проводимости стенок волновода или проводников коаксиального кабеля, должны вызвать затухание волны, т. е. должны привести к зависимости ее амплитуды от z, а этим самым и к зависимости коэффициента $\dot{D}$ (или $\dot{C}$) от z.

Эту зависимость найдем, зная, что потери мощности dP на отрезке dz волновода или кабеля должны быть равны разности вещественных составляющих потока вектора Умова–Пойнтинга через два поперечных сечения, ограничивающих этот отрезок. Если вещественная часть потока комплексного вектора Умова–Пойнтинга через поперечное сечение равна P_S, то на расстоянии dz от этого сечения она равна

$$P_S + \frac{dP_S}{dz}dz$$

и, следовательно,

$$P_S - (P_S + \frac{dP_S}{dz}dz) = dP$$

или

$$\frac{dP_S}{dz} = -\frac{dP}{dz} = -P_1, \qquad (17.50)$$

где P_1 — мощность потерь, отнесенная к единице длины рассматриваемой системы.

Из предыдущего следует, что P_S и P_1 пропорциональны квадрату амплитуды волны:

$$P_S = k_1 D^2; P_1 = k_2 D^2, \qquad (17.51)$$

а на основании (17.50)

$$2k_1 D\frac{dD}{dz} = -k_2 D^2$$

или

$$\frac{dD}{D} = -\frac{k_2}{2k_1 dz} = -\beta dz, \qquad (17.52)$$

откуда

$$D = D_0 e^{-\beta z}, \qquad (17.53)$$

где D_0 — постоянная, от z не зависящая; β — коэффициент затухания.

Таким образом, (17.53) и выражает искомую зависимость D от z. Согласно (17.52) и (17.53) коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{k_2}{2k_1} = \frac{k_2 D^2}{2k_1 D^2} = \frac{P_1}{2P_S}. \qquad (17.54)$$

Он может быть вычислен как половина отношения мощности тепловых потерь, приходящихся на единицу длины системы, к активной мощности, проносимой вектором Умова–Пойнтинга через поперечное сечение.

Найдем, например, коэффициент затухания коаксиальной линии.

Комплексный вектор Умова–Пойнтинга

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2}\dot{E}_r\hat{H}_\alpha = \frac{1}{2}z_в H_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{C^2}{r^2},$$

где $\dot{H}_\alpha = \frac{\dot{C}e^{-jkz}}{r}$ и $\dot{E}_r = z_в H_\alpha$ (определены ранее в гл. 8), оказывается вещественным. Поток его через поперечное сечение диэлектрика:

$$P_S = \int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{C^2}{r^2}2\pi r dr = \pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}C^2\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (17.55)$$

С другой стороны, тепловые потери в кабеле складываются из потерь во внутренней и внешней жилах:

$$dP = dP' + dP'',$$

где каждое их этих слагаемых может быть подсчитано по формуле (17.49).

Для внутренней жилы кабеля ($r = r_1$):

$$H_t^2 = H_\alpha^2 = \dot{H}_\alpha\hat{H}_\alpha = \frac{C^2}{r_1^2};\ \ dS = 2\pi r_1 dz$$

и

$$dP' = \pi\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\gamma_1}}\frac{C^2}{r_1}dz.$$

Аналогично для оболочки ($r = r_2$):

$$dP'' = \pi\sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\gamma_2}}\frac{C^2}{r_2}dz.$$

Следовательно,

$$P_1 = \frac{dP' + dP''}{dz} = \pi\left(\frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\gamma_1}} + \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\gamma_2}}\right)C^2. \qquad (17.56)$$

Внося (17.55) и (17.56) в (17.54), получаем значение коэффициента затухания:

$$\beta = \frac{1}{2\ell n\frac{r_2}{r_1}}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\mu}}\left(\frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu_1}{\gamma_1}} + \frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\gamma_2}}\right),$$

которое и следует внести в уравнения волны

$$\dot{H}_\alpha = \frac{C_0}{r}e^{-\beta z}e^{-jkz};\ \ \dot{E}_r = z_в\dot{H}_\alpha.$$

17.4.3. ДОБРОТНОСТЬ ОБЪЕМНОГО РЕЗОНАТОРА

Рассмотрим способ вычисления добротности или качества объемного резонатора. Добротность Q является важной характеристикой резонансной системы и для колебательных контуров с сосредоточенными постоянными определяется обычно в форме

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r}.$$

В применении к резонатору понятие добротности легко обобщить, если умножить числитель и знаменатель предыдущего выражения на $\frac{1}{2}I^2$:

$$Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}rI^2} = \frac{\omega_0 W_м}{P}.$$

Максимальное значение энергии МП $W_м$ может быть представлено в виде:

$$W_м = \int \frac{\mu H^2}{2} dV,$$

где V — объем диэлектрика резонатора, а средняя за период мощность P потерь в стенках резонатора может быть вычислена из

$$P = \oint \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\gamma}} H_t^2 dS,$$

где S — внутренняя замкнутая поверхность стенок резонатора.

Контрольные вопросы

1. Волновод — это направляющая система... (выберите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) которая может распространять электромагнитную волну в заданном направлении;
б) представляющая собой полую трубу с диэлектрическим наполнителем (в качестве наполнителя возможен воздух), по которой направляется электромагнитная вона высоких и сверхвысоких частот;
в) представляющая собой полую трубу с диэлектрическим наполнителем, по которой распространяются *TEM*-волны.

2. Под плоской электромагнитной волной понимают волну... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ напряженностей которой расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, и изменяющиеся только в функции координаты распространения и времени;
б) векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ напряженностей которой расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны;
в) изменяющуюся только в функции координаты распространения и времени;
г) изменяющуюся только во времени.

3. Электромагнитная волна называется плоской, если... (приведите наиболее полную формулировку).

Варианты:

а) векторы напряженности ЭП $\vec{E}$ и МП $\vec{H}$ в любой данный момент времени лежат в плоскости, перпендикулярной распространению волны, и имеют в этой плоскости одинаковое значение, меняются они только в функции координаты Z (направления распространения волны) и времени t;
б) волна линейно-поляризована, и в ней напряженности $\vec{E}$, $\vec{H}$ меняются только в функции координаты распространения волны и времени t;
в) в волне напряженности $\vec{E}$, $\vec{H}$ изменяются только по координате распространения и во времени, но при этом векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке пространства имеют всевозможные направления, быстро и беспорядочно сменяющие друг друга так, что ни одно из этих колебаний не является преимущественным.

18

ГЛАВА 18

ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ К УРАВНЕНИЯМ ЦЕПИ

18.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАК ОСОБОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИИ

ЭМП можно рассматривать как особое состояние материи, характеризующееся четырьмя векторными величинами: $\vec{E}$ — напряженностью ЭП; $\vec{D}$ — электрической индукцией; $\vec{H}$ — напряженностью МП; $\vec{B}$ — магнитной индукцией. Определить ЭМП в некоторой области пространства — значит указать эти векторы в любой ее точке. Таким образом, ЭМП предстает как совокупность ЭП ($\vec{E}$, $\vec{D}$) и МП ($\vec{H}$, $\vec{B}$), находящихся во взаимосвязи. Деление ЭМП на эти два поля относительно, оно зависит от условий наблюдения и возможно только при макроскопическом рассмотрении явлений. Но поскольку можно создать условия, при которых проявляется одна из составляющих ЭМП, возможно и раздельное изучение ЭП и МП.

ЭМП оказывает силовое воздействие на электрические заряды; обладает энергией, массой движения (масса покоя равна нулю) и количеством движения, т. е. такими же свойствами, что и вещество. Энергия в единице объема, занятого полем в вакууме, равна сумме энергий электрической и магнитной составляющих поля:

$$W'_{\text{эм}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \qquad (18.1)$$

где $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ — диэлектрическая проницаемость пустоты, Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ — магнитная проницаемость пустоты, Гн/м.

Масса движущегося ЭМП в единице объема равна частному от деления энергии поля $W_{\text{эм}}$ на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в вакууме, равной скорости света. Несмотря на малое значение массы поля по сравнению с массой вещества, наличие массы поля указывает на то, что процессы в поле являются процессами инерционными. Количество движения единицы объема ЭМП определяется произведением массы единицы объема поля на скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

ЭП и МП могут быть изменяющимися и неизменными во времени. Неизменным в макроскопическом смысле ЭП является электростатическое поле, созданное совокупностью зарядов, неподвижных в пространстве и неизменных во времени. В этом случае существует ЭП, а МП отсутствует. При протекании постоянных токов по проводящим телам внутри и вне их существуют ЭП и МП, не влияющие друг на друга, поэтому их можно рассматривать раздельно. В изменяющемся во времени поле ЭП и МП, как упоминалось, взаимосвязаны и обусловливают друг друга, поэтому их нельзя рассматривать раздельно.

18.2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОСНОВНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИМИ ПОЛЕ

ЭМП могут быть описаны интегральными или дифференциальными соотношениями. Интегральные соотношения относятся к объему (длине, площади) участка поля конечных размеров, а дифференциальные — к участку поля физически бесконечно малых размеров. Они выражаются операциями градиента, дивергенции, ротора. В макроскопической теории поля описывают свойства поля, усредненные по малому физическому объему и во времени.

В электростатическом поле поток вектора напряженности ЭП E через замкнутую поверхность рассчитывается в виде (теорема Гаусса)

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q_{\text{св}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \tag{18.2}$$

где $q_{\text{св}}$ — свободный электрический заряд, Кл; $d\vec{s}$ — элемент поверхности, направленный в сторону внешней нормали к объему; ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

В дифференциальной форме выражение (18.2) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{св}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \tag{18.3}$$

где $\rho_{\text{св}}$ — объемная плотность свободного заряда, Кл/м^3.

Физически $\operatorname{div} \vec{E}$ означает исток вектора в данной точке.

В электростатическом поле и в стационарном ЭП на заряд q действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Отсюда следует, что $\vec{E}$ может быть определена как силовая характеристика поля:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} (\vec{F}/q).$$

Если q под действием сил поля переместится из точки 1 в точку 2, то силы поля совершат работу

$$A = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ — элемент пути из точки 1 в точку 2.

Под разностью потенциалов U_{12} между точками 1 и 2 понимают работу, совершаемую силами поля при переносе заряда $q = 1$ Кл из точки 1 в точку 2:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \qquad (18.4)$$

Величина U_{12} не зависит от того, по какому пути происходило перемещение из точки 1 в точку 2. Выражению (18.3) соответствует дифференциальное соотношение

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \qquad (18.5)$$

Градиент φ ($\operatorname{grad}\varphi$) в некоторой точке поля определяет скорость изменения φ в этой точке, взятую в направлении наибольшего его возрастания. Знак минус означает, что $\vec{E}$ и $\operatorname{grad}\varphi$ направлены противоположно друг другу.

ЭП называют потенциальным, если для него $\oint \vec{E}dl = 0$. ЭП поляризованного диэлектрика описывается вектором электрического смещения (индукции):

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad (18.6)$$

где $\vec{P}$ — поляризованность диэлектрика, которая равна электрическому моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

Внутри источника постоянной ЭДС результирующая напряженность ЭП $\vec{E}_{\text{рез}}$ равна векторной сумме потенциальной (кулоновой) составляющей $\vec{E}_{\text{пот}}$, о которой говорилось выше, и сторонней составляющей $\vec{E}_{\text{стор}}$:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_{\text{пот}} + \vec{E}_{\text{стор}}.$$

$\vec{E}_{\text{стор}}$ разделяет заряды внутри источника, она обусловлена химическими, электрохимическими, тепловыми и другими процессами неэлектростатического происхождения и направлена встречно $\vec{E}_{\text{пот}}$. В среде под влиянием ЭМП могут протекать электрические токи. Под электрическим током понимают направленное (упорядоченное) движение электрических зарядов. Ток в некоторой точке поля характеризуется своей плотностью $\vec{\delta}$ (А/м^2). Известны три вида тока: ток проводимости (его плотность $\vec{\delta}_{\text{пр}}$), ток смещения (плотностью $\vec{\delta}_{\text{см}}$) и ток переноса (плотностью $\vec{\delta}_{\text{пер}}$). Ток проводимости протекает в проводящих телах под действием ЭП, плотность его пропорциональна $\vec{E}$:

$$\vec{\delta}_{\text{пр}} = \gamma\vec{E}, \qquad (18.7)$$

где γ — удельная проводимость проводящего тела, Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$. В металлах ток проводимости обусловлен упорядоченным движением свободных электронов, в жидкостях — движением ионов.

Плотность тока смещения в диэлектрике равна производной по времени от вектора электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$:

$$\vec{\delta}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{d\vec{E}}{dt}. \qquad (18.8)$$

Слагаемое $\varepsilon_0 \dfrac{d\vec{E}}{dt}$ — составляющая тока смещения, обусловленная изменением во времени напряженности поля $\vec{E}$ в вакууме. Слагаемое $d\vec{P}/dt$ обусловлено изменением поляризованности во времени (изменением расположения связанных зарядов в диэлектрике при изменении $\vec{E}$ во времени). В качестве примера тока смещения может быть назван ток, проходящий через конденсатор. Ток переноса обусловлен движением электрических зарядов в свободном пространстве. Примером тока переноса может служить ток в электронной лампе. Если положительный заряд объемной плотности ρ_+ движется со скоростью $\vec{v}_+$ и отрицательный заряд объемной плотности ρ_- со скоростью $\vec{v}_-$, то плотность тока переноса в этом поле $\vec{\delta}_{\text{пер}} = \rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_-$ в явном виде не зависит от напряженности $\vec{E}$ в данной точке поля. Если в некоторой точке поля одновременно существовали бы все три вида тока, то полная плотность тока $\vec{\delta}_{\text{пол}} = \vec{\delta}_{\text{пр}} + \vec{\delta}_{\text{см}} + \vec{\delta}_{\text{пер}}$. Для большинства задач ток переноса отсутствует. Ток — это скаляр алгебраического характера. Полный ток через поверхность S равен

$$I_{\text{пол}} = \int\limits_S \vec{\delta}_{\text{пол}} d\vec{s}. \tag{18.9}$$

Если в ЭМП выделить некоторую поверхность, то ток, вошедший через поверхность, будет равняться току, вышедшему из поверхности, т. е.

$$\oint \vec{\delta}_{\text{пол}} d\vec{s} = 0, \tag{18.9a}$$

где $d\vec{s}$ — элемент поверхности, через которую проходит ток. Последнее уравнение выражает принцип непрерывности полного тока: линии полного тока представляют замкнутые линии, не имеющие начала и конца. Электрические токи неразрывно связаны с МП. Эта связь определяется интегральной формой закона полного тока:

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = i_{\text{пол}}. \tag{18.10}$$

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна величине полного тока, охваченного этим контуром; $d\vec{l}$ — элемент длины контура. Таким образом, все виды токов, хотя и имеют различную физическую природу, обладают свойством создавать МП.

Ферромагнитные вещества обладают спонтанной намагниченностью. Характеристикой ее является магнитный момент единицы объема вещества $\vec{J}$ (его называют намагниченностью). Для ферромагнитных веществ:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_a\vec{H}, \tag{18.11}$$

где μ_r — относительная магнитная проницаемость; μ_a — абсолютная магнитная проницаемость.

Напряженность МП:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \tag{18.12}$$

Закон полного тока в интегральной форме часто записывают в виде

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = i_{\text{пол}}, \tag{18.13}$$

или в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \tag{18.14}$$

Запись (18.14) закона полного тока получили из (18.13), поделив обе части его на площадь $\Delta\vec{s}$, охваченную контуром интегрирования, и стремлении $\Delta\vec{s}$ к нулю. Физический ротор характеризует поле в данной точке в отношении способности к образованию вихрей.

Плотность тока переноса в правой части последнего уравнения не учтена, так как он обычно отсутствует в задачах, решаемых с помощью этого уравнения. Магнитный поток (Ф, Вб) через некоторую поверхность S определяют как поток вектора $\vec{B}$ через эту поверхность:

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B} d\vec{s}. \tag{18.15}$$

Если поверхность S замкнутая и в нее заключен объем V, то поток, вошедший в объем, равен потоку, вышедшему из него, т. е.

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0. \tag{18.16}$$

Уравнение (18.16) выражает принцип непрерывности магнитного потока. Линии магнитной индукции — это замкнутые линии. В дифференциальной форме принцип непрерывности магнитного потока записывается в виде

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{18.17}$$

В 1831 г. М. Фарадей сформулировал закон электромагнитной индукции: ЭДС $e_{\text{инд}}$, наведенная в некотором одновитковом контуре пронизывающим этот контур изменяющимся во времени магнитным потоком, определяется выражением

$$e_{\text{инд}} = \oint \vec{E}_{\text{инд}} d\vec{l} = -d\Phi / dt. \tag{18.18}$$

Здесь $\vec{E}_{\text{инд}}$ — индукционная составляющая напряженности ЭП.

Если контур многовитковый (катушка с числом витков w), то

$$e_{\text{инд}} = -d\psi / dt, \tag{18.19}$$

здесь ψ — потокосцепление катушки, равное сумме потоков, пронизывающих отдельные витки этой катушки,

$$\psi = \sum_{w=1}^{w=n} \Phi_w. \tag{18.20}$$

Если все витки w пронизываются одинаковыми потоками Ф, то

$$\psi = w\Phi,$$

где ψ — результирующее потокосцепление, оно может создаваться не только внешним по отношению к данному контуру потоком, но и собственным потоком, пронизывающим контур, при протекании по нему тока. В проводнике длиной $d\vec{l}$, пересекающем магнитные силовые линии неизменного во времени МП с индукцией $\vec{B}$, вследствие силы Лоренца наводится ЭДС:

$$de_{\text{инд}} = \vec{B}[d\vec{l}\vec{v}], \tag{18.21}$$

где $\vec{v}$ — скорость перемещения проводника относительно МП.

В (18.21) $\vec{B}$ скалярно умножается на векторное произведение $d\vec{l}$ и $\vec{v}$. Если в результате расчета по (18.21) $de_{\text{инд}} > 0$, то $de_{\text{инд}}$ направлена по $d\vec{l}$.

В 1833 г. академик Э. Х. Ленц установил закон электромагнитной индукции: при всяком изменении магнитного потока, сцепляющемся с каким-либо проводящим контуром, в нем возникает индуктированная ЭДС, стремящаяся вызвать в контуре ток, который препятствует изменению потокосцепления контура и вызывает механическую силу, препятствующую изменению линейных размеров контура или его повороту.

Закон электромагнитной индукции, примененный к контуру бесконечно малых размеров, записывается так:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t, \tag{18.22}$$

где индукционная составляющая напряженности поля $\vec{E}_{\text{инд}}$ обозначена через $\vec{E}$.

Обобщая, можно сказать, что ЭМП описывается четырьмя основными уравнениями в интегральной форме:

$$\begin{gathered}\oint \vec{H}d\vec{l} = I_{\text{пол}};\;\; e = \oint \vec{E}_{\text{инд}}d\vec{l} = -d\Phi/dt;\\ \oint \vec{B}d\vec{s} = 0;\\ \oint \vec{E}d\vec{s} = q_{\text{св}}/\varepsilon_0\varepsilon_r.\end{gathered} \tag{18.23}$$

Этим уравнениям отвечают четыре уравнения в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \partial\vec{D}/\partial t, \tag{а}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t, \tag{б}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{в}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho_{\text{св}}/\varepsilon_0\varepsilon_r. \tag{г}$$

Они сформулированы в 1873 г. Д. Максвеллом. Их называют уравнениями Максвелла или уравнениями макроскопический электродинамики.

Уравнение (*а*) означает, что вихревое МП создается токами проводимости и токами смещения. Уравнение (*б*) свидетельствует о том, что изменение МП во времени вызывает вихревое ЭП. Уравнение (*в*) — МП не имеет источников. И уравнение (*г*) — истоком линий $\vec{E}$ являются свободные заряды. Частные производные в уравнениях (*а*) и (*б*) учитывают, что уравнения записаны для неподвижных тел и сред в выбранной системе координат.

18.3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОСНОВНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИМИ ЦЕПЬ

Первый закон Кирхгофа для электрической цепи вытекает из принципа непрерывности электрического тока. Действительно,

$$\oint\limits_S \vec{\delta} d\vec{s} = 0. \tag{18.24}$$

Применим этот принцип для области 1 электрической цепи, изображенной на рис. 18.1.

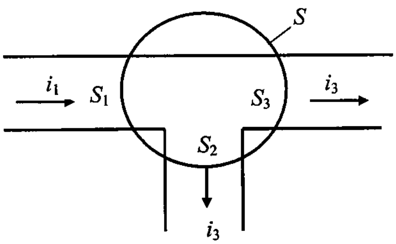


Рис. 18.1
Схема электрической цепи

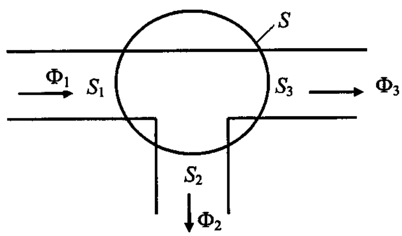


Рис. 18.2
Схема магнитной цепи

Согласно (18.24)

$$\oint\limits_S \vec{\delta} d\vec{s} = \int\limits_{S_1} \vec{\delta} d\vec{s} + \int\limits_{S_2} \vec{\delta} d\vec{s} + \int\limits_{S_3} \vec{\delta} d\vec{s} = -i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

И в этом случае для любого узла электрической цепи

$$\sum_j i_j = 0, \tag{18.24a}$$

где $j \in [1, N]$ — количество токов в узле.

Аналогично, первый закон Кирхгофа для магнитной цепи вытекает из принципа непрерывности магнитного потока (рис. 18.2):

$$\oint\limits_S \vec{B} d\vec{s} = \int\limits_{S_1} \vec{B} d\vec{s} + \int\limits_{S_2} \vec{B} d\vec{s} + \int\limits_{S_3} \vec{B} d\vec{s} = -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

или в общем случае

$$\sum_j \Phi_j = 0. \tag{18.25}$$

Второй закон Кирхгофа для электрической и магнитной цепей также можно получить как следствие интегральных уравнений ЭМП.

Действительно, в ЭП:

$$\oint\limits_l \vec{E} d\vec{l} = 0. \tag{18.26}$$

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 18.3.

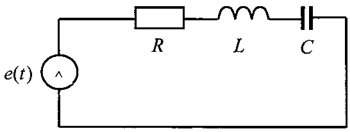


Рис. 18.3
Схема последовательной электрической цепи

Область, в которой рассматривается поле, представляет собой контур на рисунке:

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = \oint_{l_1} \vec{E}_{\text{стор}}d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{E}_{\text{пот}_2}d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{E}_{\text{инд}}d\vec{l} + \int_{l_4} \vec{E}_{\text{пот}_4}d\vec{l} = 0. \qquad (18.27)$$

В выражении (18.27): $\oint_{l_1} \vec{E}_{\text{стор}}d\vec{l} = u_e = -e(t)$, $e(t)$ — ЭДС источника, u_e — напряжение, уравновешивающее ЭДС; $\int_{l_2} \vec{E}_{\text{пот}_2}d\vec{l} = u_a = iR$ — падение напряжения на сопротивлении R и на сопротивлении всего провода контура.

$$\int_{l_3} \vec{E}_{\text{инд}}d\vec{l} = w\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(w\Phi)}{dt} = L\frac{di}{dt} = u_L$$

— это выражение падения напряжения на индуктивном сопротивлении контура; $\int_{l_4} \vec{E}_{\text{пот}_4}d\vec{l} = u_c$ — падение напряжения на емкостном сопротивлении контура.

Как известно, ток в конденсаторе (ток электрического смещения в однородном поле плоского конденсатора):

$$i = \vec{\delta}\vec{S} = \vec{S}\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C\frac{du_c}{dt},$$

откуда

$$u_c = \frac{1}{C}\int i dt.$$

Таким образом, уравнение

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = 0$$

соответствует второму закону Кирхгофа для электрической цепи:

$$\sum_j u_j = 0,$$

которое для цепи на рис. 18.3 может быть записано как

$$u_e + u_a + u_L + u_c = 0$$

или

$$e(t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt.$$

Известный закон Ома ($R = U/I$) также может быть получен из уравнения поля:

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E}. \qquad (18.28)$$

Для этого нужно умножить левую и правую части этого уравнения на S, а левую часть дополнительно умножить и разделить на l:

$$\delta S = \gamma E S \frac{l}{l}.$$

Так как $\delta S = I$, $El = U$, $\frac{\gamma S}{l} = \frac{1}{R}$, то $U = IR$ или $u_a = iR$.

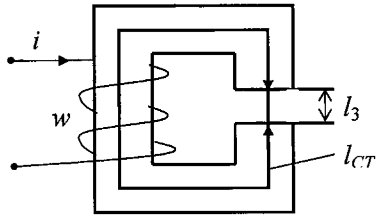


Рис. 18.4
С-образный магнитопровод с зазором

Уравнение (18.28) называют законом Ома в дифференциальной форме.

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи можно получить, проанализировав МП в области, представленной на рис. 18.4.

На основании первого уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = i_n,$$

где i — полный ток, протекающий по цепи, охватывающей магнитопровод, в котором создается магнитная напряженность H, $i_n = wi$.

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \vec{H}_{\text{ст}} l_{\text{ст}} + H_з l_з = U_{м\,\text{ст}} + U_{м\,з}. \tag{18.29}$$

На основании (18.29):

$$U_{мст} + U_{мз} = wi = F,$$

где F — магнитодвижущая сила.

В произвольном контуре магнитной цепи:

$$\sum_j U_{мj} = \sum_k F_k, \tag{18.30}$$

что представляет собой второй закон Кирхгофа для магнитной цепи.

18.4. РАЗДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЦЕПНЫЕ И ПОЛЕВЫЕ

Задачи, с которыми приходится встречаться на практике, могут быть разделены на две большие группы. Первая группа — цепные задачи, решение которых может быть найдено из уравнений поля, записанных в интегральной форме. В этой группе используют понятия «ток», «магнитный поток», «электрическое и магнитное напряжения», «потенциал», «ЭДС», «МДС», «резистивное, индуктивное и емкостное сопротивления». Для решения задач второй группы (полевых задач) используют уравнения поля в дифференциальной форме. В однородных полях и полях, обладающих симметрией, возможно применение уравнений в интегральной форме. Цепные задачи рассматривают в I и II частях курса ТОЭ (курса теории цепей), задачи теории поля в III части курса ТОЭ. Четкой границы между двумя группами задач нет, так как любая

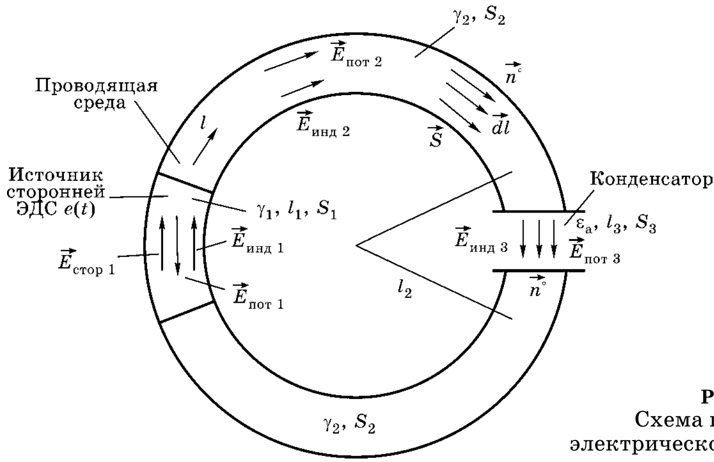


Рис. 18.5
Схема канализации электрической энергии по цепи

цепная задача с увеличением частоты перерастает в полевую (все более проявляются паразитные параметры и резко возрастает излучение энергии в окружающее пространство).

Основными уравнениями теории электрических цепей являются уравнения (законы) Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа для электрических цепей следует из принципа непрерывности полного тока, а для магнитных цепей — из принципа непрерывности магнитного потока.

Покажем, что уравнение второго закона Кирхгофа для цепи переменного тока вытекает из основных уравнений ЭМП. С этой целью обратимся к рис. 18.5 [18.1]. Цепь здесь образована источником сторонней ЭДС $e(t)$, являющейся функцией времени (область 1 с проводимостью γ_1), проводящей средой (область 2 с проводимостью γ_2) и конденсатором (область 3, электрическая проницаемость ε_a).

Будем исходить из непрерывности полного тока i через поперечные сечения трех областей. Полагаем, что излучение энергии в окружающее пространство отсутствует (частота относительно невелика). В первой области напряженность электрического поля $\vec{E}_1$ состоит из трех компонент (сторонней, потенциальной и индукционной): $\vec{E}_1 = \vec{E}_{стор1} + \vec{E}_{пот1} + \vec{E}_{инд1}$, во второй $\vec{E}_2 = \vec{E}_{пот2} + \vec{E}_{инд2}$, в третьей $\vec{E}_3 = \vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3}$; $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$ — площади поперечного сечения областей; $d\vec{l}$ — элемент длины, совпадающий по направлению с $d\vec{s}$; n° — единичный вектор, совпадающий с направлением $d\vec{l}$ и $\vec{S}$.

Для первой области:

$$i = \gamma_1(\vec{E}_{стор1} + \vec{E}_{пот1} + \vec{E}_{инд1})\vec{S}_1, \tag{18.31}$$

для второй:

$$i = \gamma_2(\vec{E}_{пот2} + \vec{E}_{инд2})\vec{S}_2, \tag{18.32}$$

для третьей:

$$i = \varepsilon_a \frac{d}{dt}(\vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3})\vec{S}_3 = \varepsilon_a p(\vec{E}_{пот3} + \vec{E}_{инд3})\vec{S}_3 \quad (p = d/dt). \tag{18.33}$$

Умножим уравнения (18.31)–(18.33) на элемент длины пути $d\vec{l} = \vec{n}^\circ dl$, учтем, что $\vec{S} = \vec{n}^\circ S$, и перепишем их так:

$$(\vec{E}_{\text{стор}1} + \vec{E}_{\text{пот}1} + \vec{E}_{\text{инд}1})d\vec{l} = \frac{i}{\gamma_1 S_1} dl, \quad (18.34)$$

$$(\vec{E}_{\text{пот}2} + \vec{E}_{\text{инд}2})d\vec{l} = \frac{i}{\gamma_2 S_2} dl, \quad (18.35)$$

$$(\vec{E}_{\text{пот}3} + \vec{E}_{\text{инд}3})d\vec{l} = \frac{i}{p\varepsilon_a S_3} dl. \quad (18.36)$$

Проинтегрируем (18.34) по длине 1-го участка, уравнение (18.35) — по длине 2-го участка и уравнение (18.36) — по длине 3-го. Затем сложим их. Тогда получим

$$\int_{l_1} \vec{E}_{\text{стор}1} d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{E}_{\text{пот}1} d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{E}_{\text{пот}2} d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{E}_{\text{пот}3} d\vec{l} + \int_{l_1} \vec{E}_{\text{инд}1} d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{E}_{\text{инд}2} d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{E}_{\text{инд}3} d\vec{l} =$$

$$= -i\left(\int_{l_1} \frac{dl}{\gamma_1 S_1} + \int_{l_2} \frac{dl}{\gamma_2 S_2}\right) + \frac{i}{p}\int_{l_3} \frac{dl}{\varepsilon_a S_3}; \;\; \frac{i}{p} = \int i dt; \;\; \frac{1}{C} = \int_{l_3} \frac{dl}{\varepsilon_a S_3}.$$

Окончательно,

$$i(R_1 + R_2) + \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = e(t), \quad (18.37)$$

где R_1 и R_2 — резистивные сопротивления участков 1 и 2; C — емкость конденсатора.

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей следует из закона полного тока.

Контрольные вопросы

1. Уравнения, описывающие полевые задачи или уравнения цепей... (выберите ответ).

Варианты:
- а) первичными являются уравнения поля (ЭП и МП), а уже на их основе разработаны уравнения цепи;
- б) первичными являются уравнения цепи (магнитной и электрической), а на их основе разработаны уравнения поля;
- в) те и другие уравнения разрабатывались одновременно;
- г) сначала были исследованы физические явления: появление МП вокруг провода при прохождении тока по проводу и индуцирование ЭДС в контуре при пересечении его переменным МП, а затем эти явления описаны в виде аналитических выражений — последние были использованы для решения задач поля и цепи.

2. Аналогами функций электрической и магнитной цепи являются... (выберите ответ).

Варианты:
- а) $I \to \Phi, e \to F = iw, U \to Hl, R = l/(\gamma S) \to R_M = l/(\mu S)$;
- б) $I \to F = iw, e \to \Phi, U \to H, R = l/(\gamma S) \to R_M = l/(\mu S)$;
- в) $I \to H, e \to \Phi, U \to F = iw, R = l/(\gamma S) \to R_M = l/(\mu S)$;
- г) $I \to \Phi, e \to Hl, U \to F = iw, R = l/(\gamma S) \to R_M = l/(\mu S)$.

3. Можно ли совместить в одном алгоритме методы расчета цепей и поля в инженерной задаче? Дать полный ответ.

Варианты:
- а) задачу необходимо рассчитывать либо как цепную, либо как полевую;
- б) можно совместить методы расчета цепи и поля при решении задачи в одномерной постановке;
- в) можно совместить методы расчета цепи и поля, если правильно использовать условия перехода от расчета цепи к расчету поля.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

19

ГЛАВА 19

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В РЕАЛЬНЫХ СРЕДАХ

19.1. ПАРАМЕТРЫ РЕАЛЬНЫХ СРЕД

В электротехнике вещества принято делить на диэлектрики и проводники. Вещества, в которых практически отсутствуют свободные заряды, способные перемещаться под действием поля, и в которых наблюдается только явление поляризации, называют идеальными диэлектриками. К идеальным проводникам относят вещества, в которых при наличии поля происходит движение свободных зарядов.

В переменном ЭМП в идеальных диэлектриках плотность тока проводимости пренебрежимо мала по сравнению с плотностью тока смещения, т. е. $\gamma/\omega\varepsilon \ll 1$. В идеальных проводниках плотность тока смещения намного меньше плотности тока проводимости $\gamma/\omega\varepsilon \gg 1$. Идеальные диэлектрики и идеальные проводники сохраняют свои свойства в широком диапазоне частот и могут характеризоваться соответственно только диэлектрической проницаемостью ε или только удельной проводимостью γ.

Отношение плотности тока проводимости к плотности тока смещения $\gamma/\omega\varepsilon$ зависит от частоты изменения поля. Поэтому при повышении частоты диэлектрические свойства среды проявляются более отчетливо. Одна и та же среда при низких частотах может вести себя как проводник, а при высоких частотах — как диэлектрик. Например, морская и пресная вода, почва: такие среды при низких частотах считают реальными (плохими) проводниками, а при высоких — реальными диэлектриками.

При расчете поля в реальных средах необходимо учитывать их проводящие и диэлектрические свойства.

19.2. РЕАЛЬНЫЕ СРЕДЫ В СТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

19.2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В проводящих средах при постоянном во времени ЭП протекает постоянный электрический ток. Поэтому в установившемся режиме распределение потенциала в проводниках определяется законами ЭП постоянного тока. Реальные среды обладают конечной проводимостью, и в них также устанавливается постоянный ток при неизменном во времени распределении потенциала. В стационарном ЭП не происходит изменения во времени объемной плотности свободного заряда $\partial\rho/\partial t = 0$, поэтому $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ и плотность тока также постоянны во времени. При этом распределение напряженности ЭП определяется законом изменения проводимости γ ($\vec{E} = \vec{j}/\gamma$). Например, если к двум последовательно соединенным конденсаторам с реальными диэлектриками приложено постоянное во времени напряжение, то через конденсаторы будет протекать постоянный ток. Распределение напряжения на конденсаторах установится в зависимости от проводимостей реальных диэлектриков, заполняющих конденсаторы. Только когда отношение ε/γ реальных диэлектриков постоянно, ЭСП и ЭП постоянного тока совпадают.

19.2.2. ОБЪЕМНЫЕ ПЛОТНОСТИ СВОБОДНОГО И СВЯЗАННОГО ЗАРЯДОВ

Реальные среды обычно неоднородны, поэтому даже при постоянном ЭП появляется объемная ρ и поверхностная плотность свободного заряда q_s. Предположим, что диэлектрическая проницаемость ε и удельная проводимость γ являются функциями координат. Тогда, объединяя уравнения

$$\operatorname{div}\varepsilon\vec{E} = \rho, \tag{19.1}$$

$$\vec{E} = \vec{j}/\gamma, \tag{19.2}$$

получим

$$\frac{\varepsilon}{\gamma}\operatorname{div}\vec{j} + \vec{j}\operatorname{grad}\frac{\varepsilon}{\gamma} = \rho. \tag{19.3}$$

Для постоянного ЭП ($\operatorname{div}\vec{j} = 0$) уравнение (19.3) примет вид

$$\vec{j}\operatorname{grad}\frac{\varepsilon}{\gamma} = \rho. \tag{19.4}$$

Из соотношения (19.4) видно, что в неоднородных реальных средах при протекании в них постоянного тока образуется свободный заряд, объемная плотность которого определяется именно этим уравнением. Свободный заряд не накапливается только в случаях:

1) при отсутствии тока — $\vec{j} = 0$;

2) при ε/γ — const (поскольку в этом случае $\operatorname{grad}\dfrac{\varepsilon}{\gamma} = 0$, $\rho = 0$);

3) при $\vec{j} \perp \mathrm{grad}(\varepsilon/\gamma)$ — $\rho = 0$;

4) при $\gamma \to \infty$ (случай идеального проводника).

Таким образом, в неоднородных реальных средах при постоянном ЭП и даже при незначительной удельной проводимости возникают токи утечки и появляется объемная плотность свободного заряда. Кроме того, вследствие неоднородности поляризации образуется связанный заряд. У этого заряда плотность:

$$\rho_c = -\mathrm{div}\,\vec{P} = -\mathrm{div}(\vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}) = -\rho + \mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E}. \qquad (19.5)$$

Если напряженность ЭП не зависит от координат, то $\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} = 0$ и объемная плотность связанных зарядов в толще реальной среды равна и противоположна по знаку объемной плотности свободного заряда. Это соотношение справедливо, когда удельная проводимость реальной среды, например плоского конденсатора, не зависит от координат. В этом случае $\vec{E}$ при постоянном напряжении также не зависит от координат, ибо $\vec{j}$ — const.

Рассматривая уравнения (19.4) и (19.5) и учитывая, что $\vec{j}$ — const, распределение напряженности ЭП определяется γ и не зависит от ее диэлектрической проницаемости, можно без предварительных расчетов выяснить, меняются ли $\vec{E}$ и $\vec{D}$ по толщине среды и существуют ли ρ и ρ_c.

Пусть в плоском конденсаторе удельная проводимость между пластинами не меняется, т. е. γ — const, а $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Тогда:

а) при $\vec{E} = \vec{j}/\gamma$ — const $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{D}(x)$, $\vec{P} = \vec{P}(x)$, $\mathrm{grad}\dfrac{\varepsilon(x)}{\gamma} \neq 0$ и из уравнения (19.4) следует, что $\rho \neq 0$, а из уравнения (19.5) — $\rho_c = -\rho$;

б) при $\gamma = \gamma(x)$, ε — const (или $\varepsilon = \varepsilon(x)$) — $\vec{E} = \vec{E}(x)$, $\vec{D} = \vec{D}(x)$, $\vec{P} = \vec{P}(x)$, $\mathrm{grad}\dfrac{\varepsilon}{\gamma(x)} \neq 0$ и $\rho \neq 0$, но поскольку $\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} \neq 0$, что следует из (19.5), то $\rho_c \neq \rho$;

в) при $\gamma = \gamma(x)$ и $\varepsilon = \varepsilon(x)$, но с учетом $\dfrac{\varepsilon(x)}{\gamma(x)}$ — const, тогда, $\vec{E} = \vec{E}(x)$, $\vec{D} = \vec{D}(x)$, $\vec{P} = \vec{P}(x)$, $\mathrm{grad}\dfrac{\varepsilon(x)}{\gamma(x)} = 0$ и $\rho = 0$, но поскольку $\mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{E} \neq 0$, то $\rho_c \neq 0$.

19.2.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА РЕАЛЬНЫХ СРЕД

На границе раздела реальных сред, в которых протекает постоянный ток, справедливы граничные условия ЭП:

$$\vec{j}_{1n} = \vec{j}_{2n}, \;\; \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}. \qquad (19.6)$$

Граничные же условия ЭП для нормальных векторов смещения уже не применимы. В этом случае на поверхности раздела реальных сред нормальные составляющие вектора электрического смещения не равны. Из условий (19.6) следует

$$\frac{D_{1n}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1\gamma_2}{\varepsilon_2\gamma_1}. \qquad (19.7)$$

Разрыв нормальных составляющих электрического смещения определяется соотношениями ε/γ граничных сред. На границе происходит скачок ε/γ, что приводит к возникновению свободного q_s и связанного q_{sc} зарядов со значительной поверхностной плотностью. Величину поверхностной плотности заряда на границе раздела реальных сред можно найти из граничных условий (19.6) и (19.7). Из выражения (19.7) получим поверхностную плотность свободного заряда:

$$q_s = D_{1n} - D_{2n} = D_{2n}\left(\frac{\varepsilon_1\gamma_2}{\varepsilon_2\gamma_1} - 1\right). \tag{19.8}$$

Отсюда поверхностная плотность заряда будет равна нулю и нормальные составляющие электрического смещения непрерывны только при выполнении условия $\varepsilon_1/\gamma_1\ \varepsilon_2/\gamma_2$ — const. Поверхностную плотность свободного заряда можно выразить через нормальную составляющую плотности тока. Для этого в условии (19.8) заменим $D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_2(j_{2n}/\gamma_2)$ и после алгебраических преобразований получим

$$j_{1n}\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right) = q_s. \tag{19.9}$$

Поверхностная плотность связанных зарядов может быть определена по известному условию:

$$q_{sc} = P_{2n} - P_{1n} = E_{2n}(\varepsilon_2 - 1) - E_{1n}(\varepsilon_1 - 1). \tag{19.10}$$

Подставляя в (19.10) граничное условие (19.6), получим

$$q_{sc} = j_n\left(\frac{\varepsilon_2 - 1}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1 - 1}{\gamma_1}\right). \tag{19.11}$$

Таким образом, объемная плотность свободных и связанных зарядов в толще реальной среды, а также поверхностная плотность зарядов на границе реальных сред определяются как проводящими свойствами, так и диэлектрическими свойствами сред.

Кроме условий (19.6) и (19.9), остаются в силе граничные условия для тангенциальных составляющих напряженностей ЭП — $E_{1t} = E_{2t}$.

19.2.4.
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

П р и м е р 19.1. Плоский конденсатор заполнен неоднородной реальной средой, имеющей $\gamma = 10^{-8}$ 1/Ом·см и $\varepsilon(x) = 12 + 40x$ Ф/см. Площадь пластин конденсатора $S = 10$ см^2, расстояние между пластинами $d = 0{,}3$ см. К конденсатору приложено постоянное напряжение $U = 100$ В.

Требуется найти проводимость G среды, заполняющей конденсатор, а также распределение E, ρ, ρ_c.

Р е ш е н и е.

Проводимость среды:

$$G = \frac{\int\limits_S \vec{j}d\vec{s}}{\int\limits_0^d \vec{E}d\vec{x}} = \frac{jS}{\int\limits_0^d \frac{jdx}{\gamma(x)}}.$$

Поскольку j — const, $I = \int\limits_S \vec{j}d\vec{s} = jS$, $E = j/\gamma$. Таким образом,

$$G = \frac{S}{\int\limits_0^d \frac{dx}{\gamma(x)}} = \frac{10}{\int\limits_0^{0,3} \frac{dx}{10^{-8}}} = 3{,}34 \cdot 10^{-7}\ 1/\text{Ом}.$$

Распределение E найдем, исходя из закона Ома в дифференциальной форме:

$$E = \frac{j}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S} = \frac{U}{\gamma S \int\limits_0^d \frac{dx}{\gamma S}} = \frac{U}{\int\limits_0^d dx} = \frac{100}{0{,}3} = 333{,}4\ \text{В/см}.$$

По выражению (19.4) имеем

$$\rho = \gamma E \frac{d}{dx}\frac{\varepsilon(x)}{\gamma} = \frac{10^{-8} \cdot 333{,}4}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{9}} \frac{d}{dx}\left(\frac{12 + 40x}{10^{-9}}\right) = 1{,}18 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/см}^3.$$

Так как $\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = 0,$ то на основании равенства (19.5)

$$\rho_c = -\rho = -1{,}18 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/см}^3.$$

Пример 19.2. К плоскому двухслойному конденсатору (рис. 19.1) подключено постоянное напряжение U = 1000 В. Первый слой имеет толщину d_1 = 0,6 см, $\varepsilon_1 = 10\varepsilon_0$, $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ 1/Ом·см; второй слой: d_2 = 0,4 см, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $\gamma_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ 1/Ом·см. Площадь пластин S = 10 см^2.

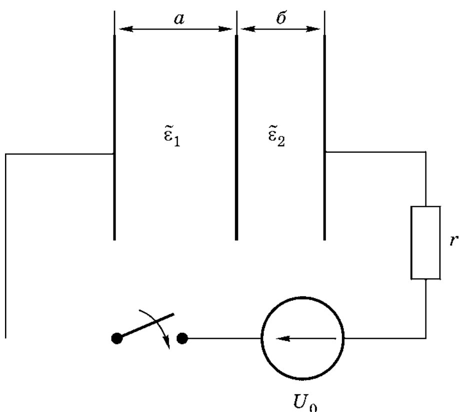


Рис. 19.1
Плоский двухслойный конденсатор

Требуется найти распределение напряженности E в обоих слоях и плотность свободного и связанного зарядов на поверхности раздела двух сред.

Решение.

В установившемся режиме напряженность ЭП распределяется в зависимости от проводимостей слоев.

Так как j — const, а $j_{1n} = j_{2n}$, то $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$ (a).

Если учесть выражения (a) и $U = E_1 d_1 + E_2 d_2$, получим

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} d_1 + d_2} = \frac{10^3}{\frac{4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-8}} 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 623 \text{ В/см};$$

$$E_1 = E_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 623 \frac{4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-8}} = 1246 \text{ В/см}.$$

Плотность тока постоянна в обоих слоях и равна

$$j = \gamma_1 E_1 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1246 = 2492 \text{ А/см}^2.$$

По уравнениям (19.9) и (19.10) найдем соответственно q_s и q_{sc}:

$$q_s = 8{,}85 \cdot 10^{-14} \cdot 2492 \cdot 10^{-8} \left(\frac{10}{2 \cdot 10^{-8}} - \frac{2}{4 \cdot 10^{-8}} \right) = 9{,}9 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^3,$$

$$q_{sc} = -8{,}85 \cdot 10^{-14} \cdot 2492 \cdot 10^{-8} \left(\frac{9}{2 \cdot 10^{-8}} - \frac{1}{4 \cdot 10^{-8}} \right) = -8{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^3.$$

19.3. РЕАЛЬНЫЕ СРЕДЫ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

19.3.1. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ВЕКТОРА ПЛОТНОСТИ ПОЛНОГО ТОКА

Свойства проводника в переменном поле проявляются, как и в постоянном поле, в движении свободных зарядов, т. е. в появлении плотности тока проводимости $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Однако в переменном поле линии вектора плотности тока не замкнуты:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (19.12)$$

Диэлектрические свойства реальной среды можно характеризовать вектором смещения $\vec{D}$. При переменном ЭП вектор $\vec{D}$ меняется во времени:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Скорость изменения вектора $\vec{D}$ называют плотностью тока смещения:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_c.$$

В каждой точке поля реальной среды вектор плотности тока смещения складывается с вектором плотности тока проводимости:

$$\vec{j}_n = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_c. \qquad (19.13)$$

Так как $\partial \vec{D} / \partial t$ на поверхности проводника, граничащего с диэлектриком, равна плотности тока проводимости, то формально ток смещения можно рассматривать как продолжение тока проводимости.

Найдем дивергенцию от обеих частей уравнения (19.13) и во втором слагаемом изменим порядок операций:

$$\operatorname{div}\vec{j}_n = \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0,$$

поскольку $\operatorname{div}\vec{j}_n = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, а $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$.

Таким образом, получили, что

$$\operatorname{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \text{ или } \operatorname{div}\vec{j}_n = 0. \tag{19.14}$$

Равенство (19.14) является уравнением непрерывности линий вектора плотности полного тока и означает, что линии вектора плотности полного тока $\vec{j}_n$ замкнуты.

19.3.2. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ВЕКТОРА ПОЛНОГО СМЕЩЕНИЯ

На поверхности проводника, граничащего с реальной средой, величина вектора смещения равна поверхностной плотности свободного заряда $D = q_s$. Поэтому плотность тока смещения у поверхности проводника $\vec{j}_c$ может быть приравнена к скорости изменения поверхностной плотности свободного заряда на поверхности проводника:

$$\vec{j}_c = \frac{dq_s}{dt}.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, а затем интегрируя, найдем поверхностную плотность свободного заряда:

$$q_s = \int \vec{j}_c dt. \tag{19.15}$$

Умножая обе части второго равенства (19.13) на dt и интегрируя, получим

$$\int \vec{j}_n dt = \int \vec{j} dt + \int \vec{j}_c dt. \tag{19.16}$$

Выражение $\int \vec{j} dt$ является поверхностной плотностью свободного заряда на поверхности проводника, обусловленной уже протекающим током проводимости. Называя условно левую часть равенства (19.16) поверхностной плотностью полного заряда системы q_{sn} и учитывая уравнение (19.15), запишем

$$q_{sn} = q_s + \int \vec{j} dt, \tag{19.17}$$

или, вводя вектор полного смещения $\vec{D}_n$, получим

$$\vec{D}_n = \vec{D} + \int \vec{j} dt. \tag{19.18}$$

Продифференцировав уравнение (19.18) по времени:

$$\frac{\partial \vec{D}_n}{\partial e} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Сравнивая это уравнение с выражением для вектора плотности полного тока (19.13), находим, что

$$\vec{j}_n = \frac{\partial \vec{D}_n}{\partial t}. \qquad (19.19)$$

В результате получим основные уравнения для мгновенных значений векторов:

$$\operatorname{div} \vec{j}_n = 0, \ \operatorname{div} \vec{D}_n = 0, \ \vec{j}_n = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \ \vec{j}_n = \frac{\partial \vec{D}_n}{\partial t}.$$

К этим уравнениям следует добавить

$$\int \vec{E} d\vec{l} = U. \qquad (19.20)$$

19.3.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ РЕАЛЬНЫХ СРЕД

Так как силовые линии вектора полного тока непрерывны, как непрерывны и силовые линии вектора полного смещения, то на поверхности раздела двух реальных сред нормальные составляющие этих векторов равны

$$j_{1n(n)} = j_{2n(n)}, D_{1n(n)} = D_{2n(n)}. \qquad (19.21)$$

Рассматривая только проводящие свойства реальной среды в переменном поле, на основании (19.12) можно записать, что на поверхности раздела

$$\gamma_1 E_{1n} - \gamma_2 E_{2n} = -\frac{\partial q_s}{\partial t}. \qquad (19.22)$$

Учитывая только диэлектрические свойства реальной среды, запишем связь нормальных составляющих вектора смещения и поверхностной плотности зарядов:

$$D_{1n} - D_{2n} = q_s. \qquad (19.23)$$

Граничные условия (19.22) и (19.23) объединим в одно граничное условие для реальной среды. Продифференцировав по времени условие (19.23) и сложив его с равенством (19.22), получим следующее граничное условие:

$$\left(\gamma_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) E_{1n} = \left(\gamma_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) E_{2n}. \qquad (19.24)$$

На границе раздела несовершенных диэлектриков также справедливо равенство тангенциальных составляющих напряженности ЭП:

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

19.4. РЕАЛЬНЫЕ СРЕДЫ В СИНУСОИДАЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПОЛЕ

19.4.1. КОМПЛЕКСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И КОМПЛЕКСНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Если к реальной среде приложено синусоидальное напряжение, то уравнения для вектора плотности полного тока (19.13) и (19.14), вектора полного смещения (19.18) и уравнение (19.19) можно записать в комплексной форме:

$$\dot{\vec{j}}_n = \dot{\vec{j}} + i\omega\dot{\vec{D}}, \ \operatorname{div}\dot{\vec{j}}_n = 0; \tag{19.25}$$

$$\dot{\vec{D}}_n = \dot{\vec{D}} + \frac{\dot{\vec{j}}}{i\omega}, \ \operatorname{div}\dot{\vec{D}}_n = 0; \tag{19.26}$$

$$\dot{\vec{j}}_n = i\omega\dot{\vec{D}}_n. \tag{19.27}$$

Рассматривая реальную среду как реальный проводник, введем для ее характеристики комплексную проводимость $\tilde{\gamma}$. Для этого будем исходить из уравнения для плотности полного тока (19.26). Заменив в нем плотность тока проводимости по закону Ома в дифференциальной форме, а вектор смещения заменив через вектор напряженности, получим

$$\dot{\vec{j}}_n = \tilde{\gamma}\dot{\vec{E}}, \tag{19.28}$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma + i\omega\varepsilon$.

Комплексная проводимость — это эквивалентный параметр реальной среды, учитывающий как проводящие, так и диэлектрические свойства.

Рассматривая реальную среду как реальный диэлектрик, введем для его характеристики комплексную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\varepsilon}$. В комплексном уравнении для вектора полного смещения (19.26), заменив $\vec{D}$ и $\vec{j}$ через $\vec{E}$, получим

$$\dot{\vec{D}}_n = \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0}\right)\dot{\vec{E}} = \tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}}, \tag{19.29}$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0}. \tag{19.30}$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}$ является функцией частоты, даже если диэлектрическая проницаемость ε диэлектрика не зависит от нее.

Вектор полного смещения $\dot{\vec{D}}_n$ в реальном диэлектрике отстает по фазе от напряженности ЭП $\dot{\vec{E}}$ на угол, определяемый током проводимости. Однако, как известно, вектор смещения может отставать от $\dot{\vec{E}}$ и в идеальном диэлектрике. В этом случае отставание по времени вектора $\dot{\vec{D}}$ от вектора $\dot{\vec{E}}$ происходит из-за того, что диэлектрик поляризуется не мгновенно, т. е. обладает вязкостью. Это свойство диэлектрика зависит от частоты и оценивается мнимой составляющей в выражении диэлектрической проницаемости $-i\varepsilon_2$.

Таким образом, комплексная диэлектрическая проницаемость с учетом тока проводимости и вязкости диэлектрика примет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i\left(\varepsilon_2 + \frac{G}{\omega\varepsilon_0}\right) \tag{19.31}$$

(если диэлектрическая проницаемость зависит от частоты, то векторы $\dot{\vec{D}}$, $\dot{\vec{P}}$, $\dot{\vec{j}}$ также не совпадают по фазе).

Установим связь между комплексной удельной проводимостью $\tilde{\gamma}$ и комплексной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon}$, учитывая уравнения (19.27)–(19.29):

$$\tilde{\gamma} = i\omega\tilde{\varepsilon}. \tag{19.32}$$

Уравнение (19.28) с учетом выражения для комплексной диэлектрической проницаемости (19.32) примет вид

$$\dot{\vec{j}}_n = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}}. \tag{19.33}$$

Из равенства (19.27) следует, что вектор плотности полного тока $\dot{\vec{j}}_n$ опережает по фазе на 90° вектор полного смещения $\dot{\vec{D}}_n$. Вектор $\dot{\vec{j}}_n$ также опережает напряженность ЭП $\dot{\vec{E}}$.

19.4.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ СРЕД ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

Уравнения $\operatorname{div}\dot{\vec{j}}_n = 0$ и $\operatorname{div}\dot{\vec{D}}_n = 0$ означают, что нормальные составляющие вектора плотности полного тока и нормальные составляющие вектора полного смещения на границе двух несовершенных сред не претерпевают разрыва. Поэтому граничные условия на поверхности раздела двух сред для этих векторов следующие:

$$\dot{j}_{1nn} = \dot{j}_{2nn},\ \ \tilde{\gamma}_1\dot{E}_{1n} = \tilde{\gamma}_2\dot{E}_{2n}; \tag{19.34}$$

$$\dot{D}_{1nn} = \dot{D}_{2nn},\ \ \tilde{\varepsilon}_1\dot{E}_{1n} = \tilde{\varepsilon}_2\dot{E}_{2n}. \tag{19.35}$$

19.5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ СРЕД

19.5.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Для однородной изотропной среды при отсутствии свободных и связанных зарядов и сторонних ЭДС уравнения приобретают вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \ \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\ \ \operatorname{div}\vec{E} = 0.$$

Решим эти уравнения относительно вектора напряженности ЭП $\vec{E}$. Учитывая, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \nabla^2\vec{E},\ \ \operatorname{div}\vec{E} = 0,$$

получим

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\gamma \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{19.36}$$

Рассмотрим полученное уравнение для синусоидально изменяющегося ЭМП. В этом случае уравнение (19.36) записывается в комплексной форме:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + (\omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\gamma)\dot{\vec{E}} = 0. \tag{19.37}$$

Уравнение (19.37) может быть представлено в виде

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \omega^2\mu\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}} = 0. \tag{19.38}$$

Уравнение (19.38) справедливо и при комплексной магнитной проницаемости $\tilde{\mu} = \mu_1 - i\mu_2$, позволяющей приближенно учесть потери, обусловленные гистерезисом и вязкостью:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \omega^2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}} = 0.$$

Обозначим $\tilde{\gamma}^2 = -\omega^2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}$ или $\tilde{\gamma} = \alpha + i\beta$, тогда

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} - \tilde{\gamma}^2\dot{\vec{E}} = 0. \tag{19.39}$$

Уравнение (19.39) по форме записи аналогично такому же уравнению для идеальной диэлектрической среды. В отличие от идеального диэлектрика, в реальном диэлектрике постоянная распространения волны $\tilde{\gamma}$ является комплексным числом. Это означает, что в реальном диэлектрике существуют потери, которые вызывают затухание амплитуды волны вдоль направления распространения. Решение уравнения (19.39) для плоской гармонической волны можно представить как сумму прямой и обратной волн:

$$\dot{E} = \dot{A}_1 e^{-\tilde{\gamma}z} + \dot{A}_2 e^{\tilde{\gamma}z}$$

или, с учетом $\tilde{\gamma} = \alpha + i\beta$:

$$\dot{E} = \dot{A}_1 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} + \dot{A}_2 e^{\alpha z} e^{i\beta z}.$$

Реальную среду, в которой распространяются плоские гармонические волны, можно рассматривать и как реальный проводник. При этом постоянную распространения выражают через комплексную проводимость $\tilde{\gamma}$. Для этого в равенство (19.38) вместо комплексной диэлектрической постоянной вводят комплексную удельную проводимость по выражению (19.32), тогда

$$\tilde{\gamma}^2 = i\omega\tilde{\mu}\tilde{\gamma}. \tag{19.40}$$

Волновое сопротивление Z_c в этом случае также носит комплексный характер, но, в отличие от волнового сопротивления идеального проводника, его угол не равен 45°.

19.5.2.
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

П р и м е р 19.3. К плоскому конденсатору, среда внутри которого реальна и неоднородна $\gamma(x)$ и $\varepsilon(x)$, приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin\omega t$. Задана площадь обкладок конденсатора S и расстояние между ними d.

Требуется определить: емкость и проводимость конденсатора в функции частоты; зависимость мгновенного значения напряженности поля от координаты $E(x)$ и мгновенное значение объемного заряда $\rho(x)$.

Р е ш е н и е.

$$\tilde{C} = \frac{\dot{Q}_n}{\dot{U}},$$

где $\dot{Q}_n$ — полный заряд на обкладках конденсатора. Известно, что $\dot{Q}_n = q_{sn}S$. Комплекс вектора полного смещения не зависит от координаты x, поскольку $\operatorname{div}\dot{\vec{D}}_n = 0$ и $\dot{\vec{D}}_n$ — const. Вектор $\dot{\vec{D}}_n$ можно найти из уравнения

$$\dot{U} = \int_0^d \dot{\vec{E}} d\vec{x} = \int_0^d \frac{\dot{\vec{D}}_n}{\tilde{\varepsilon}(x)} d\vec{x} = \dot{D}_n \int_0^d \frac{dx}{\tilde{\varepsilon}(x)}.$$

Отсюда

$$\dot{D}_n = \frac{\dot{U}}{\int_0^d \frac{dx}{\tilde{\varepsilon}(x)}} \quad \text{и} \quad \tilde{C} = \frac{S}{\int_0^d \frac{dx}{\tilde{\varepsilon}(x)}},$$

проводимость

$$\tilde{Y} = i\omega\tilde{C} = \frac{i\omega S}{\int_0^d \frac{dx}{\tilde{\varepsilon}(x)}}.$$

Найдем распределение мгновенного значения $\dot{E}(x)$:

$$\dot{E}(x) = \frac{\dot{D}_n}{\tilde{\varepsilon}(x)} = \frac{\dot{U}}{\tilde{\varepsilon}(x)\int_0^d \frac{dx}{\tilde{\varepsilon}(x)}}.$$

По комплексу $\dot{E}(x)$ определим мгновенное значение $E(x)$. Объемную плотность свободного заряда вычислим по выражению $\operatorname{div}\varepsilon\dot{E} = \dot{\rho}$.

П р и м е р 19.4. К двухслойному плоскому конденсатору подключено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin\omega t$. Известны комплексные диэлектрические проницаемости слоев $\tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\varepsilon}_2$ и все геометрические размеры конденсатора (рис. 19.2).

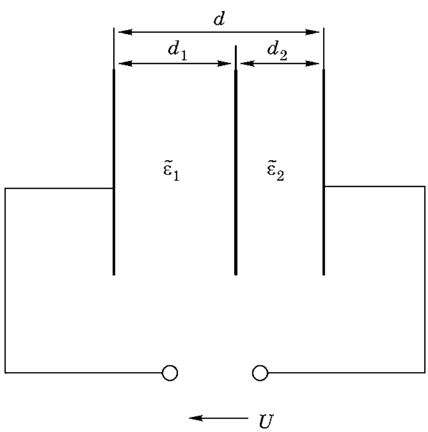


Рис. 19.2
Двухслойный плоский конденсатор

Требуется найти: напряженность ЭП в каждом слое; поверхностную плотность свободного и связанного зарядов на поверхности раздела слоев.

Р е ш е н и е.

Из граничного условия (19.35) следует

$$\dot{D}_{1nn} = \dot{D}_{2nn} = \dot{D}_n = \tilde{\varepsilon}_1\dot{E}_1 = \tilde{\varepsilon}_2\dot{E}_2. \qquad (a)$$

Кроме того,

$$\dot{E}_1 d_1 + \dot{E}_2 d_2 = 0. \qquad (б)$$

Решая совместно (*а*) и (*б*), определим

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{U}\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_1 d_2 + \tilde{\varepsilon}_2 d_1}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\dot{U}\tilde{\varepsilon}_1}{\tilde{\varepsilon}_1 d_2 + \tilde{\varepsilon}_2 d_1}.$$

Поверхностные плотности свободных и связанных зарядов q_s и q_{sc} на границе раздела двух слоев находятся из граничных условий:

$$q_s = \dot{D}_1 - \dot{D}_2 = \varepsilon_1 \dot{E}_1 - \varepsilon_2 \dot{E}_2; \quad q_{sc} = -(\dot{P}_1 - \dot{P}_2) = (\varepsilon_2 - 1)\dot{E}_2 - (\varepsilon_1 - 1)\dot{E}_1.$$

19.6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕАЛЬНЫХ СРЕДАХ

19.6.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В реальных средах при наличии ЭП могут накапливаться и растекаться объемные заряды. Явление «накапливания заряда» особенно выражено на границе раздела реальных сред. Объемная и поверхностная плотности свободных зарядов обычно малы. Однако в высоковольтных кабелях и больших конденсаторах с реальными неоднородными диэлектриками остаточный заряд может быть существенным. Для процессов «накопления» и «растекания» объемного заряда необходимо определенное время, которое зависит от удельной проводимости вещества. При незначительной удельной проводимости это время сравнительно велико, при большей — мало.

В реальных средах переходный процесс (перераспределение зарядов, изменение напряженности ЭП и др.) может быть определен аналогично расчету переходного процесса в линейных электрических цепях. При подключении конденсатора с реальным диэлектриком к напряжению переходные процессы в цепи и в поле существуют одновременно. Однако переходный процесс перераспределения зарядов в реальной среде может протекать более медленно, чем переходный процесс в цепи и процесс установления напряженности ЭП. Конденсатор, заполненный реальным диэлектриком, при подключении его к напряжению через небольшое сопротивление при малой постоянной времени сравнительно быстро заряжается до установившегося напряжения. Тогда как свободные заряды проникают в диэлектрик значительно медленнее. Поэтому за начало переходного процесса перераспределения зарядов в диэлектрике принимают момент времени, когда практически закончится «цепной» переходный процесс, т. е. когда на конденсаторе установится приложенное напряжение и одновременно появится напряженность ЭП. За этот период заряд еще не успеет проникнуть в диэлектрик конденсатора. И напряженность ЭП определяется только диэлектрической проницаемостью ε.

В установившемся режиме, когда распределение зарядов закончилось, напряженность ЭП зависит только от проводящих свойств среды γ.

Установившийся режим в конденсаторе, находящемся под напряжением, характеризуется вектором плотности тока $\vec{j}$ и описывается уравнениями ЭП.

При определении закона изменения напряженности ЭП и вектора смещения за начало переходного процесса принимается момент коммутации. Расчет переходного процесса может быть проведен как классическим, так и операторным методом. В общем случае записываются уравнения Кирхгофа и уравнения ЭП для мгновенных значений, которые затем совместно решаются относительно искомой функции времени с учетом начальных условий.

Начальные условия для переходного процесса вытекают из уравнений ЭП:

$$\operatorname{div}\gamma\vec{E} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},\;\; \operatorname{div}\varepsilon\vec{E} = \rho. \qquad (19.41)$$

Из уравнений (19.41) следует, что при конечных ε и γ среды объемная плотность свободного заряда и напряженность ЭП не могут изменяться скачком. Если бы заряд так менялся, то это привело бы к бесконечно большому току ($i = \partial q/\partial t$), а следовательно, и к бесконечно большой напряженности поля ($\vec{E} = \vec{j}/\gamma$), чего физически не может быть. Ток может меняться скачкообразно, поэтому производная объемного заряда ($\partial\rho/\partial t$) также может меняться скачкообразно. Если до включения конденсатора к напряжению напряженность ЭП и объемный заряд отсутствовали, то в момент коммутации ($t = 0$) $E(0) = 0$, $\rho(0) = 0$, но $\partial\rho/\partial t\big|_{t=0} \neq 0$.

При включении конденсатора к синусоидальному напряжению конденсатор в установившемся режиме периодически перезаряжается и объемный заряд за период не успевает накопиться, поэтому $\rho = 0$ (при $\rho(0) = 0$).

19.6.2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 19.5. Плоский конденсатор с реальным диэлектриком, имеющим γ и ε, подключается к постоянному напряжению U_0 (рис. 19.3). Последовательно с конденсатором соединено сопротивление r. Расстояние между пластинами конденсатора — d, площадь пластин — S. Требуется найти законы установления $E(t)$, $i(t)$ после коммутации.

Решение.

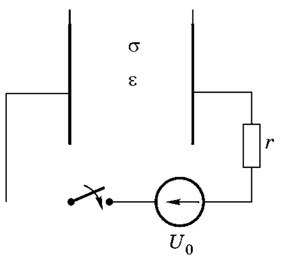


Рис. 19.3
Плоский конденсатор с реальным диэлектриком

Применим классический метод расчета переходного процесса. Составим уравнения Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа

$$i = S\left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = S\left(\gamma E + \varepsilon\frac{dE}{dt}\right). \qquad (а)$$

По второму закону Кирхгофа:

$$U = ir + Ed. \qquad (б)$$

Уравнение (*а*) подставим в уравнение (*б*) и после преобразований получим одно дифференциальное уравнение для E:

$$\frac{dE}{dt}+\frac{rS\gamma+d}{\varepsilon Sr}E=\frac{U_0}{\varepsilon Sr}. \qquad (в)$$

Из характеристического уравнения, составленного по дифференциальному уравнению (c), найдем корень:

$$p=-\frac{d+Sr\gamma}{\varepsilon Sr}.$$

Запишем решение дифференциального уравнения ($в$):

$$E(t) = E' + E'' = E' + Ae^{pt}, \qquad (г)$$

где E' — принужденное значение напряженности после коммутации ($t \to \infty$), E'' — свободная составляющая напряженности ЭП. В момент времени $t \to \infty$ при постоянном напряжении через конденсатор будет протекать ток проводимости $I' = S\gamma E'$. Тогда по второму закону Кирхгофа для установившегося режима

$$U_0 = I'r + E'd = S\gamma E' + E'd,$$

откуда

$$E'=\frac{U_0}{S\gamma r+d}.$$

Подставим E' в уравнение ($г$):

$$E(t)=\frac{U_0}{S\gamma r+d}+Ae^{pt}. \qquad (\partial)$$

Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий. До коммутации конденсатор не был заряжен, а E не делает скачков, следовательно, при $t = 0$, $E = 0$ и из уравнения (∂):

$$A=-\frac{U_0}{S\gamma r+d}.$$

Подставив выражение A в равенство (∂), окончательно получим

$$E(t)=\frac{U_0}{S\gamma r+d}(1-e^{pt}).$$

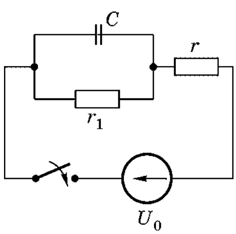


Рис. 19.4
Схема подключения плоского конденсатора с реальным диэлектриком

Закон установления тока $i(t)$ найдем, если решение для $E(t)$ подставим в уравнение (a). После преобразования имеем

$$i(t)=\frac{U_0}{r+\dfrac{d}{S\gamma}}+\left(\frac{U_0}{r}-\frac{U_0}{r+\dfrac{d}{S\gamma}}\right)e^{pt}. \qquad (e)$$

Из равенства (e) видно, что при $t = 0$ ток $i(0) = U_0/r$ ограничивается только внешним сопротивлением (емкость заряжается через сопротивление r). При $t \to \infty$ установившийся постоянный ток протекает по r и r_1 (рис. 19.4):

$$I' = \frac{U_0}{r + r_1}.$$

Конденсатор зарядился до напряжения

$$U_c = Ir_1 = \frac{U_0}{r + r_1} r_1.$$

П р и м е р 19.6. Плоский конденсатор с диэлектриком, обладающим вязкостью $\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon'}{1 + i\omega\tau}$, подключается к постоянному напряжению U_0 через сопротивление r (рис. 19.4).

Требуется найти закон изменения смещения $D(t)$ и закон изменения тока смещения $i_c(t)$.

Р е ш е н и е.

Задачу решим операторным методом. Запишем уравнение Кирхгофа для мгновенных значений:

$$i_c(t) = Sj_c = S\frac{dD}{dt}, \; U_0 = i_c(t)r + Ed = i_c(t)r + \frac{Dd}{\varepsilon(\omega)}.$$

Перейдем к изображению этих уравнений:

$$I_c(p) = SpD(p) - D(0), \; \frac{U_0}{p} = I_c(p)r + \frac{D(p)d}{\varepsilon(p)}.$$

Учитывая, что при $t = 0$, $D(0) = 0$, $\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon'}{1 + p\tau}$, решим полученные уравнения в операторной форме относительно изображения смещения $D(p)$:

$$D(p) = \frac{U_0\varepsilon'}{pd\left[1 + p\left(\tau + \frac{Sr\varepsilon'}{d}\right)\right]}.$$

Приведем это выражение к табличному виду. Для этого разделим числитель и знаменатель на выражение $\tau + \frac{Sr\varepsilon'}{d}$:

$$D(p) = \frac{U_0\varepsilon'}{d} \cdot \frac{\frac{1}{\tau + Sr\varepsilon'/d}}{p\left(p + \frac{1}{r + \frac{Sr\varepsilon'}{d}}\right)}.$$

Переходя к оригиналу, получим закон изменения $D(p)$:

$$D(t) = \frac{U_0\varepsilon'}{d}\left(1 - e^{-t/\tau + \frac{Sr\varepsilon'}{d}}\right).$$

Ток смещения:

$$i_c(t) = S\frac{dD}{dt} = \frac{U_0}{r + \frac{\tau d}{S\varepsilon'}} e^{-t/\tau + \frac{Sr\varepsilon'}{d}}.$$

В заключение данной главы хотелось бы отметить, что расчеты ЭМП в реальных средах получают широкое распространение в различных областях техники. Реальная среда обладает двумя свойствами — диэлектрическими и проводящими. Учет проводящих и диэлектрических свойств среды необходим, например, при проектировании заземлителей, изучении влияния электромагнитных излучений на биологические объекты и др.

Контрольные вопросы

1. Что подразумевается под реальными средами?
2. Каковы материальные параметры реальных сред?
3. В какой степени отличаются результаты расчетов напряженностей ЭМП в реальных средах от идеальных?
4. В каких областях важен учет параметров реальных сред?
5. Как меняется запись уравнений Максвелла при нахождении ЭМП в реальных средах по сравнению с идеальными?

20

ГЛАВА 20

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В ЗЕМЛЕ И В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

20.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТОКОВ В ЗЕМЛЕ

При наличии электрических потенциалов в земле возникают токи проводимости, величина которых зависит от величины электропроводимости γ почвы. Величина проводимости изменяется в зависимости от имеющихся в земле различных пород, наличия водоемов, от состояния погоды. Но в любом случае проводимость почвы всегда значительно меньше, чем металлов. В среднем (для почвы со средней влажностью) можно считать, что напряженность поля в 100 В на метр проводит через почву ток в 1 А на м^2 токопроводящего сечения, так что проводимость такой почвы содержит 10^{-2} Сим/м. В табл. 20.1 [20.1] приведены удельные проводимости веществ, чаще всего встречающихся в почве.

Таблица 20.1

Удельная проводимость веществ, содержащихся в почве

Вещество	Удельная проводимость, Сим/м
Морская вода	100
Пресная вода	10^{-3}
Влажная почва	$10^{-3}/10^{-2}$
Сухая почва	10^{-2}
Кварцит, известняк, песчаный камень, гранит	10^{-9}
Лептит, шифер	10^{-7}
Диабаз	10^{-6}
Железный блеск и шпатовый железняк	10^{-6}
Магнитный железняк	1–100
Шифер, пропитанный железным колчеданом	10–50
Свинцовый блеск	100
Медный колчедан	1000
Серный колчедан	1000

Токи в земле бывают как естественного происхождения, так и появляются из-за технических установок. Первые связаны с колебаниями МП Земли, которое индуктирует в проводящих земляных массах вихревые токи. Такие токи приводят к тепловым потокам и способствуют большой разнице температур в отдельных слоях почвы. Они, как правило, незначительны по величине.

А вот токи технических установок могут достигать значительной величины. Землей пользуются как носителем электрических рабочих токов уже с самых первых начинаний электротехники. Постройка телеграфов на земле и трансатлантических телеграфов основывалась на убеждении, что для передачи сигналов от места передачи к приемнику требовался только один металлический провод, в то время как земля должна служить обратным проводом. Конструкция предохранительных громоотводных установок использует также электропроводимость земли, чтобы держать на известном расстоянии от строений атмосферное электричество. При первых применениях речь всегда шла об относительно слабых или кратковременных токах в земле, так что не уделялось внимания явлениям, с ними связанным.

Положение изменилось, когда перешли к постройке мощных ЛЭП с токами высокого напряжения. Существенная величина токов, подлежащих передаче, являлась препятствием к использованию земли вместо линейного провода. В высоковольтных ЛЭП при передаче электроэнергии использовались специальные нейтральные провода. В этих условиях уровень токов в земле снизился. Между тем в эксплуатации неизбежны повреждения в установках, соприкосновение с землей одного из проводов, находящегося под напряжением. Возможны утечки через место повреждения значительных токов. А они в современных силовых установках с заземлением нулевой точки могут достигать огромных размеров. Следует учесть влияние на величину токов в земле электрифицированных железных дорог, в которых тяговый ток отводится обратно по рельсам и также частично попадает в землю. Особенно большие токи возникают при коротких замыканиях в электроустройствах.

Общая передача того и другого рода токов в той же среде влечет за собой встречные взаимные влияния. В особенности следует опасаться влияний на слаботочные линии полей в земле, созданных близко расположенными силовыми линиями. Для того чтобы с ними успешно бороться, надо хорошо знать законы этого влияния.

Опыт показал, что заземление в силовых установках может привести к серьезным повреждениям и в самой установке. Вблизи места заземления образуются высокие напряжения в земле, которые могут угрожать жизни людей и животных. Мощность, передаваемая к месту заземления, образует громадное количество тепла, приводит к изменению влажности почвы и электродинамических свойств места заземления.

Все отмеченное приводит к необходимости расчета электрического и магнитного полей от токов в земле.

Земля как электрический проводник используется в особенности в беспроволочной телеграфии. Здесь различают две зоны: дальнюю и ближнюю.

В дальней зоне (волновой) электромагнитные волны распространяются одновременно с волнами тока в земле. Эти токи незначительны, а потому мало влияют на силовую электроэнергетику и не представляют угрозы для жизни людей.

В ближней зоне, наоборот, токи в земле могут быть значительными, поэтому важно, чтобы они не распространялись по поверхности земли на большие расстояния, а направлялись в глубину с помощью специальных заземлителей. Правильное их выполнение имеет решающее значение для электроэнергии, распространяющейся в земле.

20.2. ЗАЗЕМЛИТЕЛИ. ПОТЕНЦИАЛ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Электрические цепи, источники энергии, приемники энергии, как правило, заземляют, чтобы обеспечить безопасность персонала. Так, например, при соединении в звезду обмоток высокого напряжения трехфазного трансформатора, питающего ЛЭП, заземляют непосредственно или через некоторое сопротивление нейтральную точку трансформатора (рис. 20.1).

Этим достигается то, что напряжения проводов линии по отношению к земле при нормальном режиме не могут быть больше фазных напряжений.

При повреждении изоляции одного из фазных проводов возникает ток короткого замыкания, проходящий от места повреждения через землю и заземлитель к нейтральной точке трансформатора. Электрический ток, проходя через землю, встречает некоторое сопротивление, называемое сопротивлением заземления. По существу, это сопротивление земли, которое встречает ток при растекании от заземлителя. Вдоль поверхности земли создается падение напряжения, которое вблизи от мест заземления может достигать опасных для жизни человека значений уже на длине шага. Поэтому важно уметь вычислить сопротивление растеканию тока в земле при различных конструкциях заземлителей.

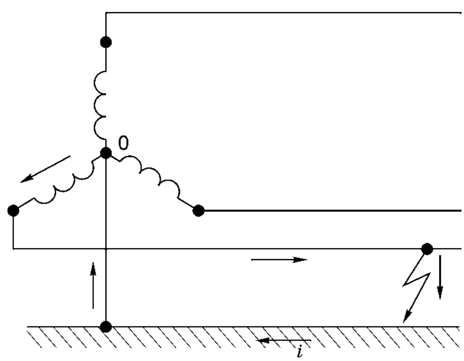


Рис. 20.1
Заземление нулевой точки трансформатора

В приведенном примере (рис. 20.1) в земле протекает переменный ток. Распределение переменного тока в проводящей среде в принципе должно отличаться от распределения постоянного тока, так как при переменном токе в контурах, которые можно себе представить в проводящей среде, возникают индуктированные ЭДС, оказывающие влияние на распределение тока. Однако ввиду большого удельного сопротивления земли при вычислении токов вблизи электродов можно пренебречь, во всяком случае при промышленной частоте, индуктированными ЭДС по сравнению с активным падением напряжения. В этом случае нужно вести расчет, как при постоянном токе.

Заземлитель — металлический проводник конечной длины, служащий для отвода тока в землю. Ток подводится посредством провода, присоединенного к заземлителю. Переход тока в землю происходит по поверхности заземлителя, вплотную прилегающей к земле. Все лежащие в земле голые части питающего провода образуют часть заземлителя.

Проводимость материала заземлителя очень велика по сравнению с проводимостью окружающей земли, а поэтому можно считать ее бесконечно большой.

На поверхности заземлителя устанавливается равный потенциал:

$$\varphi = \varphi_0 — \text{const}. \tag{20.1}$$

Мощность заземлителя определяется в виде

$$P = \varphi_0 I. \tag{20.2}$$

Отношение потенциала заземлителя к току заземлителя называется сопротивлением распространению заземлителя:

$$R = \frac{\varphi_0}{I}, \tag{20.3}$$

его обратная величина будет проводимостью распространения:

$$G = \frac{I}{\varphi_0}. \tag{20.3a}$$

Если рассматривать заземлитель как постороннее тело относительно земли, то он действует как источник тока. Последний с плотностью

$$i = -\gamma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tag{20.4}$$

распределен по поверхности заземлителя, соприкасающейся с землей:

$$I = \int\limits_S i\,ds, \tag{20.5}$$

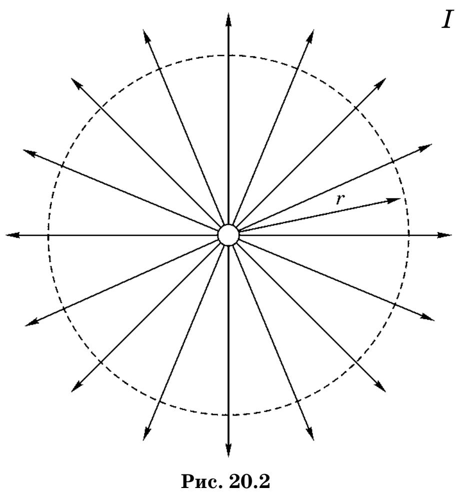


Рис. 20.2
Линии тока точечного источника

где ds — элемент поверхности S заземлителя.

Линейность уравнения (20.5) позволяет составить общее поле из частичных потенциалов элементарных «точечных источников»:

$$dI = i\,ds. \tag{20.5a}$$

Потенциал точечного источника определяется в бесконечно распространенной во все стороны однородной земле. Вследствие закона симметрии (рис. 20.2) все линии тока выходят равномерно и радиально из центра потока; уравнение непрерывности для плотности тока di на расстоянии r от источника дает соотношение

$$di \cdot 4\pi r^2 = dI, \quad di = \frac{dI}{4\pi r^2}. \tag{20.6}$$

Интегрируя вдоль линии тока, находим потенциал

$$d\varphi = -\int_{\infty}^{r} \frac{di}{\gamma} \cdot dr = \frac{dI}{4\pi\gamma \cdot \frac{1}{r}}. \tag{20.7}$$

Теперь, суммируя по всем точкам, получаем потенциал заземлителя в бесконечно распространенной во все стороны однородной земле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\gamma} \cdot \int_{S} \frac{ids}{r}. \tag{20.7а}$$

Поле заземлителя было бы определено уравнением (20.7*а*), и наша задача была разрешена, если бы распределение источников тока было заранее известно. Но это бывает лишь в редких случаях. Чаще же это распределение выводится из потенциального поля согласно (20.4). Однако уравнение (20.7*а*) дает основной вывод для всех точек, расстояние r до которых велико. Учитывая (20.5), с минимальной погрешностью находим независимо от вида поверхности для всех входящих в (20.7*а*) источников

$$\lim_{r \to \infty} \varphi = \frac{1}{4\pi\gamma} \cdot \frac{1}{r} \cdot \int_{S} ids = \frac{I}{4\pi\gamma} \cdot \frac{1}{r}. \tag{20.7б}$$

Таким образом, поле любого заземлителя в распространенной во все стороны однородной земле приближается, как это вытекает из сравнения (20.7) и (20.7*б*), с возрастанием расстояния к полю точечного источника тока заземлителя.

20.3.
ВЛИЯНИЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Все технически выполнимые заземлители устраиваются на поверхности земли либо в непосредственной близости к ней на такой глубине, которая по сравнению с радиусом земного шара бесконечно мала. Земля поэтому заменяется бесконечным полупространством, а ее поверхность — плоскостью. Холмы, долины и строения во внимание не принимаются; при надобности они могут быть приняты в расчет в виде неоднородности земной поверхности. Неравномерности в проводимости, возникающие из-за находящихся на земле растений и животных, во внимание также не принимаются.

Естественная проводимость воздуха (через ионы) весьма незначительна по сравнению с проводимостью земли; она принимается за нуль, и, таким образом, воздух считается изолятором. При рассмотрении в качестве условия

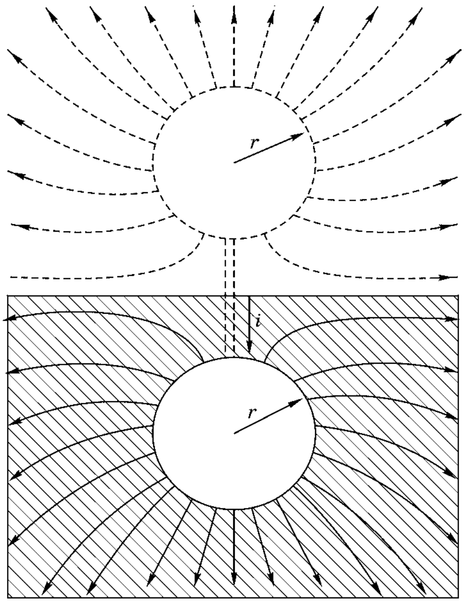


Рис. 20.3
К выводу электрического эквивалентного отображения источника тока, находящегося в земле

на границе двух сред вдоль земной поверхности возникает следующее положение: нормальная составляющая напряженности поля вдоль поверхности земли должна быть равна нулю. Если отсюда становится известным решение потенциального уравнения стационарного поля, то соответствующий ток представляет собой возможную систему электрического проводника в земле.

Применим это положение сначала в отношении потенциала точечного источника, о чем говорилось выше. Как показано на рис. 20.3, каждая плоскость, проходящая параллельно земле, обладает вышеуказанным свойством. При этом соответствующие потенциалы создаются стационарными потоками, имеющими источники, которые находятся на земной поверхности.

На рисунке видно, что источник, находящийся на глубине t, не выполняет вначале указанного условия на земной поверхности. Между тем легко получить поток, который удовлетворял бы этому требованию, если предположить, что мы продлим радиальную координату кверху от земной поверхности и в ней поместим второй (воображаемый) источник такой же величины и такого же знака на высоте:

$$h = t. \tag{20.8}$$

В результирующем поле двух источников получается (по рис. 20.3) для линий тока плоскость симметрии. Этим способом все задачи, связанные с заземлением, приводятся к расчету поля тока в бесконечно распространенной во все стороны почве. Так как только линии тока, проходящие в нижней части полупространства, можно рассматривать действительными, то к симметрично дополненному заземлителю следует подвести двойной ток действительного заземлителя:

$$\vec{I} = 2I. \tag{20.9}$$

Выражение (20.7*б*) для поля в значительном удалении от заземлителя мы получаем теперь, принимая во внимание равенство (20.9), т. е. наличие поверхности земли, в следующем виде:

$$\lim_{\vec{r}\to\infty} \varphi = \frac{\vec{I}}{4\pi\gamma}\cdot\frac{1}{r} = \frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{1}{\vec{r}}. \tag{20.7в}$$

Метод зеркального отображения, который рассматривался здесь для однородной земли, может быть распространен и на неоднородную землю. Следует только рассматривать неоднородность граничной поверхности на основании уравнения (20.4) в смысле присутствия в однородной земле источника тока. Такие неоднородности можно правильно учесть непосредственно методом зеркального отображения, если в воображаемой земле поверх земной поверхности поместить отражение таких же неоднородностей.

20.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ВДОЛЬ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Значение потенциала вдоль поверхности земли может быть получено на основании рассуждений п. 20.3 из расчета поля бесконечно распространенной во все стороны земли. Этот потенциал определяет собой физиологическое действие поля на людей и животных, которые находятся на поверхности земли.

Функция, определяющая потенциал φ для совокупности точек, лежащих на поверхности вблизи заземлителя, называется кратером напряжения. Потенциал заземлителя как величина, характеризующая кратер напряжения, называется контактным напряжением. Определенная разность потенциала (рис. 20.4) между ногами живого существа в направлении поля называется напряжением шага. Это напряжение образуется в зависимости от сопротивления тока в теле от ноги к ноге. Ток заземлителя, при котором ток в теле при неблагоприятных условиях достигает опасного для жизни значения, называется опасным током заземлителя. Если превысить его значение, то появится опасность для жизни в пределах определенной зоны вокруг заземлителя. Опасный ток и опасная зона являются физиологическими характеристиками поля земной поверхности наряду с физическими характерными величинами заземлителя.

Для числового определения физиологических характеристик необходима экспериментальная оценка величины опасного тока и сопротивления тела. Так как на разных людей ток действует по-разному, то приходится ограничиваться грубой оценкой, которая дает по возможности самый низкий предел опасного тока в теле. Как опасный для жизни рассматривают ток

$$i = 50 \text{ мА}. \qquad (20.10)$$

Сопротивление тела индивидуально у каждого человека, оно зависит от многих условий. Поэтому следует считаться с неблагоприятным случаем бесконечно малого сопротивления внутри тела; так что сопротивление тела приравнивается к сумме сопротивлений распространению «заземлителя»,

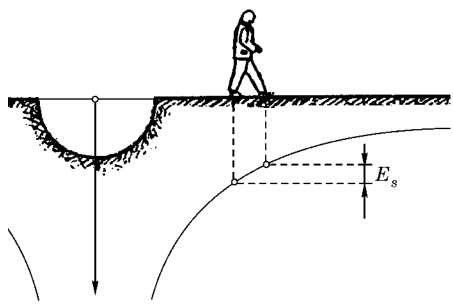


Рис. 20.4
Определение кратера напряжения и напряжения шага

следовательно, оно часто равно сопротивлению распространения для ног. Такое сопротивление распространению одной ноги можно задать в виде

$$R=\frac{1}{4\gamma}\cdot\frac{1}{0{,}5d}, \tag{20.11}$$

где d представляет средний диаметр подошвы. Для ноги человека находят при $d\cong 0{,}2$ м в средней почве ($\gamma = 10^{-2}$ Сим/м) величину

$$R=\frac{10^4}{4\cdot 10}=250 \text{ Ом}.$$

Таким образом, человек, который касается земли двумя ногами, обладает в среднем общим сопротивлением $2R = 500$ Ом.

20.5. ИЗОБРАЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ТОКА В ЗЕМЛЕ В ВИДЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Сравним поле стационарного ЭП в среде с проводимостью γ с ЭСП в изоляторе с диэлектрическим коэффициентом ε. В изоляторе напряженность поля E производит диэлектрическое смещение:

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}. \tag{20.12}$$

Линии смещения могут возникать и исчезать лишь в местах накопления электрического заряда. В изоляторе также действует закон непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{D}=0. \tag{20.13}$$

Провод, введенный в поле, прерывает его. При этом у изолятора на поверхности раздела накапливается заряд плотностью

$$\sigma=\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=-\varepsilon\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \tag{20.14}$$

Общий заряд провода будет

$$Q=\int\sigma ds. \tag{20.15}$$

Уравнения (20.12–20.15) одинаковы с (20.3), (20.4), (20.15), если заменим ε на γ, $\vec{D}$ на i, Q на I.

После замены источников тока I источниками заряда Q, линий тока i индукционными линиями $\vec{D}$, проводимостей γ диэлектрическим коэффициентом ε, потенциальное поле стационарного электрического тока станет ЭСП такого же распределения.

Изобразим при помощи метода зеркального отображения в безгранично распространенном во все стороны диэлектрике над местом заземлителя тело такого же вида, но с бесконечно большим диэлектрическим коэффициентом. В этом теле, эквивалентном проводнику, поле согласно формуле (20.12) должно исчезнуть. Отношение симметрично дополняющего заряда $\bar{Q}$ к потенциалу φ_0 дает емкость по отношению к бесконечно большой оболочке шара:

$$C=\frac{\bar{Q}}{\varphi_0}. \tag{20.16}$$

Принимая во внимание (20.3) и (20.12), получаем по (20.13*а*) и (20.16)

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma}. \tag{20.17}$$

На основании отношения (20.17) величину проводимости распространения заземлителя обозначают еще как его емкостное сопротивление. Отсюда видно, как соотносятся между собой величины проводимости распространения и сопротивления распространения из емкости. Появляется простой метод получения экспериментальным путем постоянных заземлителя из измерения емкостей.

20.6. ПРОСТЫЕ ЗАЗЕМЛИТЕЛИ В ОДНОРОДНОЙ ПОЧВЕ

П р и м е р 20.1. **Заземлитель в виде полушария.** Во многих случаях заземлитель имеет вид, близкий к полушарию радиусом r_0, которое находится непосредственно на поверхности земли, согласно рис. 20.5. Метод зеркального отображения дает в качестве эквивалентной системы заземлитель в виде шара, находящегося в бесконечно распространенной во все стороны почве, к которому подведен ток I.

В поле точечного источника находятся поверхности постоянных потенциалов — поверхности шаров, расположенных вокруг источника как центра. На каждой из этих поверхностей выполнены граничные условия; они должны быть идентичны с земной поверхностью. Потенциал

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \frac{1}{r} \tag{20.18}$$

представляет поле заземлителя, имеющего вид полушария. В частности, потенциал заземлителя ($r = r_0$) будет

$$\varphi_0 = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \frac{1}{r_0}. \tag{20.19}$$

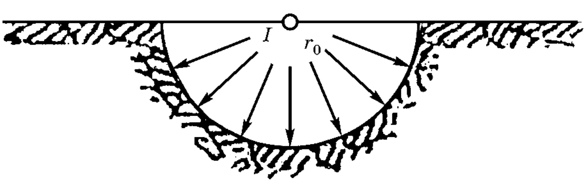
Мощность заземлителя при этом составляет

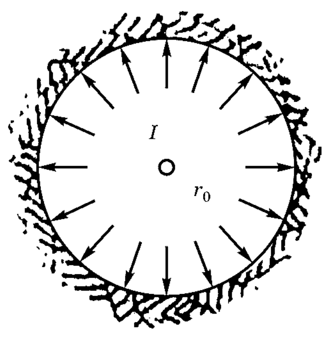
$$P = \varphi_0 \cdot I = \frac{I^2}{2\pi\gamma} \cdot \frac{1}{r_0}; \tag{20.20}$$

сопротивление распространению:

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma r_0}. \tag{20.21}$$

Рис. 20.5
Заземлитель в виде полушария
и его электрическое зеркальное отображение





При сравнении последней формулы с известным выражением сопротивления проводов находим, что обе величины пропорциональны обратной величине проводимости, а следовательно, удельному сопротивлению материалов. Но в то время как сопротивление провода данной длины обратно пропорционально токопроводящему сечению, сопротивление распространению заземлителя уменьшается только с линейными размерами. Поэтому для уменьшения сопротивления распространению необходимо значительное увеличение поверхности заземлителя. Например, для заземлителя радиусом $r_0 = 1{,}5$ м в средней почве ($\gamma = 10^{-2}$ Сим/м) имеем

$$R = \frac{10^4}{2\pi \cdot 150} \approx 10 \text{ Ом}.$$

Кратер напряжения заземлителя формы полушария приводится в (20.18). Если s — величина шага человека, то мы получим напряжение шага в виде

$$E_s = \varphi_{r-0,5s} - \varphi_{r+0,5s} = \frac{I}{2\pi\gamma}\left[\frac{1}{r-0{,}5s} - \frac{1}{r+0{,}5s}\right] = \frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{s}{r^2 - 0{,}25s^2}. \quad (20.22)$$

Напряжение шага принимает наибольшую величину для $r = r_0 + 0{,}5s$ непосредственно у электрода:

$$E_{s\max} = \frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{s}{r_0^2 + sr_0}. \quad (20.22a)$$

С увеличением расстояния от заземлителя оно приближается к произведению напряженности поля на длину шага:

$$\lim_{r\to\infty} E_s = s \cdot E = \frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{s}{r^2}, \quad (20.22б)$$

следовательно, при удалении быстро убывает.

Для подсчета тока, проходящего через тело человека, необходимо предположить самый опасный случай, когда человек касается земли только одной ногой. В этом случае сопротивление распространению для ноги исчезает и сопротивление тела падает до значения по (20.11). Тогда получают ток в теле

$$i_{\max} = \frac{E_{s\max}}{r} = \frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{s}{r_0^2 + sr_0}\cdot 4\gamma\cdot 0{,}5d = I\cdot\frac{1}{\pi\cdot\dfrac{sd}{r_0^2 + sr_0}} \quad (20.23)$$

независимо от проводимости почвы. То же самое действительно и для тока, который находится при помощи уравнений (20.10) и (20.23):

$$I_з \cdot \frac{1}{\pi}\cdot\frac{sd}{r_0^2 + sr_0} = 0{,}05;$$

$$I_з = \frac{\pi}{20}\cdot\frac{r_0^2 + sr_0}{sd} \text{ А}.$$

При $s = 1{,}0$ м и $d = 0{,}2$ м для указанного выше заземлителя получается

$$I_з = \frac{\pi}{20}\cdot\frac{150^2 + 100\cdot 150}{100\cdot 20} = 2{,}96 \text{ А}.$$

Для определения зоны опасности при более сильных токах мы пользуемся приближенным значением напряжения шага. Если принять во внимание, что сопротивление тела составляется из сопротивлений распространению для обеих ног, то получим ток в теле:

$$i = \frac{E_s}{2r} = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \frac{s}{r^2} \cdot 4\gamma d = I \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{sd}{r^2}. \tag{20.24}$$

Зоной опасности будет, следовательно, круг, описанный из центра заземлителя, радиус которого определяется уравнением в виде

$$r_З = \sqrt{\frac{40}{\pi} \cdot I \cdot sd} \text{ м}, \tag{20.24а}$$

поверхность которого будет

$$F_З = \pi r_З^2 = 40 I \cdot sd \text{ м}^2. \tag{20.24б}$$

Например, для $I = 200$ А с вышеупомянутыми числовыми величинами

$$r_З = \sqrt{\frac{40}{\pi} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 20} = 22{,}6 \text{ м},$$

на заземлителе появляется контактное напряжение

$$\varphi_0 = 100 \cdot 10{,}6 = 1060 \text{ В}.$$

20.7. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК РАЗНЫХ ВИДОВ ЗАЗЕМЛИТЕЛЕЙ

П р и м е р 20.2. **Заземлитель в виде шара**. Емкость уединенного шара радиуса r равна

$$C = 4\pi\varepsilon r. \tag{20.25}$$

Проводимость заземления в случае шарового электрода, погруженного в землю настолько, чтобы пренебречь влиянием поверхности земли (рис. 20.6*а*), равняется

$$G = \frac{1}{R} = 4\pi\gamma r, \tag{20.26}$$

где R — сопротивление заземления.

Если электрод расположен близко от поверхности земли, то линии тока искажаются (рис. 20.6*б*). В этом случае можно воспользоваться методом зеркальных отображений. Линии тока у поверхности земли должны быть к ней параллельны. Это условие удовлетворяется, если мысленно заполнить воздушное пространство над поверхностью земли проводящей средой с такой же, как у земли, удельной проводимостью и поместить в эту среду электрод, являющийся зеркальным отображением действительного электрода относительно поверхности земли. Ток, выходящий из мнимого электрода, должен быть равен по величине и по знаку току, входящему из действительного

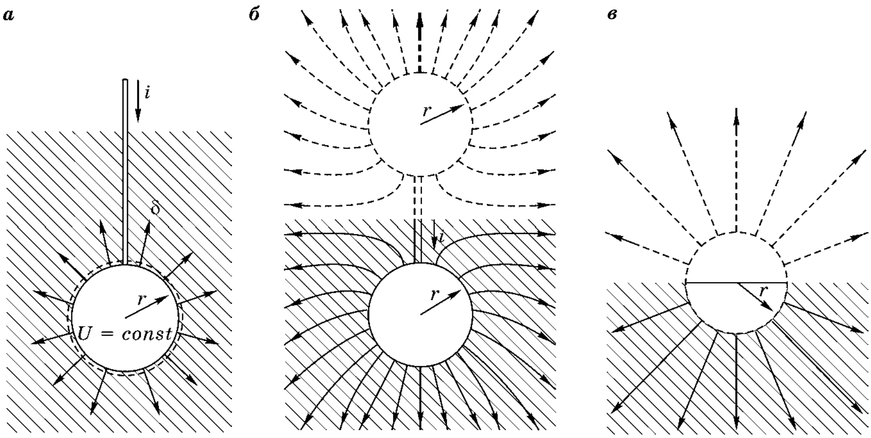


Рис. 20.6
Виды электрических заземлителей

электрода в землю. Проводимость заземления для действительного электрода, очевидно, равна половине проводимости системы, образованной электродом и его зеркальным отображением. Так, например, проводимость в случае электрода в форме полушария, расположенного у поверхности земли так, как показано на рис. 20.6*в*, равна

$$G = \frac{1}{R} = 2\pi\gamma r. \tag{20.27}$$

П р и м е р 20.3. **Цилиндрический заземлитель.** Часто применяют заземлители в виде труб, забитых вертикально в землю (рис. 20.7). Пусть l — длина трубы, r — радиус трубы. Предположим, что один конец трубы находится у самой поверхности земли. Длина трубы вместе с ее зеркальным отображением равна $2l$. Емкость цилиндра, имеющего длину $2l$ и радиус r при $2l \gg r$, приближенно равна

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon 2l}{\ln\frac{2l}{r}}. \tag{20.28}$$

Следовательно, проводимость для системы из электрода и его зеркального отображения равна

$$G \approx \frac{4\pi\gamma l}{\ln\frac{2l}{r}}, \tag{20.29}$$

а проводимость заземления для электрода в форме вертикальной трубы:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{2l}{r}}. \tag{20.30}$$

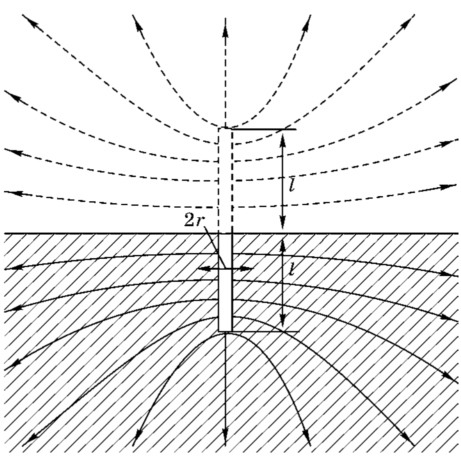


Рис. 20.7
Заземлитель в виде трубы

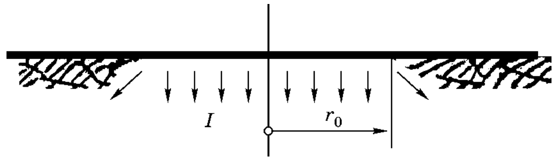


Рис. 20.8
Устройство заземлителя в виде круглой пластины

П р и м е р 20.4. **Круглый пластинчатый заземлитель.** Так как выполнение заземлителя в виде полушария затруднено, то его можно заменить пластиной.

Рассмотрим заземление в виде круглой пластины с радиусом r_0, лежащей на поверхности земли, как это показано на рис. 20.8. В смысле образования поля заземление в виде круглой пластины может считаться предельным случаем сплюснутого эллипсоида вращения.

Применим криволинейные ортогональные координаты к симметричному полю. Пусть ось симметрии будет направлена по оси z прямоугольной системы координат, плоскость xz которой совпадает с меридианной плоскостью $\psi = 0$. Выбираем ψ в качестве третьей координаты криволинейной системы координат; тогда получим

$$x = r \cdot \cos\psi;\ y = r \cdot \sin\psi;\ z = z(u, v) \tag{20.31}$$

и

$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2} = r. \tag{20.32}$$

В прямоугольной системе координаты z, r меридианной плоскости будут

$$z = z(u, v);\ r = r(u, v), \tag{20.31a}$$

следовательно,

$$U = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2};\ V = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2}. \tag{20.33}$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(r \cdot \frac{V}{U} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(r \cdot \frac{U}{V} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0. \tag{20.34}$$

Эллиптические координаты поля в виде сплюснутого эллипсоида вращения определяются посредством конфокальных эллипсов $u = \text{const}$ эксцентриситета l':

$$\frac{r^2}{u^2} + \frac{z^2}{u^2 - l'^2} = 1, \tag{20.35}$$

и конфокальных гипербол $v = \text{const}$:

$$\frac{r^2}{v^2} - \frac{z^2}{l'^2 - v^2} = 1. \tag{20.36}$$

Поэтому

$$r = \frac{uv}{l'};\ z = \frac{\sqrt{u^2 - l'^2} \cdot \sqrt{l'^2 - v^2}}{l'}, \tag{20.37}$$

следовательно, по (20.33)

$$U = \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - l'^2}}; \quad V = \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{l'^2 - v^2}}. \tag{20.33а}$$

Эллипсоиды u = const для выполнения граничных условий должны быть потенциальными поверхностями уровней, так что гиперболоиды v = const представляют собой поверхности тока; при этом (20.34) вместе с (20.37) и (20.33$а$) приводятся к общему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{uv}{l'} \cdot \sqrt{\frac{u^2 - l'^2}{l'^2 - v^2}} \cdot \frac{d\varphi}{du}\right] = 0. \tag{20.38}$$

Исчезающий в бесконечности интеграл этого уравнения вследствие того, что v рассматривается как постоянная величина A, будет

$$\varphi = A \cdot \arcsin\frac{l'}{u}, \tag{20.39}$$

где A — произвольная постоянная интегрирования. Поверхность круглой пластины по (20.37) вследствие $l' = r_0$ и $z = 0$ задана уравнением:

$$u_0 = l' = r_0, \tag{20.37а}$$

причем из (20.39) вытекает потенциал заземлителя:

$$\varphi_0 = A \cdot \arcsin\frac{r_0}{u_0} = A \cdot \arcsin 1 = A \cdot 0{,}5\pi; \;\; A = (2/\pi)\varphi_0. \tag{20.39а}$$

Для поля тока получается выражение

$$\varphi = (2/\pi) \cdot \varphi_0 \arcsin\frac{r_0}{u}. \tag{20.39б}$$

Следовательно,

$$\lim_{u\to\infty} \varphi = (2/\pi) \cdot \varphi_0 \cdot \frac{r_0}{u} = (2/\pi)\varphi_0 \cdot \frac{r_0}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \tag{20.39в}$$

Выражение (20.39$в$) должно равняться величине (20.7$в$), откуда получается ток заземлителя

$$I = 2\pi\gamma \cdot r_0 \cdot (2/\pi) \cdot \varphi_0 = 4\gamma r_0 \cdot \varphi_0. \tag{20.40}$$

Сопротивление распространению для круглой пластины заземлителя равно

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{4\gamma r_0}. \tag{20.41}$$

Оно в $(\pi/2)$ раза больше, чем сопротивление заземлителя в виде полушария с таким же радиусом. Например, заземлитель в виде круглой пластины с радиусом $r_0 = 1{,}5$ м в средней почве имеет сопротивление распространению

$$R = \frac{10^2}{4 \cdot 1{,}50} = 16{,}7 \text{ Ом}.$$

Если подставить в (20.39*б*) вместо потенциала заземлителя (20.40), то

$$\varphi=\frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{1}{r_0}\arcsin\frac{r_0}{u}. \qquad (20.42)$$

Используя (20.37) при $z = 0$, $v = l$, $u = r$, получаем кратер напряжения шага круглого пластинчатого заземлителя при $s = r_0$ в виде

$$\varphi=\frac{I}{2\pi\gamma}\cdot\frac{1}{r_0}\arcsin\frac{r_0}{r}. \qquad (20.42a)$$

При $s \neq r_0$ величины напряжения шага надо умножить на отношение s/r_0 и напряжение шага:

$$\begin{aligned}E_s&=\varphi_{r-0,5s}-\varphi_{r+0,5s}=\frac{I}{2\pi\gamma r_0}\left(\arcsin\frac{r_0}{r-0,5s}-\arcsin\frac{r_0}{r+0,5s}\right)=\\&=\frac{I}{2\pi\gamma r_0}\arcsin\left(\frac{r_0}{r^2-0,25s^2}\left[\sqrt{(r+0,5s)^2-r_0^2}-\sqrt{(r-0,5s)^2-r_0^2}\right]\right)\cong\\&\cong\frac{I}{2\pi\gamma r_0}\arcsin\frac{r_0}{r^2-0,25s^2}\cdot\frac{r^2}{\sqrt{r^2+0,25s^2-r_0^2}}.\end{aligned} \qquad (20.43)$$

В последнем преобразовании корни разложены в ряды. Наибольшее напряжение шага получается в непосредственной близости у заземлителя ($r = r_0 + 0,5s$):

$$E_{s\max}=\frac{I}{2\pi\gamma r_0}\cdot\left[0,5\pi-\arcsin\frac{r_0}{r_0+s}\right]=\frac{I}{2\pi\gamma r_0}\arccos\frac{r_0}{r_0+s}, \qquad (20.43a)$$

так что ток вычисляется аналогично (20.23), (20.23*а*):

$$I_з\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{d}{r_0}\cdot\arccos\frac{r_0}{r_0+s}=\frac{1}{20};$$

$$I_з=\frac{\pi}{20}\cdot\frac{r_0}{d}\cdot\frac{1}{\arccos\frac{r_0}{r_0+s}}. \qquad (20.43б)$$

Если используем употреблявшиеся в параграфе 20.6 значения, то получим

$$I_з=\frac{\pi}{20}\cdot\frac{1,50}{0,20}\cdot\frac{1}{\arccos\frac{1,50}{1,50+1,00}}=1,26\ \text{А}.$$

Находиться непосредственно у заземлителя в виде круглой пластины опасно для жизни, поэтому такой заземлитель следует нагружать гораздо слабее, чем если бы он имел форму полушария. Это находится в зависимости от свойства поля на поверхности земли — расти при приближении к острым краям диска ($r \to r_0$) выше всех пределов соответственно уравнению

$$E_u=-\frac{1}{U}\cdot\frac{d\varphi}{du}=-\sqrt{\frac{u^2-l'^2}{u^2-v^2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\varphi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{u^2}}}\left(-\frac{r_0}{u^2}\right)=\frac{I}{2\pi\gamma r}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-r_0^2}}, \qquad (20.43в)$$

однако опасное действие остриев быстро исчезает с возрастанием расстояния от заземлителя. В действительности, в соответствии с (20.22*б*) аналитическое выражение напряжения шага в том же пределе по (20.43) и (20.43*в*) будет

$$\lim_{r\to\infty} E_s = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \frac{s}{r^2}, \qquad (20.43г)$$

т. е. круглый пластинчатый заземлитель имеет при одинаковом токе заземления такую же опасную зону, как и заземлитель в виде полушария.

В (20.43*г*) радиус заземлителя r_0 отсутствует. Поэтому выражение (20.43*г*) обобщает (20.7*в*) и с большим или меньшим приближением может быть использовано для всех заземлителей.

В качестве заземлителей описанного здесь вида могут рассматриваться, с некоторым приближением, подошвы людей или животных. Если заменить поверхности подошв кругом радиуса $r_0 = 0{,}5d$, где d обозначает средней диаметр подошвы, то из уравнения (20.41*а*) получается сопротивление распространению:

$$R = \frac{1}{4\gamma} \cdot \frac{1}{0{,}5d}. \qquad (20.44)$$

Это и есть величина, используемая в уравнении (20.11). При ее применении необходимо, конечно, обращать внимание на отклонение действительных величин от допущенных при расчете; это практически достигается подходящим выбором среднего значения диаметра подошвы.

П р и м е р 20.5. **Трубчатые заземлители.** Такого рода заземлители получаются при вертикальном вколачивании в землю сравнительно тонкой трубки. Иногда предпочитают в качестве заземлителей земляные бурава из-за более удобного вколачивания.

Для определения поля тока трубчатого заземлителя необходимо заменить его простым способом при помощи метода зеркального отображения растянутым эллипсоидом вращения, малая ось которого равна радиусу трубки r_0, а эксцентриситет — длине трубки $l \gg r_0$. Поле здесь представляется посредством криволинейных ортогональных координат вытянутого эллипсоида вращения, которые определяются в каждой меридиальной плоскости при помощи эллипсов u — const:

$$\frac{z^2}{u^2} + \frac{r^2}{u^2 - l^2} = 1, \qquad (20.45)$$

и конфокальных гипербол v — const:

$$\frac{z^2}{v^2} - \frac{r^2}{l^2 - v^2} = 1. \qquad (20.46)$$

Можно использовать ранее полученные выражения (20.37), (20.37*а*) для сплюснутого эллипсоида вращения. Они остаются теми же и для вытянутого эллипсоида вращения с той лишь разницей, что в (20.45) и в (20.46) необходимо заменить координату r на координату z. Тогда

$$r = \frac{\sqrt{u^2 - l^2} \cdot \sqrt{l^2 - v^2}}{l}; \quad z = \frac{u \cdot v}{l}. \qquad (20.47)$$

Для получения граничного условия сред потенциал должен зависеть только от u, так что два полых полушария гиперболоиды v — const будут поверхностями тока. Дифференциальное уравнение (20.28) тогда переходит в

$$\frac{d}{du}\left[\frac{u^2-l^2}{l}\cdot\frac{d\varphi}{du}\right]=0, \tag{20.48}$$

решение которого, убывающее в бесконечности,

$$\varphi=A\cdot\ln\frac{u+l}{u-l}. \tag{20.49}$$

Для определения постоянных интегрирования применим (20.49) к поверхности заземлителя, координата которого равна по уравнению (20.46)

$$\sqrt{l^2+r_0^2},\quad z=0,\quad r=r_0,$$

тогда получаем потенциал заземлителя

$$\varphi_0=A\cdot\ln\frac{\sqrt{l^2+r_0^2+l}}{\sqrt{l^2+r_0^2-l}}\cong A\cdot 2\ln\frac{2l}{r_0};\quad A=\frac{\varphi}{2\ln\frac{2l}{r_0}}, \tag{20.50}$$

где делается допущение, что $l \gg r_0$. При большом удалении от заземлителя

$$\lim_{u\to\infty}\varphi=A\cdot\ln\frac{1+\frac{l}{u}}{1-\frac{l}{u}}=\frac{\varphi_0}{2\ln\frac{2l}{r_0}}\cdot 2\frac{l}{u}=\frac{\varphi_0}{\ln\frac{2l}{r_0}}\cdot\frac{l}{\sqrt{r^2+z^2}}. \tag{20.50a}$$

Сравнивая с (20.7*в*), получаем ток заземлителя:

$$I=\varphi_0\cdot\frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{2l}{2r}}, \tag{20.51}$$

а следовательно, и сопротивление распространению:

$$R=\frac{\varphi_0}{I}=\frac{\ln\frac{2l}{r_0}}{2\pi\gamma l}. \tag{20.52}$$

Соотношение (20.52) показывает, что сопротивление распространению трубчатого заземлителя, прежде всего, определяется его длиной. При этом радиус трубки имеет меньшее значение. Например, при $r_0 = 0{,}02$ м, $l = 2{,}0$ м и средней почве

$$R=\frac{\ln\frac{2\cdot 200}{2}}{2\pi\gamma\cdot 200}=\frac{10^4\cdot 5{,}3}{2\pi\cdot 200}=42{,}2\ \text{Ом}.$$

При удвоении радиуса трубки эта величина уменьшилась бы лишь до

$$R=\frac{\ln\frac{2\cdot 200}{4}}{2\pi\gamma\cdot 200}=\frac{10^4\cdot 4{,}9}{2\pi\cdot 200}=36{,}6\ \text{Ом},$$

т. е. приблизительно на 13%. При удвоении же длины трубки, наоборот, уменьшение сопротивления достигает

$$R = \frac{\ln\frac{2\cdot 200}{2}}{2\pi\gamma\cdot 400} = \frac{10^4\cdot 6{,}0}{2\pi\cdot 400} = 23{,}9 \text{ Ом},$$

т. е. на 44%. Тонкие длинные трубки, следовательно, выгоднее в конструктивном отношении для трубчатого заземлителя, так как они обладают меньшим сопротивлением распространению, чем короткие и толстые трубки.

При замене (20.51) на (20.50*а*) получаем поле тока

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma l}\cdot\ln\frac{u+l}{u-l} \tag{20.53}$$

и при

$$u = \sqrt{l^2+r^2}.$$

При $z = 0$ кратер напряжения:

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma l}\cdot\ln\frac{\sqrt{l^2+r^2+l}}{\sqrt{l^2+r^2-1}} = \frac{I}{2\pi\gamma l}\ln\sqrt{\frac{l^2+r^2+l}{r}}. \tag{20.53а}$$

Вблизи заземлителя можно для $r \ll l$ сделать разложение в ряд, тогда

$$\varphi \cong \frac{I}{2\pi\gamma l}\cdot\ln\frac{2l}{r}, \tag{20.53б}$$

так что при $r = r_0 + 0{,}5s \cong 0{,}5s$ самое большое напряжение шага будет равно

$$E_{s\max} = \varphi_{r-0{,}5s} - \varphi_{r+0{,}5s} \cong \frac{I}{2\pi\gamma l}\left[\ln\frac{2l}{r_0} - \ln\frac{2l}{s}\right] = \frac{I}{2\pi\gamma l}\ln\frac{s}{r_0}. \tag{20.54}$$

Опасный ток трубчатого заземлителя с учетом (20.23) будет

$$I_З = \frac{\pi}{20}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{1}{\ln\frac{s}{r_0}}. \tag{20.54а}$$

При $l = 200$ см, $d = 20$ см, $r_0 = 2$ см, $s = 100$ см находим

$$I_З = \frac{\pi}{20}\cdot\frac{200}{20}\cdot\frac{1}{\ln\frac{100}{2}} = 0{,}4 \text{ А}.$$

При удалении на $r \gg l$ уравнение (20.53*а*) дает потенциал точки источника (20.7*в*), в чем легко убедиться при помощи разложения в логарифмический ряд. Для опасной зоны пригодна формула (20.7*в*).

Трубчатые заземлители применяются в качестве заземлителей сильного тока, также иногда в виде так называемых зондов для экспериментальных измерений полей тока. При этом для получения верных результатов следует рассматривать сопротивление распространению зондов по (20.52). Если требуется бóльшая точность, то рекомендуется определять проводимость почвы, которая непосредственно окружает заземлитель.

20.8. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЗАЗЕМЛИТЕЛЬ В СЛОИСТОЙ ПОЧВЕ

Часто проводимость изменяется с глубиной. Допускают, что проводимость γ_0 верхнего слоя, лежащего параллельно поверхности земли, можно рассматривать как однородную. В зависимости от характера наслоения она будет больше или меньше проводимости γ нижележащей почвы: геологические явления часто указывают на глубоколежащие горные породы, так что тогда $\gamma_0 > \gamma$. Наоборот, почвенная вода может настолько пропитать глубоколежащие песчаные слои, что $\gamma_0 < \gamma$. Наконец, на поверхностную проводимость в том или другом роде оказывают влияние интенсивные солнечные лучи, замерзание почвы или сильные дождевые ливни.

Допустим, что толщина t верхнего поверхностного слоя значительно больше линейных размеров заземлителя. В однородной почве проводимости γ_0 поле тока вблизи заземлителя регулируется в зависимости от формы заземлителя по законам, выведенным ранее, в то время как при большем удалении от заземлителя оно переходит в потенциал точечного источника:

$$\varphi_p = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Это поле не выполняет существующих условий в нижней части слоя на границе с другим слоем почвы. Это место будет источником двух вторичных потенциалов φ_{s0}, верхнего слоя и φ_s слоев, расположенных ниже. Таким образом, потенциал общих промежутков изобразится в виде

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= \varphi_p + \varphi_{s_0}\\ \varphi &= \varphi_p + \varphi_s\end{aligned}\right\}. \tag{20.55}$$

Для определения вторичного потенциала воспользуемся цилиндрической системой координат z, r, ϑ, начало которых лежит в заземлителе, и оси z направлены вертикально к поверхности земли. На основании симметрии вторичное поле не зависит от ϑ.

Чтобы потенциал исчезал в бесконечности, вторичный потенциал φ_s должен иметь вид

$$\varphi_s = e^{\lambda z}\cdot f(r), \tag{20.56}$$

где λ обозначает неопределенный параметр. С использованием функции φ_s в виде (14.56) для нахождения $f(r)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{df}{dr} + \lambda^2 z = 0, \tag{20.56а}$$

конечным решением которого при $r = 0$ будет функция Бесселя $J_0(\lambda r)$ первого рода нулевого порядка. При добавлении произвольной постоянной интегрирования $g(\lambda)$ и суммировании нескольких таких произвольно взятых частных решений можно составить выражение

$$\varphi_s = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\int_0^\infty g(\lambda)e^{+\lambda z}\cdot J_0(\lambda r)\,d\lambda. \tag{20.56б}$$

В верхнем слое потенциал должен быть расположен симметрично поверхности земли, отсюда аналогично (20.56*б*) имеем

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\int_0^\infty h(\lambda)[e^{+\lambda z} + e^{-\lambda z}]\cdot J_0(\lambda r)d\lambda. \qquad (20.56в)$$

При использовании тождества

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \left.\begin{matrix} \int_0^\infty e^{-\lambda z}\cdot J_0(\lambda r)d\lambda & z>0 \\ \int_0^\infty e^{\lambda z}\cdot J_0(\lambda r)d\lambda & z<0 \end{matrix}\right\} \qquad (20.56г)$$

получаем условия на границе $z = -t$ верхнего слоя:

$$e^{-\lambda t} + h(\lambda)(e^{-\lambda t} + e^{\lambda t}) = e^{-\lambda t} + g(\lambda)\cdot e^{-\lambda t},$$

$$\gamma_0\lambda[e^{-\lambda t} + h(\lambda)(e^{-\lambda t} - e^{\lambda t})] = \gamma\lambda[e^{-\lambda t} + g(\lambda)\cdot e^{-\lambda t}]. \qquad (20.57)$$

Для практического применения необходимо знать лишь поле верхнего слоя. Из (20.57) получается

$$h(\lambda) = -\frac{\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma+\gamma_0}\cdot e^{-2\lambda t}}{1+\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma+\gamma_0}\cdot e^{-2\lambda t}} = -\beta e^{-2\lambda t} + \beta^2 e^{-4\lambda t} - \beta^3 e^{-6\lambda t} + \ldots, \qquad (20.57а)$$

где $\beta = \frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma+\gamma_0}$, β — постоянная проводимости многослойной почвы.

Подставляя (20.57*а*) в (20.56*в*) и используя (20.56*г*), получаем

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\int_0^\infty(-\beta e^{-2\lambda t} + \beta^2 e^{-4\lambda t} - + \ldots)[e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}]\cdot J_0(\lambda r)d\lambda =$$
$$= \frac{I}{2\pi\gamma_0}\left[\sum_{n=1}^\infty \beta^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2+(2nt+z)^2}} + \sum_{n=1}^\infty \beta^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2+(2nt-z)^2}}\right]. \qquad (20.58)$$

При $z = 0$:

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\sum_{n=1}^\infty \frac{2\beta^n(-1)^n}{\sqrt{r^2+(2nt)^2}}. \qquad (20.58а)$$

Используя (20.58) и (20.58*а*), можно заменить обратное действие граничного слоя на верхний слой двумя системами центральных источников, продолжая зеркальные отображения на граничные поверхности по обе стороны земной поверхности, симметрично дополненной верхним слоем. При этом коэффициент β является фактором интенсивности отражения, что проверяется элементарным путем. Если верхний слой проводит значительно хуже, чем нижерасположенная почва, то по (20.57*а*) получают $\beta = 1$, так что потенциал может быть составлен из ряда источников одинаковой величины, но различных знаков. Для обратного действия граничной поверхности на заземлитель находят

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{nt} = -\frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{t}\cdot\ln 2 = -\frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{0{,}694}{t}. \qquad (20.59)$$

Результирующий потенциал заземлителя вычисляется с учетом сопротивления распространению R_0, найденному ранее в однородной почве:

$$\varphi_0 = I\left(R_0 - \frac{1}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{0{,}694}{t}\right) = I\cdot R, \qquad (20.59а)$$

где R — сопротивление распространению, полученное в предельном случае. Например, для заземлителя в виде полушария ($r_0 = 1{,}50$ м при средней проводимости почвы ($\gamma_0 = 10^{-2}$ Сим/м) и при глубине $t = 5{,}00$ м) сопротивление $R = 8{,}4$ Ом.

В то время как сопротивление распространению и опасный ток относительно мало подвергаются влияниям, хорошо проводящий нижний слой значительно уменьшает опасную зону. При достаточно большом удалении от заземлителя, суммируя первичный (20.54) и вторичный потенциалы (20.58), получают результирующий кратер напряжения:

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_\nu = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x dx}{\sqrt{r^2+(2t)^2x^2}} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{2t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi r}{2t}\cdot\xi\right)d\xi}{\sqrt{r^2+\xi^2}} =$$
$$= \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{\pi}{2t}\sqrt{-1}\cdot H_0^{(1)}\left(\sqrt{-1}\cdot\frac{\pi r}{2t}\right). \qquad (20.59б)$$

Пользуясь асимптотическим выражением функции Ганкеля, получаем

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_\nu = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{r}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi r}{2t}}\cdot e^{-\frac{\pi r}{2t}}\right]. \qquad (20.59в)$$

Сравнение с (20.50) показывает, что член, заключенный в скобки, дает отношение действующего потенциала к потенциалу однородной почвы, который быстро уменьшается с возрастанием расстояния от заземлителя. То же самое будет и для напряжения шага, которое находится из (20.59*б*) при помощи дифференцирования и умножения на ширину шага:

$$E_s = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^2(-1)\cdot H_1^{(1)}\left(\sqrt{-1}\cdot\frac{\pi r}{2t}\right)\cdot s = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{s}{r^2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left(\frac{\pi r}{2t}\right)^{1{,}5}\cdot e^{-\frac{\pi r}{2t}}\right]. \qquad (20.59г)$$

При вычислении тока тела следует принимать в расчет точно взятое сопротивление распространению обеих ног соответственно увеличенной проводимости подпочвы; между тем если толщина слоя t несколько велика, то линии тока, исходящие из ноги к ноге, проникают незаметно в слой подпочвенной воды, так что вычисление можно сделать при значениях (20.47). Из (20.59*г*) получается при этом

$$i = I\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{sd}{r^2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left(\frac{\pi r}{2t}\right)^{1{,}5}\cdot e^{-\frac{\pi r}{2t}}\right] = I\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{sd}{\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi r}{2t}}}\cdot e^{-\frac{\pi r}{2t}}\right] = I\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{sd}{\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2}\cdot f\left(\frac{r}{t}\right). \qquad (20.59д)$$

Используя условие $i \le 0{,}05$ А (ток не должен превышать этой величины по соображениям безопасности), можно определить опасный радиус растекания тока. Например, при $I = 200$ А, $t = 5{,}0$ м, $s = 1{,}00$ м и $d = 0{,}2$ м имеем

$$f\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{\pi}{40}\cdot\frac{10^2}{\pi^2\cdot 1{,}0\cdot 0{,}20}\cdot\frac{1}{200} = 0{,}0196;\ \ \frac{r}{t} = 1{,}98,\ \ r_g \approx 10\ \text{м}.$$

Сравнение с ранее найденной для однородной почвы величиной $r_g = 22{,}6$ м показывает, что в действительности опасная зона уменьшается, если под поверхностью находится хорошо проводящий слой почвы. Такие слои могут быть получены путем закапывания вблизи заземлителей хорошо разветвленной проволочной или трубчатой сетки. Делать это рекомендуется для защиты многолюдных примыкающих к ним дорог.

Если верхний слой проводит ток значительно лучше, чем нижележащая почва, то можно с приближением взять ее проводимость равной нулю ($\gamma = 0$). В этом случае приходится учитывать потенциал, вызванный обратным действием граничной поверхности с $\beta = -1$ на заземлитель, из (20.58). Он состоит из потенциалов бесконечно многих связанных между собой одинаковых источников:

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2nt} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{t}\left(1 + 0{,}5 + \frac{1}{3} + \ldots\right). \qquad (20.60)$$

Следовательно, потенциал заземлителя и сопротивление распространению будут логарифмически бесконечны. Аналогично (20.59) получается потенциал заземлителя с учетом обратного действия граничащих поверхностей на земной поверхности:

$$\varphi_r = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{r^2 + (2t)^2 x^2}} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{r}{2t}\right)^2 + x^2}} = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{t}\left[\ln\frac{2t}{r} + \text{const}\right]. \qquad (20.60a)$$

А значит, поле приближается, как и следовало ожидать из распределения источников, к потенциалу линейных источников, причем плотность линий источника дана

$$i = \frac{I}{t}. \qquad (20.60б)$$

В этом случае не может быть дана твердая величина сопротивления распространению, но ток осуществляется физически при помощи второго заземлителя в конечном расстоянии D от первого. Причем этот второй заземлитель выводит ток, который был введен в землю первым заземлителем. Если заземлители одинаковы между собой и имеют радиус r_0, то их потенциал будет

$$\varphi_0 = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{t}\left[\ln\frac{2t}{r_0} - \ln\frac{2t}{D}\right] = \frac{I}{2\pi\gamma_0}\cdot\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{D}{r_0} = I\cdot R. \qquad (20.60в)$$

И кратер напряжения между заземлителями принимает вид, показанный на рис. 20.9.

Действующее теперь сопротивление распространению будет больше действительной константы заземлителя и начнет увеличиваться с бóльшим удалением второго заземлителя.

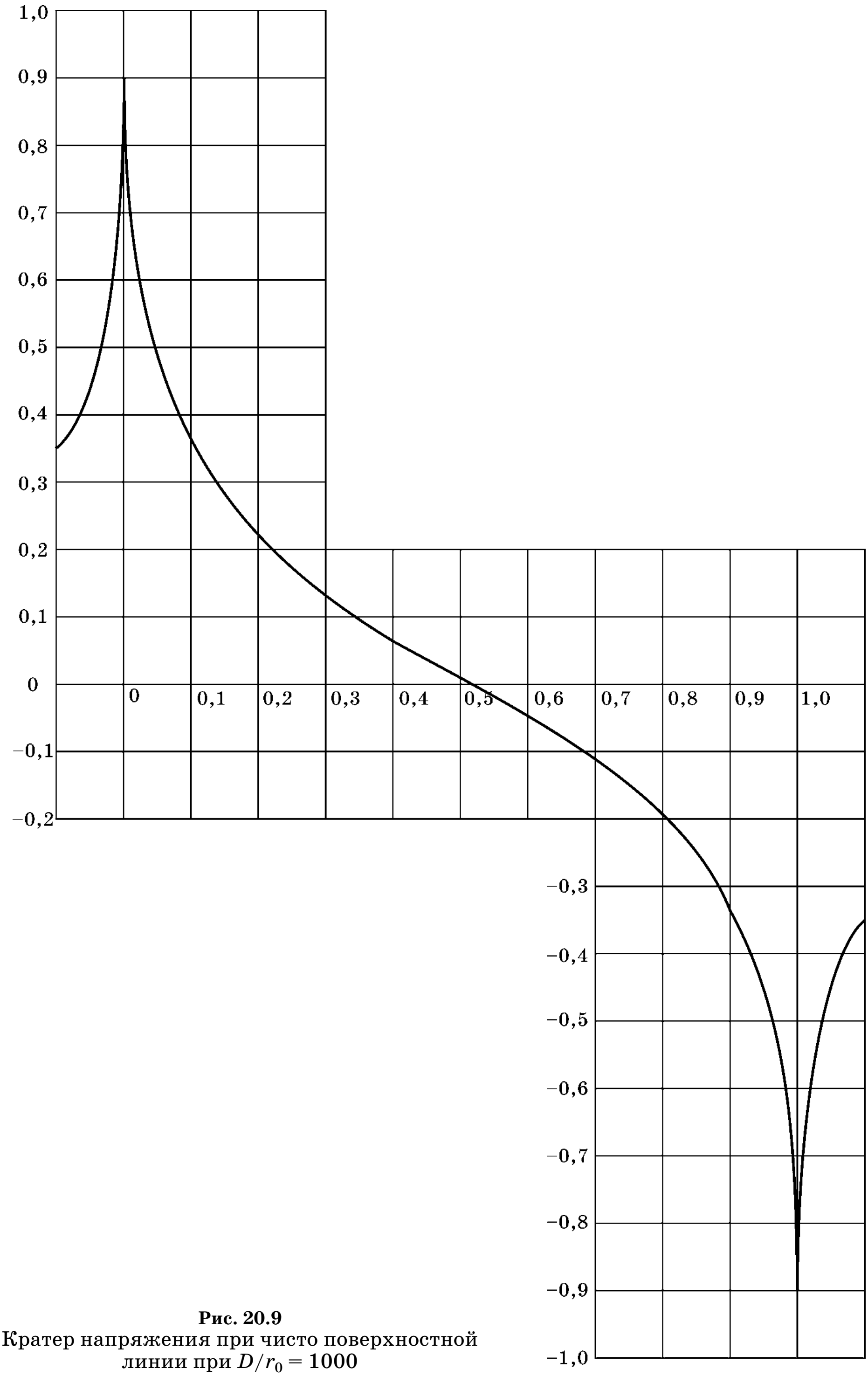


Рис. 20.9
Кратер напряжения при чисто поверхностной линии при $D/r_0 = 1000$

Если глубина верхнего слоя будет мала по сравнению с шириной шага человека, то из (20.60*в*) можно получить сопротивление распространению $R_н$ ноги после того, как расстояние заземлителя будет заменено шириной шага, а радиус заземлителя — половиной диаметра подошвы:

$$R_н = \frac{1}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln\frac{2s}{d}. \qquad (20.60г)$$

Напряжение шага следует из (20.60*а*):

$$E_s = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left[\ln\frac{2t}{r-0{,}5s} - \ln\frac{2t}{r+0{,}5s}\right] = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln\frac{r+0{,}5s}{r-0{,}5s}. \qquad (20.60д)$$

При $r = r_0 + 0{,}5s$ получается его наибольшее значение:

$$E_{s\max} = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln\frac{r_0+s}{r_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln\left(1+\frac{s}{r_0}\right). \qquad (20.60е)$$

Следовательно, если примем во внимание опасный ток из

$$i = \frac{E_{s\max}}{R_н} = \frac{I_g \cdot \ln\left(1+\dfrac{s}{r_0}\right)}{\ln\dfrac{2s}{d}} = 0{,}05 \ \text{ А},$$

то

$$I_g = 0{,}05 \cdot \frac{\ln\dfrac{2s}{d}}{\ln\left(1+\dfrac{s}{r_0}\right)} \ \text{ А}. \qquad (20.60ж)$$

При больших удалениях от заземлителя опасный ток тела будет

$$i = \frac{E_s}{2R_н} = I \cdot \frac{\ln\dfrac{r+0{,}5s}{r-0{,}5s}}{2\ln\dfrac{2s}{d}} \cong \frac{I \cdot \dfrac{s}{r}}{2\ln\dfrac{2s}{d}}, \qquad (20.60з)$$

а опасная зона будет иметь радиус

$$r_g = 10 \cdot I \cdot \frac{s}{\ln\dfrac{2s}{d}}. \qquad (20.60и)$$

Следовательно, опасный ток и опасная зона в пределах наших предположений совершенно не зависят как от глубины, так и от проводимости верхнего слоя. Например, при $r_0 = 1{,}5$ м, $s = 1{,}0$ м, $d = 0{,}20$ м опасный ток будет

$$I_g = 0{,}05 \cdot \frac{\ln\dfrac{2\cdot 1{,}0}{0{,}20}}{\ln\left(1+\dfrac{1{,}0}{1{,}5}\right)} = 0{,}05 \cdot \frac{2{,}30}{0{,}514} = 0{,}224 \ \text{ А},$$

т. е. меньше десятой части величины, найденной ранее.

Для $I = 200$ А опасная зона принимает исключительную величину

$$r_g = 10 \cdot 200 \cdot \frac{1{,}0}{\ln \dfrac{2 \cdot 1{,}0}{0{,}20}} = 870 \text{ м.}$$

В действительности земля под верхним слоем всегда обладает незначительной конечной проводимостью. Поток около заземлителя изменяется незначительно, но сопротивление распространению получит конечное значение только при очень большом (бесконечном) удалении второго заземлителя. Для отрицательного значения β при величине, меньшей единицы, из (20.58*а*) находят обратное действие на центральный источник

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\beta|^n}{nt} \cong \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t} \cdot \int_1^{\infty} \frac{e^{-\ln\frac{1}{|\beta|}x}}{x} dx = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t}\left[-Ei\left(-\ln\frac{1}{|\beta|}\right)\right]. \quad (20.61)$$

Так как $\ln\frac{1}{|\beta|} \approx 0$, то экспоненциальный интеграл $Ei\left(-\ln\frac{1}{|\beta|}\right)$ можно заменить потенциальным рядом, в котором следует рассмотреть лишь первые члены:

$$\varphi_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t}\left[-0{,}5772 - \ln\left(\ln\frac{1}{|\beta|}\right)\right] = \frac{I}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t}\left[-0{,}5772 + \ln\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma}\right], \quad (20.61a)$$

где в (20.57*а*) включено $\gamma \ll \gamma_0$.

Аналогично (20.59*а*) для потенциала заземлителя и сопротивления распространению находим

$$\varphi_0 = I\left(R_0 + \frac{1}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t}\left[-0{,}5772 + \ln\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma}\right]\right) = I \cdot R. \quad (20.61б)$$

Добавочное сопротивление, вызванное подпочвой,

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi\gamma_0} \cdot \frac{1}{t}\left[-0{,}5772 + \ln\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma}\right] \quad (20.61в)$$

увеличивается незначительно при ухудшении проводимости, напротив, глубина верхнего слоя сильно влияет на его величину. Возьмем, например, заземлитель в виде полушария радиусом $r_0 = 1{,}5$ м в средней почве проводимостью 10^{-2} Сим/м, под которым на глубине $t = 5{,}0$ м расположены плохо проводящие породы ($\gamma = 10^{-6}$ Сим/м); тогда получим

$$R = \frac{10^4}{2\pi \cdot 150} + \Delta R = \frac{10^4}{2\pi \cdot 150} + \frac{10^4}{2\pi \cdot 500}\left[-0{,}5722 + \ln\frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-8}}\right] =$$
$$= 10{,}6 + 25{,}2 = 35{,}8 \text{ Ом.}$$

Сопротивление распространению, следовательно, возрастает почти в 1,5 раза по сравнению с этой же величиной в однородной средней почве.

20.9. ГЛУБОКОРАСПОЛОЖЕННЫЙ ЗАЗЕМЛИТЕЛЬ В СЛОИСТОЙ ПОЧВЕ

При конструировании глубоколежащих заземлителей в слоистой почве существуют две возможности: заземлитель может быть расположен внутри верхнего слоя или в нижележащей почве. В первом случае с незначительной погрешностью получаются те же отношения, что и для поверхностного заземлителя. Ниже мы рассмотрим лишь глубоколежащие заземлители, которые согласно рис. 20.10 зарыты в почве под границей поверхностей на глубину t_1, причем линейные размеры заземлителя предполагаются малыми по сравнению с $t_1 + t$, а также с t. Их выгодно применять, если почва на глубине проводит значительно лучше, чем на поверхности, т. е. особенно при наличии подпочвенной воды.

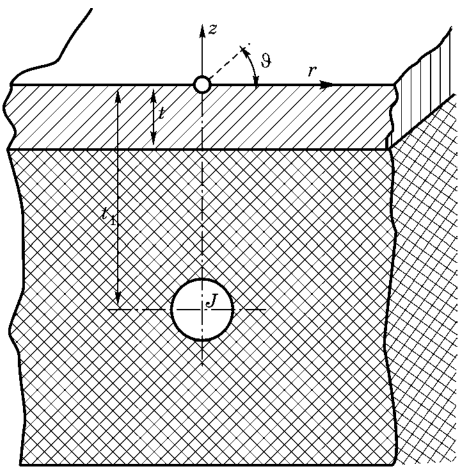


Рис. 20.10
Глубоколежащий заземлитель в слоистой почве

Для описания поля мы воспользуемся цилиндрической системой координат z, r, ϑ, как это показано на рис. 20.10, где через ось z перпендикулярно слоям почвы проходит заземлитель; отсчет координаты z начинается от земли (на поверхности земли $z = 0$). После симметричного дополнения поля тока первичный потенциал глубоколежащего заземлителя дается уравнением

$$\varphi_p = \frac{I}{4\pi\gamma} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + t + t_1)^2}} + \frac{I}{4\pi\gamma} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - t - t_1)^2}}. \qquad (20.62)$$

Так как этот потенциал удовлетворяет граничным условиям на поверхности земли, то для вторичного потенциала следует сохранить формулы (20.56*б*), (20.56*в*), после чего γ_0 можно заменить. При применении равенства (20.56*г*) получаем граничные условия на поверхности $z = -t$, которая отделяет верхний слой от почвы:

$$\begin{gathered} e^{-\lambda t_1} + e^{-\lambda(2t+t_1)} + h(\lambda)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t_1} + e^{-\lambda(2t+t_1)} + g(\lambda)e^{-\lambda t}; \\ \gamma_0[-e^{-\lambda t_1} + e^{-\lambda(2t+t_1)} + h(\lambda)(-e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})] = \\ = \gamma[-e^{-\lambda t_1} + e^{-\lambda(2t+t_1)} + g(\lambda)e^{-\lambda t}], \end{gathered} \qquad (20.63)$$

откуда получим

$$h(\lambda) = \frac{\beta \cdot e^{-\lambda(t_1+t)}}{1+\beta e^{-2\lambda t}} - \frac{\beta \cdot e^{-\lambda(t_1+3t)}}{1+\beta e^{-2\lambda t}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \beta^n [-e^{-\lambda(t_1-\{2n-1\}t)} + e^{-\lambda(t_1+\{2n+1\}t)}];$$

$$g(\lambda)=(1+e^{2\lambda t})h(\lambda)=\frac{\beta\cdot e^{-\lambda(t_1-t)}}{1+\beta e^{-2\lambda t}}-\frac{\beta\cdot e^{-\lambda(t_1+3t)}}{1+\beta e^{-2\lambda t}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\beta^n[-e^{-\lambda(t_1-\{2n-3\}t)}+e^{-\lambda(t_1+\{2n+1\}t)}]. \tag{20.63а}$$

Подставляя в (20.56*б*) и (20.56*в*), получим вторичные потенциалы:

$$\varphi_{s_0}=\frac{I}{4\pi\gamma}\int_0^{\infty}h(\lambda)(e^{\lambda z}+e^{-\lambda z})J_0(\lambda r)d\lambda=$$
$$=\frac{I}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\beta^n\left[\frac{(-1)}{\sqrt{r^2+[z-(t_1+\{2n-1\}t)]^2}}+\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{r^2+[z-(t_1+\{2n+1\}t)]^2}}+\frac{(-1)}{\sqrt{r^2+[t_1+\{2n-1\}t]^2}}+ \tag{20.64}$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{r^2+[z+(t_1+\{2n+1\}t)]^2}}\right];$$

$$\varphi_s=\frac{I}{4\pi\gamma}\int_0^{\infty}g(\lambda)(e^{\lambda z})J_0(\lambda r)d\lambda=$$
$$=\frac{I}{4\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\beta^n\left[\frac{(-1)}{\sqrt{r^2+[z-(t_1+\{2n-3\}t)]^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+[z-(t_1+\{2n+1\}t)]^2}}\right].$$

Из этого представления находим, что слои здесь можно заменить посредством находящегося здесь же центрального источника.

На практике особенно важно сопротивление распространению глубоколежащего заземлителя. Из (20.64) при $r=0$, $z=-(t+t_1)$ получаем обратное действие наслоения на заземлитель:

$$\varphi_s=\frac{I}{4\pi\gamma}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\beta^n\left[\frac{(-1)}{2t_1-2t+2nt}+\frac{1}{2t_1+2t+2nt}\right]. \tag{20.64а}$$

Здесь всегда следует считать, что $\gamma_0\ll\gamma$, так как только в этом предположении глубоколежащий заземлитель является хорошим; в этом случае $\beta\cong 1-$ $-2(\gamma_0/\gamma)$ и ряд (20.64*а*) можно упростить:

$$\varphi_s=\frac{I}{4\pi\gamma}\cdot\left[\frac{\beta}{2t_1}-\frac{\beta^2}{2t_1+2t}-(1-\beta^2)(S_1-S_2)\right];$$
$$S_1=\frac{\beta}{2t_1+4t}+\frac{\beta^2}{2t_1+8t}+\ldots;$$
$$S_2=\frac{\beta^2}{2t_1+6t}+\frac{\beta^4}{2t_1+10t}+\ldots\,. \tag{20.64б}$$

Суммы S_1 и S_2 заменяем интегралом:

$$S_1\cong\beta\cdot\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\ln\frac{1}{\beta}x}dx}{2t_1+4t+4tx};\quad S_2\cong\beta^2\cdot\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\ln\frac{1}{\beta}x}dx}{2t_1+6t+4tx} \tag{20.64в}$$

и после интегрирования при указанном выше для β приближении и достаточно малой величине t_1 по аналогии с (20.61) получаем

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{e^{2\frac{\gamma_0}{\gamma}\left(\frac{t_1}{t}+1\right)}}{4t}\left(-0{,}5772+\ln\frac{\gamma}{2\gamma_0}\frac{1}{\frac{t_1}{t}+2}\right);\\
S_2 &= \frac{e^{2\frac{\gamma_0}{\gamma}\left(\frac{t_1}{t}+1\right)}}{4t}\left(-0{,}5772+\ln\frac{\gamma}{2\gamma_0}\frac{1}{\frac{t_1}{t}+3}\right);
\end{aligned} \qquad (20.64г)$$

$$(1+\beta^2)(S_1-S_2)\cong 4\frac{\gamma_0}{\gamma}(S_1-S_2)=\frac{\gamma_0}{\gamma}\cdot\frac{e^{2\frac{\gamma_0}{\gamma}\left(\frac{t_1}{t}+1\right)}}{4t}\cdot\ln\frac{\frac{t_1}{t}+3}{\frac{t_1}{t}+2}$$

и, следовательно,

$$\varphi_s=\frac{I}{4\pi\gamma}\cdot\left[\frac{1}{2t_1}-\frac{1}{2t_1+2t}-\frac{\gamma_0}{\gamma}\cdot\frac{1}{t_1}+2\frac{\gamma_0}{\gamma}\cdot\frac{1}{t_1+t}-\frac{\gamma_0}{\gamma}\cdot\frac{e^{2\frac{\gamma_0}{\gamma}\left(\frac{t_1}{t}+1\right)}}{t}\cdot\ln\frac{\frac{t_1}{t}+3}{\frac{t_1}{t}+2}\right]. \qquad (20.64д)$$

Это уравнение можно легко объяснить: первые два члена вместе с первичным потенциалом поля центрального источника, находящегося наверху у поверхности земли, дают опять поле глубоколежащего заземлителя, расположенного на глубине t_1 под поверхностью земли. Остальные члены представляют собой уменьшение потенциала заземлителя от слоя поверхности:

$$\Delta\varphi=\frac{I}{4\pi\gamma}\cdot\frac{\gamma_0}{\gamma}\left[\frac{t_1-t}{t_1+t}\cdot\frac{1}{t_1}-\frac{e^{2\frac{\gamma_0}{\gamma}\left(\frac{t_1}{t}+1\right)}}{t}\cdot\ln\frac{\frac{t_1}{t}+3}{\frac{t_1}{t}+2}\right]=-I\Delta R, \qquad (20.64е)$$

где ΔR есть уменьшение сопротивления распространению.

Например, если глубоколежащий заземлитель, у которого $t_1 = 5{,}0$ м, под толстым поверхностным слоем в $t = 5{,}0$ м с незначительной проводимостью $\gamma_0 = 10^{-4}$ Сим/м погружен в почву средней проводимости ($\gamma_0 = 10^{-2}$ Сим/м), то

$$\Delta R=\frac{10^4}{4\pi}\cdot\frac{10^{-4}}{10^{-2}}\left[-0+\frac{e^{2\cdot\frac{10^{-4}}{10^{-2}}\cdot 2}}{5{,}0}\cdot\ln\frac{1+3}{1+2}\right]=0{,}0048\ \text{Ом}.$$

Практически же это незначительное действие быстро пропадает при увеличении глубины t_1. Все требования будут соблюдены, если сопротивление распространению подобного рода глубоколежащих заземлителей вычисляется по законам, изложенным в п. 20.8 и 20.9. Причем в качестве глубины принимается во внимание такая глубина врытия, которая лежит под граничной поверхностью верхнего слоя, а в качестве проводимости — находящаяся под ним почва.

20.10. ТОКИ В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

В настоящее время при строительстве внутри конструкций размещаются провода и кабели, по которым поступает в помещения электрическая энергия. Если на одном из таких проводов повредится изоляция, то ток от места повреждения будет проходить в землю по близрасположенной стене. Этому способствует осаждение копоти и пара на стенах, а также металлические прутья, используемые для прочности в бетонных плитах, являющихся основным строительным материалом.

Допускаем, что влажный слой покрывает стену с обеих сторон места повреждения при ширине b, постоянной толщине δ и однородной проводимости γ (рис. 20.11). Переход тока может происходить от провода приблизительно круглого сечения с радиусом r_0 на высоте h от земной поверхности. Протекание тока над местом повреждения обусловливается особенностями конструкций деталей зданий. Эти детали не имеют значения в той части стены, которая расположена сверху от провода, так как здесь стена представляется неограниченной. Для дальнейших упрощений задачи принимаем, что у сечения стены в том месте, где она соприкасается с почвой, имеется постоянный потенциал. Это возникает в том случае, если в месте соприкосновения с почвой собирается большое количество жидкости.

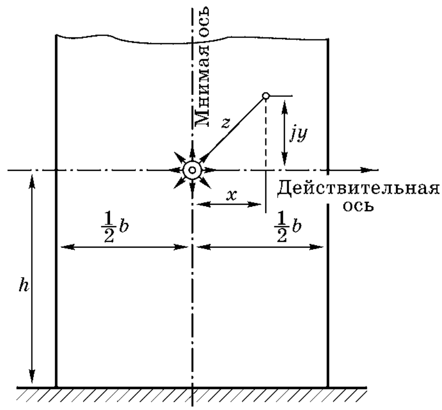


Рис. 20.11
Формирование стенного потенциала

Вследствие сделанного нами допущения поле тока на стене можно рассматривать отдельно от поля тока в земле. Поэтому потенциал переходного слоя «стена — земля» можно взять за основу для вычисления потенциала поля стены.

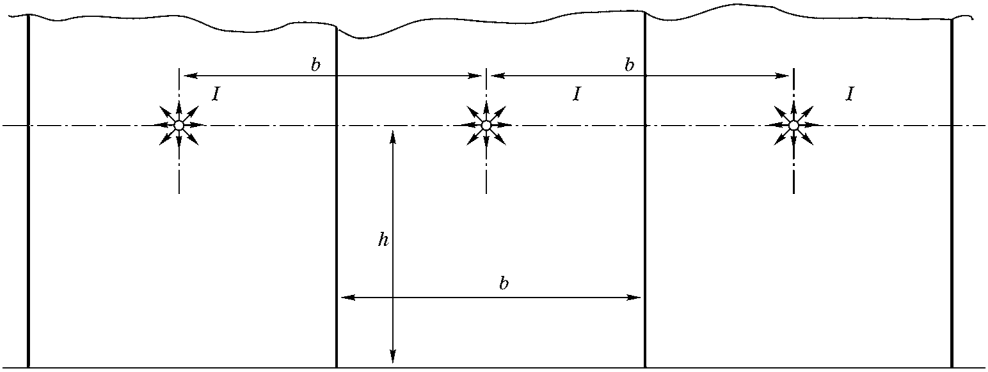


Рис. 20.12
Эквивалентная схема, представляющая условия на границе боковой поверхности стены

Проводим на рис. 20.12 координаты $z = x + jy$, имеющие начало в месте повреждения; боковая поверхность стены требует тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad (20.65)$$

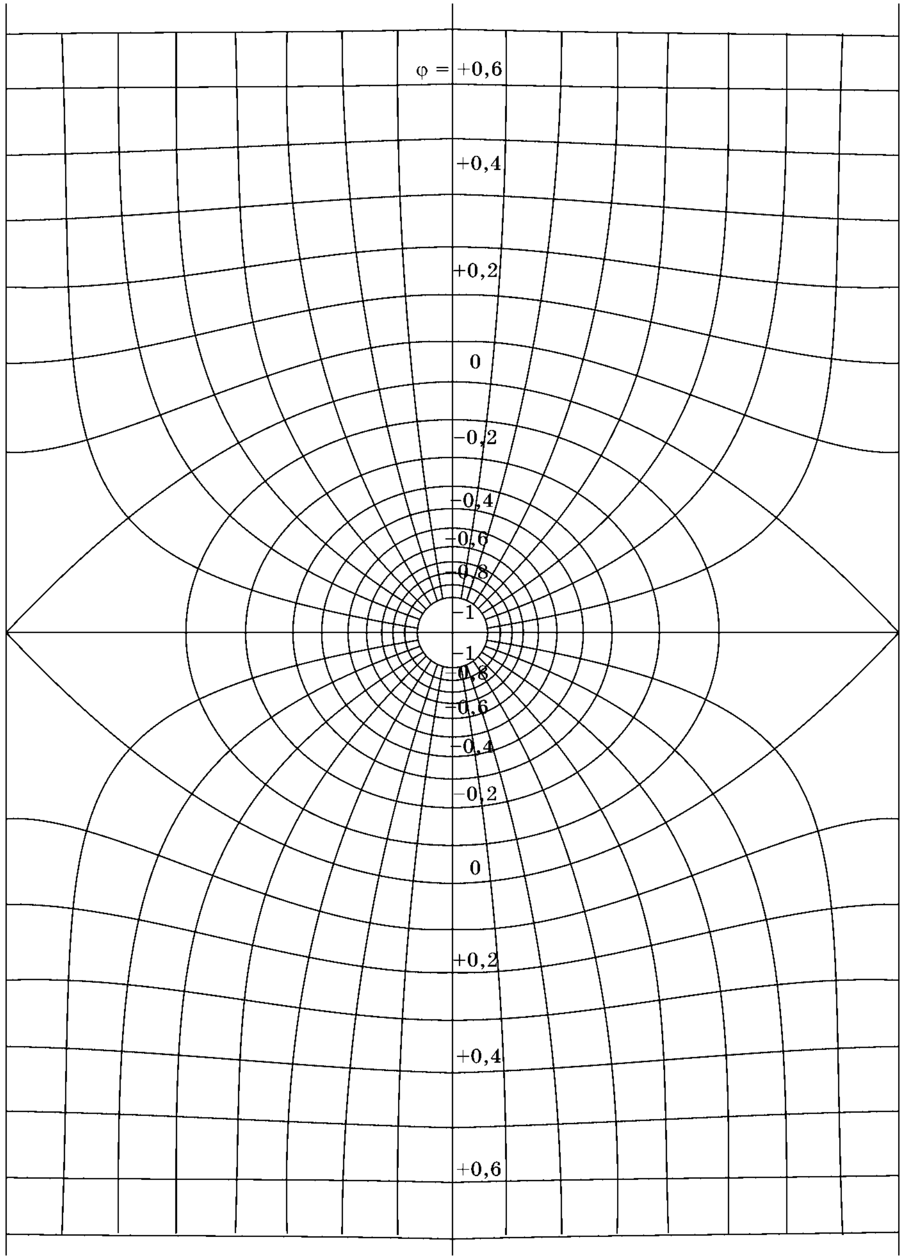


Рис. 20.13
Эквипотенциальные линии и линии тока системы по рис. 20.12

при $x = \pm 0{,}5b$, причем на границе с землей будет

$$\varphi = 0, \tag{20.65а}$$

при $y = -h$ и над местом повреждения по стене

$$\lim_{y \to \infty} \varphi = 0 \tag{20.65б}$$

поле должно исчезать.

Внутри стены поле определяется при неизменной толщине слоя плоскостным (логарифмическим) потенциалом, линейная начальная плотность i которого вытекает из тока повреждения I, согласно

$$i = \frac{I}{\delta}. \tag{20.66}$$

Для выполнения граничного условия (20.65) можно положить $\gamma = 0$. Из (20.64), (20.64*а*) получаем тогда эквивалент боковой поверхности стены в виде бесконечно многих источников напряжения, которые все вместе имеют над землей высоту h и по рис. 20.13 удалены друг от друга на расстояние b.

Потенциал этих бесконечно многих источников будет

$$\varphi = -\frac{i}{2\pi\gamma_{\text{ст}}} \operatorname{Re} \ln \sin \frac{z}{b} \cdot \pi = -\frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{\delta} \operatorname{Re} \ln \sin \frac{z}{b} \cdot \pi. \tag{20.67}$$

Чтобы в дальнейшем осуществить (20.65*а*), допустим, что стена будет продолжена по другую сторону от места соприкосновения ее с поверхностью земли, и расположим перпендикулярно под источниками напряжения (20.67)

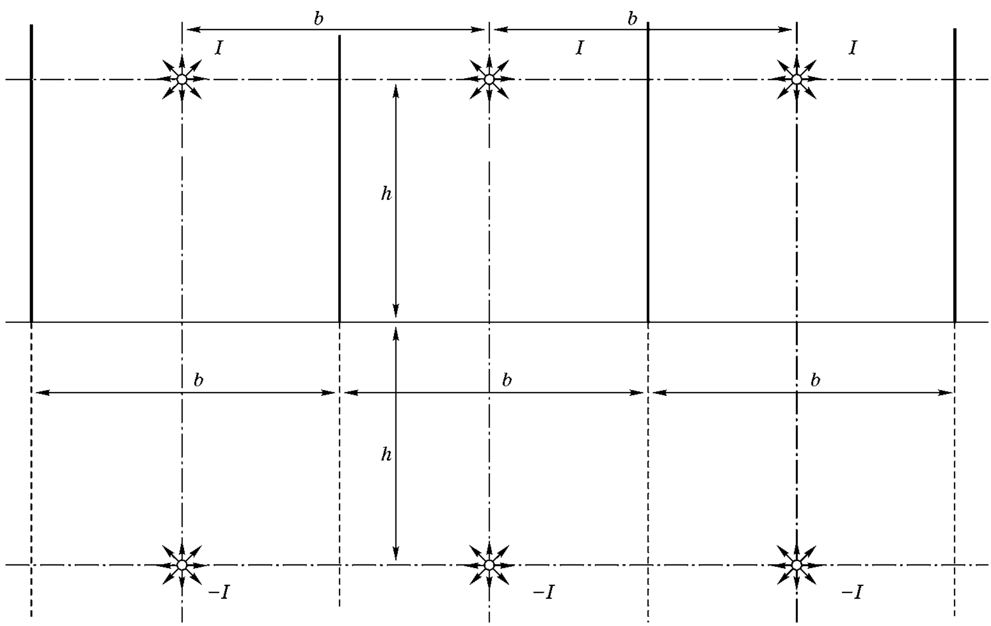


Рис. 20.14
Зеркальное отображение от земной поверхности

на расстояние $2h$ дальнейшую систему источников, которые обладают плотностью линейного источника (см. рис. 20.14):

$$i' = -i = -\frac{I}{\delta}. \tag{20.66а}$$

Поле этой системы источников вычисляется аналогично (20.67):

$$\varphi = -\frac{i'}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\operatorname{Re}\ln\sin\frac{z+2jh}{b}\cdot\pi = +\frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\operatorname{Re}\ln\sin\frac{z+2jh}{b}\cdot\pi, \tag{20.67а}$$

причем следует иметь в виду, что начало координат лежит в месте повреждения.

Совмещение (20.67, 20.67*а*) дает результирующее поле (см. рис. 20.14):

$$\varphi = -\frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\operatorname{Re}\left[\ln\sin\frac{z}{b}\cdot\pi - \ln\sin\frac{z+2jh}{b}\cdot\pi\right]. \tag{20.67б}$$

Отсюда при $z = jr_0$ и $r_0 \ll h$ находят потенциал места повреждения:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &\cong \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\operatorname{Re}\left[\ln j\sin\frac{2h}{b}\cdot\pi - \ln j\sin\frac{r_0}{b}\cdot\pi\right] = \\ &= \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\left[\ln\sin\frac{2h}{b}\cdot\pi + \ln\frac{b}{\pi r_0}\right],\end{aligned} \tag{20.67в}$$

так что

$$R_{\text{ст}} = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\left[\ln\sin\frac{2h}{b}\cdot\pi + \ln\frac{b}{\pi r_0}\right] \tag{20.68}$$

представляют сопротивление распространению места повреждения, считая от этого места до поверхности земли.

Появление напряжения вдоль стены нас интересует главным образом в плоскости, проходящей перпендикулярно к месту повреждения и земле, так как здесь наибольшая опасность для людей и животных при их случайном прикосновении к стене. При $z = -jy$ получаем

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\left[\ln\sin\frac{2h-y}{b}\cdot\pi - \ln\sin\frac{y}{b}\cdot\pi\right], \tag{20.67г}$$

следовательно, напряженность поля вдоль указанной выше линии будет

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\pi}{b}\left[\operatorname{cotg}\frac{2h-y}{b}\cdot\pi + \operatorname{cotg}\frac{y}{b}\cdot\pi\right]. \tag{20.69}$$

На рис. 20.15 представлены эквипотенциальные линии и линии тока системы, изображенной на рис. 20.14.

Напряжение между двумя точками на расстоянии s равно произведению напряженности поля на это расстояние:

$$U_s \cong sE = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}}\cdot\frac{s}{\delta}\cdot\frac{\pi}{b}\left[\operatorname{cotg}\frac{2h-y}{b}\cdot\pi + \operatorname{cotg}\frac{y}{b}\cdot\pi\right]. \tag{20.68а}$$

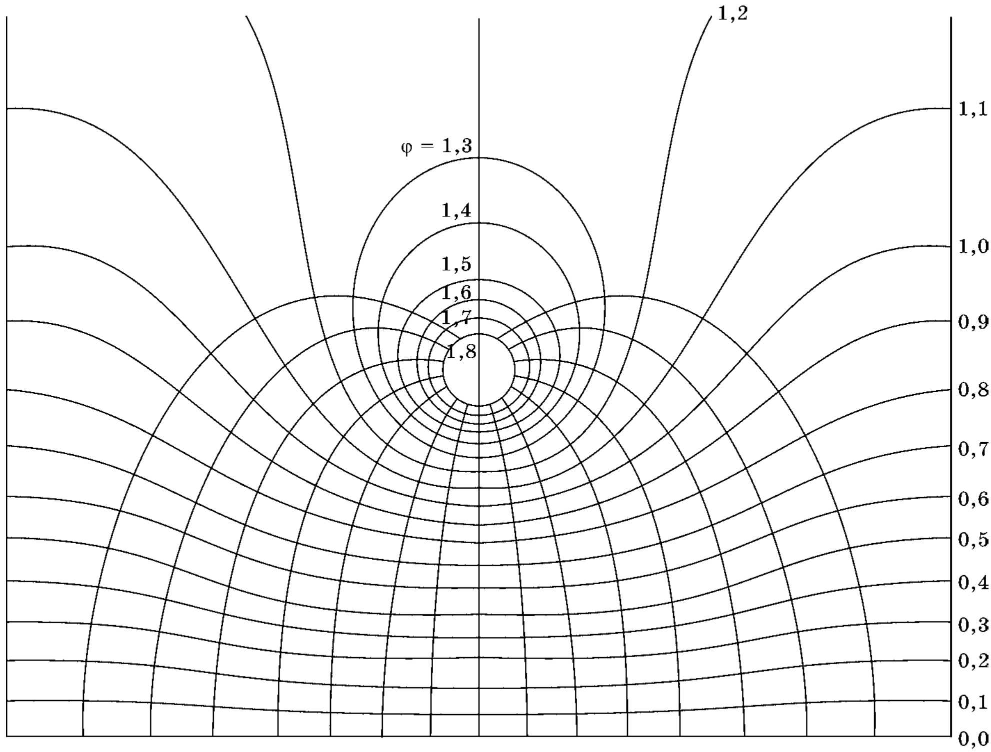


Рис. 20.15
Эквипотенциальные линии и линии тока системы к рис. 20.14

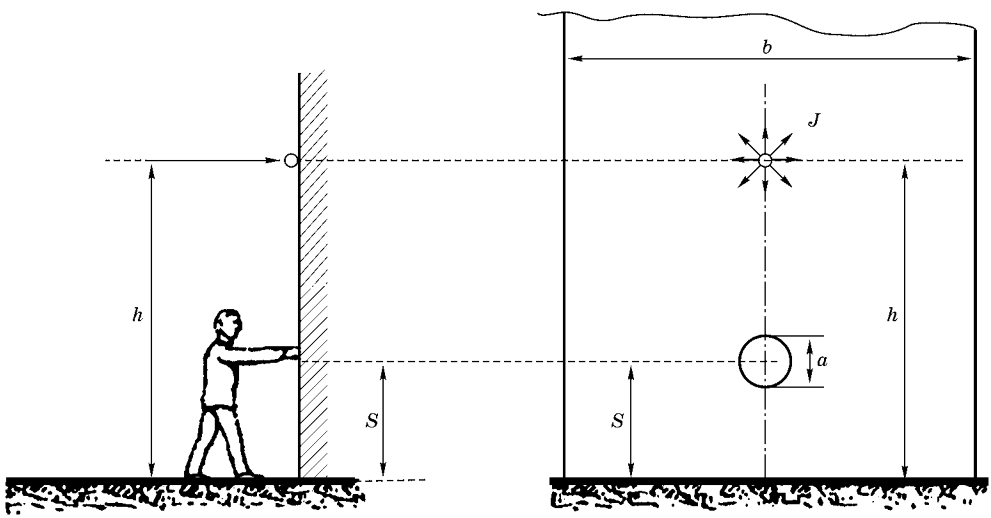


Рис. 20.16
Однополюсное касание к токопроводящей стене

В большинстве случаев живое существо, находящееся на земле (рис. 20.16), подвергается опасности при касании к стене только одного полюса. Если определить $y = h$, то получим

$$U_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}} \cdot \frac{2\pi s}{\delta b} \cdot \operatorname{ctg}\frac{h}{b}\pi \tag{20.68б}$$

и для узкой стены ($\pi h \gg b$):

$$U_{s_0} = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}} \cdot \frac{2\pi s}{\delta b}. \tag{20.68в}$$

У стоящих на земле ног сопротивление распространению почти всегда меньше, чем сопротивление места соприкосновения со стеной, которое благодаря весьма малой толщине слоя δ достигает значительной величины. Если эту толщину заменить кругом с действительным диаметром d, то для получения сопротивления распространению по рис. 20.16 в уравнении (20.67) следует $2s$ заменить на $2h$ и δ на t, тогда найдем

$$R = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{\delta}\left[\ln\sin\frac{2h}{b}\cdot\pi + \ln\frac{b}{\pi(d/2)}\right] \cong \frac{1}{2\pi\gamma_{cm}} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \ln\frac{4s}{d}. \tag{20.69а}$$

Для наиболее опасного случая при узкой стене согласно (20.68), следовательно, получаем ток тела при допущении, что $b \gg d$:

$$i_x = \frac{U_{s_0}}{R} = I \cdot \frac{2\pi s}{b \cdot \ln\dfrac{4s}{d}} \tag{20.68г}$$

независимо от положения места повреждения, толщины и проводимости слоя.

Опасный ток находится в виде

$$I_g = \frac{1}{40\pi} \cdot \frac{b}{s} \cdot \ln\frac{4s}{d}\ \text{А}$$

также независимо от положения места повреждения, толщины и проводимости слоя. Например, при $b = 8$ м, $s = 1{,}5$ м и $d = 0{,}1$ м опасный ток, следовательно, будет

$$I_g = \frac{1}{40\pi} \cdot \frac{8}{1{,}5} \cdot \ln\frac{6}{0{,}1} = 0{,}173\ \text{А}.$$

Видно, что весьма незначительные токи при повреждении создают опасность для людей и находящихся вблизи животных.

Перейдя затем к полю в земле, можно взять на основании ранее высказанных предположений за начало тока лежащую на поверхности земли плоскую ленту шириной δ и длиной b. Если ее заменить круглой с радиусом $r_0 = 0{,}25\delta$, то для рассмотрения поля земляного тока можно использовать потенциал растянутого ленточного заземлителя. Тогда величина переходного сопротивления «стена — земля» будет

$$R_e = \frac{1}{2\pi\gamma\dfrac{b}{2}} \cdot \ln\frac{2\dfrac{b}{2}}{\dfrac{\delta}{4}} = \frac{1}{2\pi\gamma} \cdot \frac{2}{b} \cdot \ln\frac{4b}{\delta}. \tag{20.70}$$

При сложении (20.67) и (20.70) получим результирующее сопротивление распространению:

$$R = R_w + R_e = \frac{1}{2\pi\gamma_w\delta}\cdot\left[\ln\sin\frac{2h}{b}\pi + \ln\frac{b}{\pi r_s} + \frac{\gamma_w}{\gamma}\cdot\frac{2\delta}{b}\cdot\ln\frac{4b}{\delta}\right], \qquad (20.71)$$

а если применить к узкой стене, то

$$R \cong \frac{1}{2\pi\gamma_w\delta}\cdot\left[\frac{2h}{b}\pi + \ln\frac{b}{2\pi r_0} + \frac{\gamma_w}{\gamma}\cdot\frac{2\delta}{b}\cdot\ln\frac{4b}{\delta}\right]. \qquad (20.71a)$$

При $\gamma_w = 5\cdot 10^{-3}$ Сим/см получаем

$$R = \frac{10^3}{2\pi\cdot 5\cdot 0{,}1}\cdot\left[\ln\sin\frac{2\cdot 300}{800}\pi + \ln\frac{800}{\pi\cdot 0{,}5} + \frac{5\cdot 10^{-3}}{10^{-4}}\cdot\frac{2\cdot 0{,}1}{800}\cdot\ln\frac{4\cdot 800}{0{,}1}\right] \cong 2550 \text{ Ом}.$$

Напряжение постоянного тока в 220 В по отношению к земле может создать ток

$$I = \frac{200}{2550} = 0{,}0862 \text{ А},$$

который будет порядка величин подсчитанного выше опасного тока. Отсюда видим исключительную опасность плохо выполненных или поврежденных установок внутри зданий.

В заключении хотелось бы отметить, что по последним исследованиям [20.10] эмпирическая формула для определения граничного тока, опасного для жизни человека, может быть представлена в виде

$$I = \frac{165}{\sqrt{t}},$$

где I — предельно допустимое значение тока, мА; t — время воздействия, с.

20.11. ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКАЯ КОРРОЗИЯ МЕТАЛЛОВ

20.11.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Коррозия металлов — разрушение металлов вследствие химического или электрохимического взаимодействия их с внешней средой.

В результате коррозии металлическое изделие может потерять ряд своих полезных технических свойств: понижается прочность и пластичность материалов, полуфабрикатов из них, частей машин и сооружений. Коррозия может также привести к увеличению трения между движущимися частями машин и приборов (вследствие ухудшения поверхности и появления продуктов коррозии), к ухудшению электрических и оптических качеств, к нарушению герметичности аппаратов и т. д. Кроме снижения механической прочности и других ценных свойств, коррозия вызывает и прямые потери металлов (до 10% от его ежегодной выплавки).

Основная причина коррозии металлов. Известно, что большинство металлов (кроме золота, платины, серебра, ртути) встречается в природе в ионном состоянии — в форме оксидов, сульфидов, карбонатов, силикатов и др. соединений, называемых обычно рудами металлов. Учитывая, что все самопроизвольные природные процессы идут в направлении устойчивых состояний, можно заключить, что ионное состояние для большинства металлов является более устойчивым, чем состояние элементарного металла. Ионное состояние металла энергетически более выгодно, так как оно характеризуется меньшей внутренней энергией. Это легко понять, если сопоставить энергетические изменения при получении металлов из руд и при коррозии этих же металлов.

Металлургическая промышленность осуществляет восстановление руд до свободного металла за счет химической, электрической или тепловой энергии.

Коррозия как следствие работы короткозамкнутых гальванических элементов. Поверхность большинства металлов и сплавов не обладает изотропностью тех или иных свойств (химический состав, структура, внутренние и внешние напряжения, проводимость оксидных слоев и др.). Дифференциация свойств поверхности металла, если последний контактирует с электролитически проводящей средой (водный раствор электролитов, расплавы солей или щелочей), может породить электрохимическую неоднородность металлической поверхности.

Поверхность металла удобно рассматривать состоящей из разделенных анодных и катодных зон. Это возможно, если электрохимические потенциалы в разных участках поверхности неодинаковы. Коррозионный процесс в таких случаях — результат работы гальванического элемента, состоящего из микро- или макроанодов и катодов. Часто такую систему называют коррозионным гальваническим элементом. Возможны и другие позиции рассмотрения коррозионных процессов, не противоречащие, а напротив, взаимодополняющие.

Электрохимическая коррозия является наиболее распространенным типом коррозии металлов. Она происходит, если металлы находятся в контакте с растворами электролитов (морская вода, растворы кислот, щелочей, солей, расплавы солей и щелочей). В обычных атмосферных условиях и в земле металлы корродируют также по электрохимическому механизму, так как на их поверхности имеется пленка влаги с растворенными компонентами воздуха и земли. Электрохимическая коррозия — гетерогенный и многостадийный процесс. Ее первопричина — термодинамическая неустойчивость металлов в данной коррозионной среде.

Все коррозионные процессы протекают с уменьшением свободной энергии и потому совершаются самопроизвольно. Однако в практическом отношении более существенно установление не принципиальной возможности коррозионного процесса, а скорости этого процесса в заданных условиях.

В отличие от химических реакций, электрохимические процессы контролируются не только концентрацией реагирующих веществ, температурными и другими параметрами, но и, главным образом, зависят от потенциала поверхности металла. Это в равной мере относится и к процессу ионизации металла, и к восстановительному процессу. Поэтому, прежде чем изучать собственно электрохимическую коррозию, необходимо рассмотреть элементы электрохимии и прежде всего такие важные ее разделы, как строение пограничного слоя между металлом и раствором и скачок потенциала на этой границе (термодинамические характеристики), дать понятия электродного потенциала и некоторых их свойств, а также вопрос о поляризации электродов (кинетическая характеристика).

20.11.2. МЕЖФАЗНАЯ РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

Между двумя разнородными фазами при их контакте почти всегда возникает разность электрических потенциалов. Общей причиной возникновения межфазной разности электрических потенциалов (или скачка потенциалов на границе двух фаз) служит упорядоченное распределение электрических зарядов (ионов или электронов) вследствие их перехода из одной фазы в другую. В результате этого перехода разрываются связи в веществе одной фазы и образуются новые в веществе другой. Таким образом, возникновение разности электрических потенциалов сопряжено с протеканием некоторой реакции, которая, в отличие от обычных «химических реакций», имеет «электрохимическую» природу и может быть названа (по Феттеру) реакцией перехода, так как при этом некоторый носитель заряда (ион или электрон) переходит из одной фазы в другую, преодолевая потенциальный барьер, высота которого зависит от электродного потенциала [20.9].

При переходе заряженных частиц из одной фазы в другую совершается работа

$$A = q\Delta\varphi, \tag{20.72}$$

где q — заряд частицы, $\Delta\varphi$ — межфазная разность потенциалов.

Перераспределение заряженных частиц при контакте двух разнородных фаз приводит к образованию двойного электрического слоя. Электронейтральность всей системы при этом не нарушается, однако отдельные фазы могут содержать избыток положительных или отрицательных зарядов. Скачок потенциала, вызванный образованием двойного электрического слоя, приближенно аналогичен разности потенциалов между обкладками обычного электрического конденсатора.

Возникновение межфазного скачка потенциалов можно объяснить следующими основными причинами (см. рис. 20.17):

1) переходом заряженных частиц из одной фазы в другую, т. е. эмиссией электронов из металла в вакуум (рис. 20.17*а*) — контактный потенциал второго рода или работа выхода электрона;

2) переходом электронов из одного металла в другой (рис. 20.17*б*) — контактный потенциал Вольта;

3) переходом катионов из металла в электролит (рис. 20.17*в*) — электродный потенциал;

4) переходом катионов металла из электролита в металл (рис. 20.17*г*) — электродный потенциал;

5) неэквивалентным переходом ионов из одного электролита в другой (рис. 20.17*д*) — диффузионный потенциал;

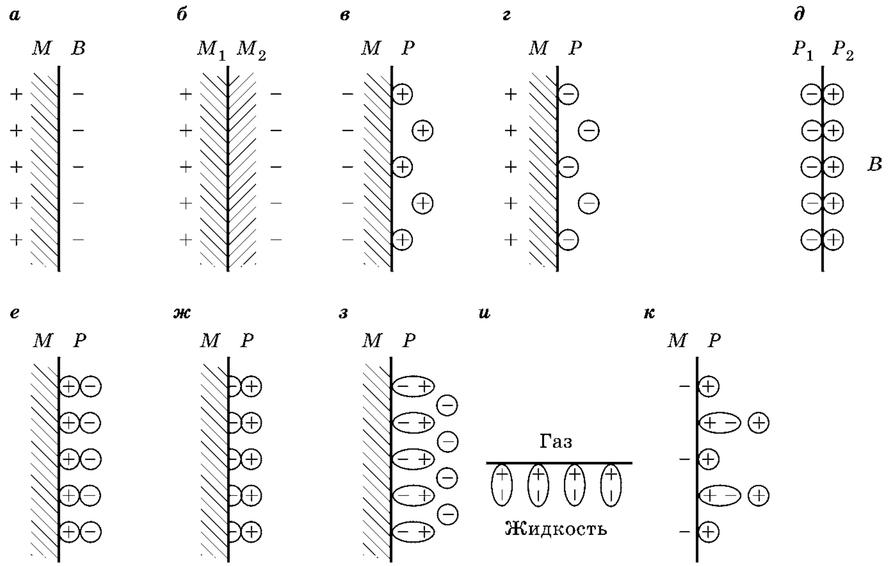


Рис. 20.17
Возникновение двойного электрического слоя на границе фаз:
М — металл, В — вакуум, Р — раствор.

6) избирательной адсорбцией заряженных или полярных частиц одной фазы на поверхности другой с образованием двойного электрического слоя в пределах одной фазы, т. е. адсорбцией катионов (рис. 20.17*е*) и анионов электролита на металле (рис. 20.17*ж*) — адсорбционный потенциал; ориентированной адсорбцией незаряженных полярных или поляризуемых частиц на границе раздела фаз с образованием двойного электрического слоя в пределах одной фазы;

7) адсорбцией молекул воды на металле (рис. 20.17*з*) или ориентацией дипольных молекул у поверхности раздела «жидкость — газ» (рис. 20.17*и*) — адсорбционный потенциал.

Двойной электрический слой может быть обусловлен одновременно несколькими причинами, например возникновением ионно-адсорбционного потенциала (рис. 20.17*к*) за счет одновременной адсорбции поляризованного атома кислорода и переходом катионов из металла в электролит.

По причинам, указанным в [20.9], абсолютное значение межфазной разности потенциалов измерить нельзя. Можно измерить эту величину относительно какого-либо другого стандартного электрода, составив гальваническую цепь из измеряемого и стандартного электродов. Если потенциал стандартного электрода условно принять за нуль, то ЭДС такой цепи будет равна электродному потенциалу измеряемого электрода.

Наличие на межфазной границе «металл — раствор» электролита двойного электрического слоя и возникающий при этом межфазный скачок потенциала существенно влияют на процесс (и, в частности, на скорость) коррозии металла. Рассмотрим пока механизм этого влияния. Например, на границе раздела «металл — раствор» возник двойной электрический слой, показанный на рис. 20.17*в*. Возникший при этом электродный потенциал обозначим через $-\varphi_1$ (знак потенциала соответствует знаку заряда обкладки двойного слоя в металле). Совершенно очевидно, что дополнительная ионизация металла (переход металла с поверхности в раствор в форме положительных ионов) будет встречать сопротивление. Сопротивление возникает вследствие электростатического отталкивания со стороны одноименно заряженной (в данном случае положительно) обкладки двойного слоя, находящейся в растворе. Отрицательный заряд обкладки в металле также препятствует переходу металла в форме M^{n+} в раствор за счет сил взаимного притяжения ионов M^{n+} и отрицательных зарядов обкладки в металле.

Представим, что каким-либо образом (например, пропуская ток от внешнего источника или изменяя природу частиц раствора) мы уменьшим концентрацию (плотность) отрицательных частиц в обкладке двойного слоя в растворе. В силу сохранения электронейтральности всей системы на такую же величину понизится и концентрация отрицательных частиц в обкладке металла. Естественно, электродный потенциал при этом станет менее отрицательным, например $-\varphi_2(|\varphi_2| < |\varphi_1|)$. По тем же причинам, что и в первом случае, вероятность перехода металла в раствор выше, так как силы торможения меньше, т. е. растворение металла будет протекать с большей скоростью. Далее, если знаки зарядов обкладок в растворе и металле поменять, то электродный потенциал будет еще более положительным, например $+\Phi$, и металл будет легко переходить в раствор. И наконец, если концентрацию положительных зарядов обкладки в растворе повысить по сравнению с исходным, то некоторое количество ионов M^{n+} из раствора перейдет и разрядится на металле в виде атомов M. Таким образом, изменяя величину и знак электродного потенциала, мы можем изменять скорость растворения металлов. Именно по этим причинам электродный потенциал — одна из важнейших характеристик, определяющих скорость коррозии металлов.

20.11.3.
СТРОЕНИЕ ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Строение двойного электрического слоя в общем случае, а также распределение потенциала концентраций заряженных частиц (ионов) в нем показаны на рис. 20.18. Кружками обозначены места центров гидратированных ионов, которые непосредственно примыкают к поверхности металла. Двойной электрический слой состоит из двух частей. Плотная часть двойного слоя (слой Гельмгольца) состоит из заряженных частиц, примыкающих к поверхности металла. Поверхностная концентрация этих частиц равна C_s^+. Толщина этого слоя равна $\delta_Г$. Гуи, развивая представления Гельмгольца о старении двойного электрического слоя, предположил, что плотные слои должны разрушаться за счет теплового движения ионов. Движущая сила этого процесса — осмотическое давление соответствующих ионов, которое в двойном слое больше, чем в глубине раствора, из-за большей концентрации этих ионов в двойном слое. Между силами осмотического давления частиц двойного слоя и электростатическим взаимодействием этих частиц в конечном итоге устанавливается равновесие. В итоге двойной электрический слой

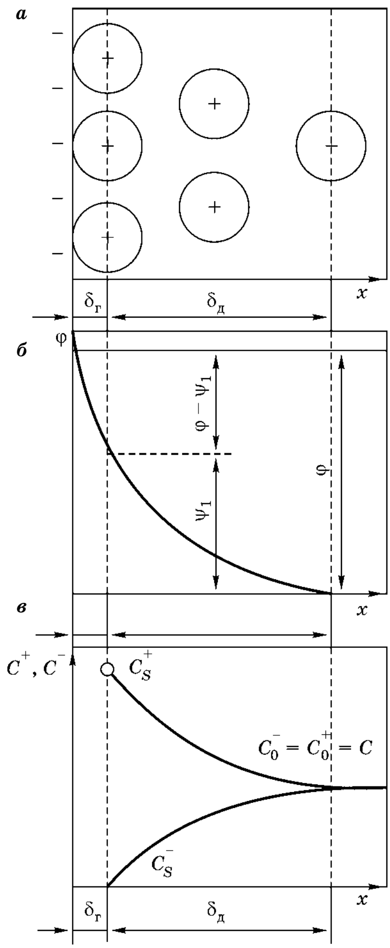


Рис. 20.18
Двойной электрический слой на границе раздела металл — раствор (а); изменение потенциала (б); распределение концентрации положительных и отрицательных ионов (в)

оказывается состоящим из плотного и диффузного слоев. В значительной мере это деление условно. Плотным слоем считается та часть двойного электрического слоя, в котором концентрация заряженных частиц неизменна. Диффузная часть — это пространство, в котором концентрация заряженных частиц уменьшается в направлении от поверхности металла в пределах от C_s^+ до концентрации этих ионов в объеме раствора C_0^+. Изменение потенциала ψ_1 в этом слое следует концентрационной зависимости. Толщина этого слоя $\delta_д$ зависит от концентрации раствора: уменьшается с ростом концентрации и в пределе равна нулю в концентрированных растворах. При такой структуре двойного электрического слоя заряд поверхности металла компенсируется как противоионами плотного слоя, так и противоионами диффузного слоя. Из схемы видно, что концентрационные изменения в двойном электрическом слое начинаются лишь с расстояния $\delta_Г$, т. е. при $x \geq \delta_Г$. На этом основании внешняя граница плотной части двойного слоя принимается за плоскостью отсчета концентрационных изменений.

Определим концентрацию противоионов в какой-либо точке диффузной части двойного слоя. Если потенциал в этой точке φ, то согласно закону распределения Больцмана:

$$C^+ = C_0^+ \exp[-n_- \varphi F/(RT)]. \tag{20.73}$$

Отрицательный знак указывает на убывание концентрации. Для отрицательных ионов:

$$C^- = C_0^- \exp[n_+ \varphi F/(RT)]. \tag{20.73a}$$

В этих выражениях C_0 — концентрация ионов в глубине (в массе) раствора.

Если потенциал на расстоянии $x = \delta_Г$ равен ψ_1 (падение потенциала в диффузной части), то поверхностная концентрация ионов будет равна

$$C_s^+ = C_0^+ \exp[-n_- \psi_1 F/(RT)], \tag{20.74}$$

$$C_s^- = C_0^- \exp[n_+ \psi_1 F/(RT)]. \tag{20.74a}$$

Последние два уравнения показывают, что поверхностная концентрация ионов, которая и определяет скорость электродных процессов, зависит не только от объемной концентрации ионов, но и от падения потенциала в диффузном слое.

Строение двойного электрического слоя не влияет на обратимый электродный потенциал, который определяется изменением энергии Гиббса соответствующей электрохимической реакции. Однако оно существенно влияет на кинетику электродных процессов, в том числе и на кинетику обмена ионами в равновесных условиях. Следовательно, строение двойного слоя должно самым непосредственным образом влиять на скорость коррозионных процессов.

Как и всякая система с пространственно разделенными зарядами, двойной электрический слой определяется объемной плотностью зарядов ρ, потенциалом φ, электрической емкостью C, а также характером распределения зарядов в системе. Все эти характеристические свойства, их взаимосвязь, физическая и физико-химическая сущность наглядно просматриваются в ходе решения уравнения двойного слоя и его анализа.

20.11.4. УРАВНЕНИЕ ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

В общем случае распределение электрического потенциала в любой точке диффузной части двойного слоя должно подчиняться уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{20.75}$$

где x, y, z — координаты, ρ — объемная плотность электрических зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость.

Для плоского электрода производные потенциала по координатам вдоль плоскости (yz) равны нулю и уравнение Пуассона приобретает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{20.76}$$

За точку отсчета координаты x примем не поверхность электрода, а плоскость, параллельную поверхности электрода и отстоящую от него на расстоянии δ_Γ (радиус гидратированного иона), равном толщине плотной части двойного слоя. Следовательно, в диффузной части двойного слоя координата x может изменяться от δ_Γ (принятое за нулевую точку отсчета) до $\delta_д$, т. е. $0 < x \le \delta_д$.

Для решения уравнения (20.76) необходимо определить значение объемной плотности электрических зарядов ρ, которая равна алгебраической сумме положительных и отрицательных зарядов катионов и анионов в растворе на расстоянии x. Концентрация этих зарядов определяется из уравнений (20.73*а*) и (20.73*б*). Так как заряд грамм-моля ионов равен zF, то ρ определится из соотношения

$$\rho=z_+FC_0^+\exp[-z_+\psi F/(RT)]-z_-FC_0^-\exp[z_-\psi F/(RT)]. \tag{20.77}$$

Для симметричного 1–1 зарядного электролита $z_+=|z_-|=1$ и $C_0^+=C_0^-=C$ уравнение упрощается.

Подстановка этого значения ρ в (20.76) дает

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{F}{\varepsilon}\sum zC\exp[-zF\psi/(RT)]. \tag{20.78}$$

При $zF\psi/RT \ll 1$ с учетом условия электронейтральности системы

$$\sum zC = 0,$$

разложив экспоненциальные функции в ряд и ограничиваясь первыми членами разложения, получим

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{F}{\varepsilon}\left(\sum zC - \sum z^2CF\psi/RT\right) = [F^2/(\varepsilon RT)]\sum z^2C\psi. \tag{20.79}$$

Если обозначить для краткости:

$$[F^2/(\varepsilon RT)]\sum z^2C = \eta^2, \tag{20.80}$$

то последнее уравнение примет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \eta^2\psi. \tag{20.81}$$

Решение его:

$$\psi = A_1\exp(-\eta x). \tag{20.82}$$

В плоскости $x = 0$ $\psi = A_1 = \psi_1$, т. е. потенциал равен падению потенциала в плоскости наибольшего приближения ($x = \delta_г$), т. е. полному падению потенциала в диффузной части двойного электрического слоя.

Подставляя значение постоянной A_1, получим

$$\psi = \psi_1\exp(-\eta x) \approx \psi_1(1 - \eta x). \tag{20.83}$$

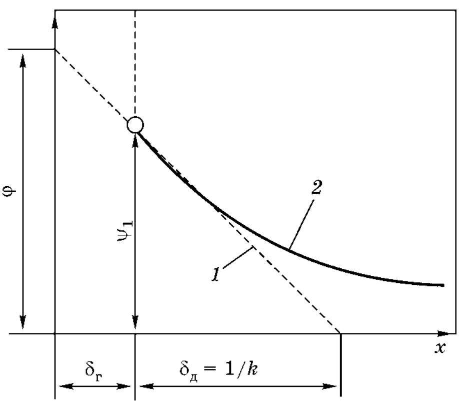


Рис. 20.19
Интерпретация уравнения (20.83)

Графический анализ уравнения (20.83) показан на рис. 20.19. При $x = 1/(\eta\psi) = 0$. Следовательно, величина $1/\eta$, имеющая размерность длины, представляет толщину диффузной части двойного слоя, что и показано на схеме рис. 20.19. Здесь экстраполируется линейная часть кривой на координату x при $\psi = 0$.

Для водных растворов при 25°С толщина диффузного слоя имеет порядок $[3{\cdot}10^7|z|C^{0,5}]^{-1}$. При $|z| = 1$, $C = 10^{-3}$ и 1 моль/л величина $1/\eta$ приблизительно равна 10^{-6} и 10^{-8} см соответственно.

Потенциал ψ_1 — наиболее важная характеристическая величина диффузной части двойного слоя. Он может быть выражен также через избыточный заряд электролита:

$$Q_e = \int_0^\infty \rho\,dx = \varepsilon\eta^2\int_0^\infty \varphi\,dx = \varepsilon\eta^2\psi_1\int_0^\infty e^{-\eta x}dx = -\eta\mu\psi_1. \tag{20.84}$$

Следовательно, подставив значения ψ_1 в (20.83), получим

$$\psi_1 = \frac{1}{\varepsilon\eta} Q_e \exp(-\eta x). \tag{20.85}$$

Напряженность поля, В/см, в плоскости максимального приближения можно найти, пользуясь выражением (для водных растворов при 25°C)

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{\varphi=\psi_1} = -1{,}44 \cdot 10^5 q, \tag{20.86}$$

где q — поверхностный заряд, мКл/см^2.

Напряженность поля в плоскости максимального приближения может достигать $\geq 10^6$ В/см и выше, так что происходит диэлектрическое насыщение.

Точное решение уравнения двойного слоя не ставит условия $\varphi F/(RT) \ll 1$. Удачный вариант такого решения представлен А. Я. Шаталовым: если нет ограничений в величине потенциала, то уравнение Пуассона для плоского электрода применительно к 1–1-зарядному электролиту примет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(-\frac{FC}{\varepsilon}\right)\left[\exp\left(-\frac{\psi F}{RT}\right) - \exp\left(\frac{\psi F}{RT}\right)\right]. \tag{20.87}$$

Интегрирование последнего уравнения по всей области диффузной части двойного слоя от $x = \delta_\Gamma$ до $x = \infty$ дает, если учесть, что $\psi = \psi_1$, а также, что $x = \delta_\Gamma$:

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2_{x=\delta_\Gamma} = \left(\frac{2RTC}{\varepsilon}\right)\left[\exp\left(\frac{\psi_1 F}{2RT}\right) - \exp\left(-\frac{\psi_1 F}{2RT}\right) - 2\right]. \tag{20.88}$$

Для решения уравнения (20.87) необходимо определить градиент потенциала в точке, отстоящей от поверхности электрода на расстояние ионного радиуса (δ_Γ). Вновь обратимся к уравнению Пуассона, записав его в форме

$$d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\frac{\rho dx}{\varepsilon}. \tag{20.89}$$

Интеграл от ρdx в пределах от δ_Γ до ∞ определяет полный электрический заряд диффузной части двойного слоя, эквивалентный заряду единицы поверхности электрода, который обозначим ρ_s. Следовательно,

$$\int_{\delta_\Gamma}^{\infty} d(d\psi/dx) = (1/\varepsilon)\int_{\delta_\Gamma}^{\infty} \rho dx = \rho_s/\varepsilon. \tag{20.90}$$

Имея в виду, что $((d\psi/dx)_{x=0} = 0)$, после подстановки пределов интегрирования получим

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=\delta_\Gamma} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}. \tag{20.91}$$

Подстановка значения (20.91) в (20.88) дает после извлечения квадратного корня из левой и правой частей:

$$\rho_s = 0{,}5\varepsilon RTC\left\{\exp\left(\frac{\psi_1 F}{2RT}\right) - \exp\left(-\frac{\psi_1 F}{2RT}\right)\right\}. \tag{20.92}$$

Знак после извлечения корня выбирается с условием $\rho_s > 0$ при $\psi_1 > 0$.

Поверхностную плотность электрических зарядов ρ_s можно выразить как произведение емкости двойного слоя C на падение потенциала в плотной части этого слоя $(\varphi - \psi_1)$. Такая замена ρ_s в (20.92) приводит к уравнению двойного электрического слоя для 1–1-зарядного электролита:

$$(\varphi - \psi_1)C = 0{,}5\varepsilon RTC\left\{\exp\left(\frac{\psi_1 F}{2RT}\right) - \exp\left(-\frac{\psi_1 F}{2RT}\right)\right\}. \qquad (20.93)$$

Связь между полным падением потенциала φ и падением потенциала в диффузной части двойного слоя более отчетливо просматривается при записи уравнения (20.93) в следующей форме:

$$\varphi = \psi_1 (1/C)(0{,}5\varepsilon RTC)\left\{\exp\left(\frac{\psi_1 F}{2RT}\right) - \exp\left(-\frac{\psi_1 F}{2RT}\right)\right\}. \qquad (20.94)$$

Таким образом, если $|\psi_1| < 25$ мВ ($RT/F = 25$ мВ при 18°С), то есть работа электрических сил при перенесении грамм-иона из раствора в двойной слой $\psi_1 F$ мала по сравнению с энергией теплового движения RT, то, разлагая показательные функции (20.94) в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, выражение в скобках можно заменить на $\psi_1 F/(RT)$. Следовательно, уравнение (20.94) примет вид

$$\varphi = \psi_1 + (1/C)\left(\frac{2\varepsilon C}{RT}\right)^{0{,}5} F\psi_1; \qquad (20.95)$$

$$\rho = \frac{2\varepsilon C}{RT} F\psi_1 = 0{,}25\varepsilon\left(\frac{2C}{\varepsilon RT}\right)^{0{,}5} F\psi_1. \qquad (20.96)$$

Если C достаточна мала, то вторым членом в уравнении (20.95) можно пренебречь, и, таким образом, $\varphi \approx \psi_1$,

$$\rho = \frac{\varepsilon}{L}\varphi, \qquad (20.97)$$

где $L = (1/F)[\varepsilon RT/(2C)]^{0{,}5}$.

Как следует из (20.97), величина L определяет толщину плоского конденсатора, эквивалентного по емкости диффузной части двойного слоя. L изменяется обратно пропорционально $C^{0{,}5}$. При повышении температуры и диэлектрической постоянной диффузность двойного слоя возрастает.

Если $\psi_1 > 0$ и велика по сравнению с RT/F, а концентрация не слишком мала, то в правой части уравнения (20.94) величиной $-\psi_1 F/(2RT)$ можно пренебречь. Тогда уравнение примет вид

$$\varphi = (1/C)(0{,}5\varepsilon RTC)^{0{,}5} \exp\left(\frac{\psi_1 F}{2RT}\right). \qquad (20.98)$$

Следовательно,

$$\psi_1 \approx \text{const} + (2RT/F)\ln\varphi - (RT/F)\ln C. \qquad (20.99)$$

Аналогично при $\psi_1 < 0$ получим

$$\psi_1 \approx \text{const} - (2RT/F)\ln(-\varphi) + (RT/F)\ln C. \qquad (20.100)$$

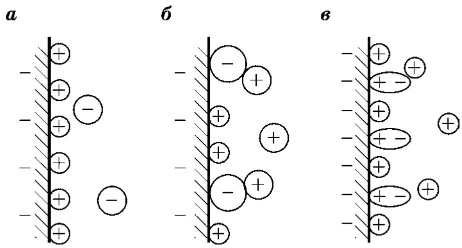


Рис. 20.20
Влияние специфической адсорбции катионов (а), анионов (б) и нейтральных молекул — диполей (в) на структуру (распределение ионов) двойного слоя

Из (20.99) и (20.100) следует, что с ростом φ увеличение потенциала ψ_1 происходит довольно медленно по логарифмическому закону. Таким образом, при больших значениях φ и не очень низких значениях C величина ψ становится малой по сравнению с φ, а емкость двойного слоя C приближается к емкости плотной части двойного слоя.

С увеличением концентрации раствора и зарядности его ионов диффузная часть двойного слоя уменьшается.

Специфическая адсорбция* ионов, атомов и молекул существенно усложняет строение двойного электрической слоя.

При специфической адсорбции противоионы могут входить в плотный слой Гельмгольца в количествах, превышающих эквивалентное. Возможно и такое состояние, при котором на положительно заряженной поверхности электрода будут адсорбироваться катионы, а на отрицательной — анионы. Отдельные случаи специфической адсорбции и схемы строения двойного слоя при этом показаны на рис. 20.20.

В любом случае специфической адсорбции распределение частиц в плотной и диффузной частях двойного слоя изменяется. По существу, образуется тройной слой. Заряженная поверхность электрода является внутренним слоем, далее следует слой специфически адсорбированных ионов, знак зарядов которого не обязательно противоположен заряду поверхности. Внешним является диффузный слой.

Изменение структуры двойного электрического слоя существенно влияет на величину и соотношение полного падения потенциала на границе «электрод — раствор» (φ) и падения потенциала в диффузной части ψ_1. Например, если катионы в значительном количестве специфически адсорбируются на положительно заряженной поверхности электрода, то диффузная часть состоит из анионов, т. е. ионов с тем же знаком заряда, что и металл. Такой эффект специфической адсорбции равнозначен перезарядке диффузного слоя, что должно изменить знак потенциала ψ_1.

На рис. 20.21 показаны некоторые случаи соотношений между полным падением потенциала между металлом и раствором и потенциалом ψ_1 для разных случаев адсорбции. Если специфическая адсорбция отсутствует, то потенциал ψ_1 составляет определенную долю полного падения потенциала,

---

* Вызвана действием некулоновских сил и накладывается на электростатическое притяжение или отталкивание электрода. И наконец, внешний диффузный слой образуется противоионами, электростатически притянутыми к заряженной поверхности электрода.

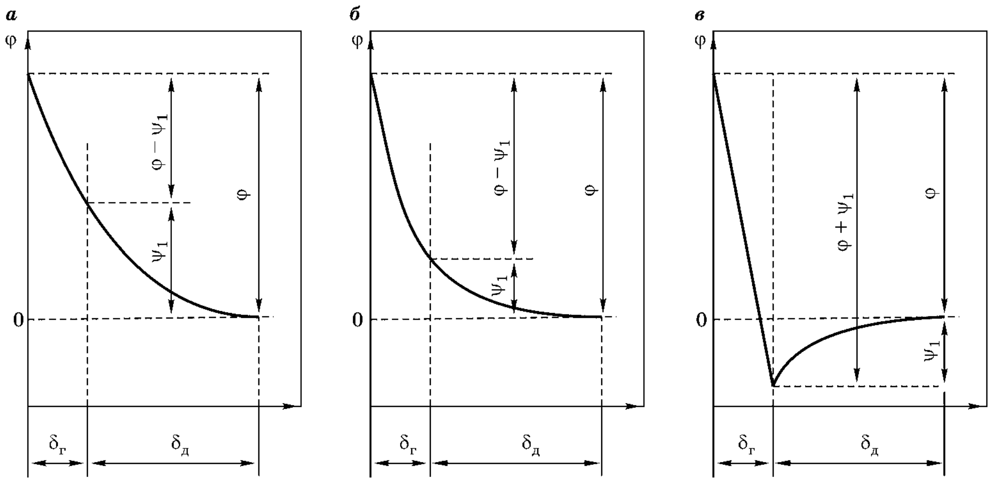


Рис. 20.21
Соотношение между полным падением потенциала φ и потенциалом ψ_1 в растворе: при отсутствии специфической адсорбции (*а*), обычной (*б*) и сильной (*в*) специфической адсорбции противоионов

тем большую (как это было отмечено при анализе уравнения двойного слоя), чем ниже концентрация раствора (рис. 20.21*а*). Если же наряду с электростатической адсорбцией имеет место и специфическая адсорбция противоионов, то поверхностная концентрация последних в гельмгольцевском слое может возрасти в такой мере, что значительная часть заряда электрода будет компенсирована противоионами гельмгольцевского слоя. При этом, естественно, доля ψ_1 будет мала (рис. 20.21*б*). Если же специфическая адсорбция противоионов будет настолько велика, что общий заряд противоионов в гельмгольцевском слое превысит заряд металла, то знак потенциала ψ_1 будет противоположным знаку падения потенциала φ. Изменение знака ψ_1, естественно, приведет к тому, что $|\varphi - \psi_1| > \varphi$ (рис. 20.21*в*).

Контрольные вопросы

1. Чем вызваны токи в земле?
2. Для какой цели используются заземлители?
3. Заземлители каких форм являются наиболее эффективными?
4. Как влияет поверхность земли на эффективность заземлителя?
5. Что такое опасный ток и опасное напряжение?
6. Расскажите о наиболее распространенном методе расчета ЭП в земле.
7. Назовите формы наиболее распространенных простых заземлителей и расскажите об особенностях их расчета.
8. Расскажите об особенностях расчета ЭП заземлителей в слоистой почве.
9. Откуда возникают электрические токи в строительных конструкциях? Как они рассчитываются?
10. Чем вызвана коррозия металлических конструкций в земле?

21

ГЛАВА 21

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

21.1. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

21.1.1. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

Одними из элементов электротехнических устройств являются проводники. Они служат для проведения электрического тока. Кроме проводников есть и магнитопроводы, служащие для проведения магнитного потока. В тех случаях, когда электротехнические устройства связаны с источниками постоянного напряжения, возникающие токи и магнитные потоки равномерно распределяются по сечению соответствующих элементов. При питании устройства от источника переменного тока (например, синусоидального тока) возникающие в элементах токи и потоки распределяются по сечениям неравномерно. Переменный ток имеет наименьшую плотность на оси провода и наибольшую у его поверхности. Аналогично распределяется и переменный магнитный поток в проводящем теле.

Оба эти случая являются результатом поверхностного эффекта (скин-эффекта), связанного с неравномерным распределением ЭМП в проводящей среде из-за затухания электромагнитной волны.

Ранее было показано, что переменное ЭМП быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды. Это приводит к неравномерному распределению поля по сечению провода, а следовательно, к неравномерному распределению тока и магнитного потока. В установившемся режиме эти величины имеют максимальное значение у поверхности провода.

Поверхностный эффект в большинстве случаев является вредным явлением, так как он увеличивает сопротивление провода переменному току и магнитное сопротивление переменному магнитному потоку. В некоторых случаях явление поверхностного эффекта используется, например, в установках для индукционного поверхностного нагрева и закалки.

21.1.2.
ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ШИНЕ

Решение задачи о расчете распределения токов и напряженностей магнитного поля в прямоугольной шине имеет очень важное значение в электромашиностроении. Все электрические машины имеют пазы на подвижной и на неподвижной частях (у ряда машин только на одной из них), в которые уложены обмотки, состоящие из проводников разной формы сечения (например, прямоугольной, круговой цилиндрической и т. д). В этих проводниках проявляется электрический поверхностный эффект.

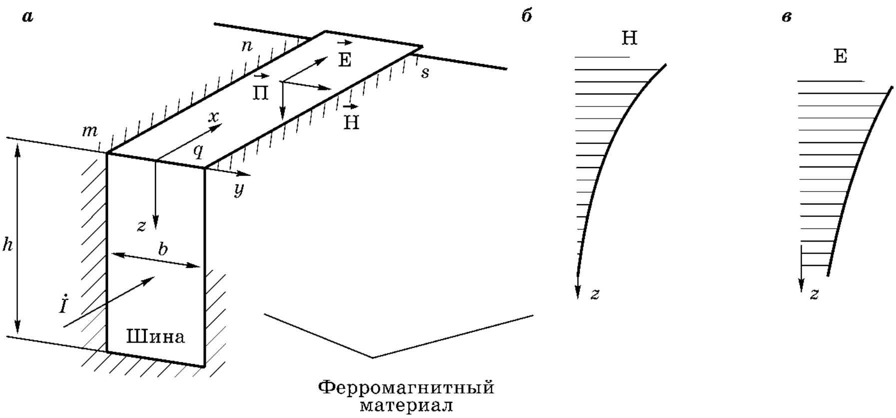


Рис. 21.1
Шина в пазу электрической машины

Расположим оси декартовой системы координат в соответствии с рис. 21.1*а*. Обозначим: $\dot{I}$ — ток по шине, b — ширина, h — высота паза. Магнитная проницаемость шины μ. Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором находится паз, полагаем очень большой, теоретически стремящейся к бесконечности. При этом допущении индукция в ферромагнитном материале будет конечна, а напряженность поля в нем будет стремиться к нулю. В шине вектор магнитной напряженности $\dot{\vec{H}}$ направлен по оси Oy, $\dot{\vec{E}}$ — по оси Ox.

Вектор Пойнтинга направлен по оси Oz. Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность $mnsq$ и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде.

По закону полного тока при $z = 0$ $\dot{H} = \dot{I}/b$, а при $z = h$ $\dot{H} = 0$. Для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ в выражении

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{pz} + \dot{A}_2 e^{-pz} \qquad (21.1)$$

составим два уравнения:

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{I}/b, \quad \dot{A}_1 e^{pz} + \dot{A}_2 e^{-ph} = 0.$$

После определения $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ и подстановки их в (21.1) получим

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{b}\frac{\operatorname{sh} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}, \quad \dot{\vec{E}} = \vec{i}\dot{E}_x = \vec{i}\dot{E}, \tag{21.2}$$

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p}{\gamma}\frac{\dot{I}}{b}\frac{\operatorname{ch} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}, \quad \dot{\vec{\delta}} = \gamma\dot{\vec{E}}. \tag{21.3}$$

Графики модулей H и E по высоте шины изображены на рис. 21.1*б*, *в*.

21.1.3. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ

Предположим, что характеристики ЭМП изменяются во времени по гармоническому закону. Совместим ось z круговой цилиндрической системы координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью провода (рис. 21.2). Провод считаем длинным, что позволяет пренебречь краевыми эффектами (пренебречь изменениями по оси z) и рассматривать изменения характеристик лишь по радиусу r (из-за симметрии проводника характеристики поля не зависят от угла φ). Электрическая напряженность $\dot{\vec{E}}$ ЭМП имеет только осевую составляющую $\{0, 0, \dot{E}_z\}$, а магнитная напряженность $\dot{\vec{H}}$ — только касательную составляющую $\{0, \dot{H}_\varphi, 0\}$. Нам необходимо определить, как изменяются плотность тока $\dot{\vec{\delta}}$ и $\dot{\vec{H}}$ по радиусу проводника r. Пренебрежем влиянием обратного провода.

Исходные уравнения Максвелла запишем в виде

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}}, \quad \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -\frac{\partial\mu\vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}. \tag{21.4}$$

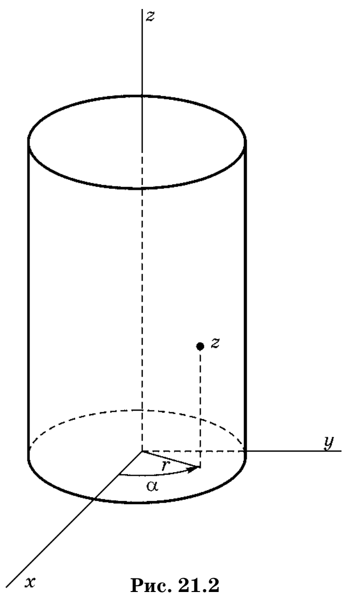


Рис. 21.2
Круговой цилиндрический проводник

Принимая во внимание, что в проводнике основным током при частотах в силовой электроэнергетике ($f < 10^4$ Гц) является ток проводимости, т. е. $\dot{\vec{\delta}} = \gamma\dot{\vec{E}}$, следовательно, $\operatorname{rot}\dot{\vec{\delta}} = -j\omega\mu\gamma\dot{\vec{H}}$, после преобразований вида

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{\delta}} = -j\omega\mu\gamma\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = -j\omega\mu\gamma\dot{\vec{\delta}}. \tag{21.5}$$

Учитывая известное выражение векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{\delta}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{\delta}} - \Delta\dot{\vec{\delta}}$$

и подставляя его в (21.5), считая, что $\operatorname{div}\dot{\vec{\delta}} = 0$, получим

$$\Delta\dot{\vec{\delta}} = j\omega\mu\gamma\dot{\vec{\delta}}. \tag{21.6}$$

Если теперь подставим в (21.6) выражение векторного лапласиана в круговой цилиндрической системе координат r, φ, z из приложения, то получим

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega\mu\gamma\dot{\delta}. \tag{21.7}$$

Поскольку плотность электрического тока изменяется только по радиальной координате, то мы в (21.7) перешли к скалярному уравнению для комплексных величин и от частных производных — к полным производным. Если ввести обозначение $q^2 = -j\omega\mu\gamma$, то (21.7) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{\delta}}{dr}+q^2\dot{\delta}=0$$

или

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{d(qr)^2}+\frac{1}{qr}\frac{d\dot{\delta}}{d(qr)}+\dot{\delta}=0. \tag{21.8}$$

Уравнение (21.8) представляет уравнение Бесселя при $x = qr$ и $y=\dot{\delta}$, его решение (например, [21.2]) записывается в виде

$$\dot{\delta}=\dot{A}J_0(qr)+\dot{B}N_0(qr), \tag{21.9}$$

где $J_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода, $N_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)\to\infty$ при $qr\to 0$ $(r\to 0)$, что противоречит физическим представлениям. Поэтому принимаем $\dot{B}\equiv 0$. Тогда

$$\dot{\delta}=\dot{A}J_0\left(qr\right).$$

Магнитная напряженность $\dot{H}$ находится из уравнения

$$\dot{\bar{H}}=\frac{1}{q^2}\mathrm{rot}\,\dot{\bar{\delta}}$$

в виде

$$\dot{H}=-\frac{1}{q^2}\frac{d}{dr}[\dot{A}J_0(qr)]=-\frac{\dot{A}}{q^2}\frac{d[J_0(qr)]}{dqr}\frac{dqr}{dr}=-\frac{\dot{A}}{q^2}q[-J_1(qr)],$$

т. е.

$$\dot{H}=\frac{\dot{A}}{q}J_1(qr), \tag{21.10}$$

где $J_1(qr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Для определения постоянной интегрирования $\dot{A}$ воспользуемся законом полного тока. При $r = a$

$$\frac{\dot{I}}{2\pi a}=\frac{\dot{A}}{q}(J_1(qa)),$$

откуда

$$\dot{A}=\frac{\dot{I}q}{2\pi aJ_1(qa)}.$$

Тогда

$$\dot{\delta}=\frac{q\dot{I}J_0(qr)}{2\pi aJ_1(qa)},\quad \dot{H}=\frac{\dot{I}J_1(qr)}{2\pi aJ_1(qa)}. \tag{21.11}$$

В центре провода $(r = 0)$ — $J_0(0) = 1$:

$$\dot{\delta}_0=\frac{q\dot{I}}{2\pi aJ_1(qa)},\quad \dot{\delta}=\dot{\delta}_0J_0(qr).$$

Таблица 21.1

Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$, $J_1(qr)$

$r\sqrt{\omega\gamma\mu}$	b_0	β_0	B_1	β_1	$r\sqrt{\omega\gamma\mu}$	b_0	β_0	B_1	β_1
0	1	0	0	–45,00	6	11,501	219,62	10,850	133,45
1	1,015	14,22	0,501	–37,84	7	21,548	260,29	20,50	173,51
2	1,229	52,28	1,041	–16,73	8	40,82	300,92	39,07	213,69
3	1,95	96,52	1,80	+15,71	9	77,96	341,52	74,97	253,95
4	3,439	138,19	3,173	53,90	10	149,8	382,10	144,58	294,27
5	6,231	178,93	5,812	93,55					

Комплексные функции Бесселя $J_0(qr)$, $J_1(qr)$ можно представить в экспоненциальной форме в виде

$$J_0(qr) = b_0 e^{j\beta_0}, \quad J_1(qr) = b_1 e^{j\beta_1},$$

где b_0, b_1 — модули; β_0, β_1 — аргументы функций. Их значения даны в табл. 21.1.

21.1.4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ МАГНИТНЫЙ ЭФФЕКТ В ПЛОСКОМ ФЕРРОМАГНИТНОМ ЛИСТЕ

Для уменьшения потерь на вихревые токи и для более равномерного распределения магнитного потока по сечению магнитопроводы мощных электротехнических устройств (электрических машин, трансформаторов и т. д.) собираются из ферромагнитных листов, изолированных друг от друга. Рассмотрим, как распределяется магнитный поток в одном из таких листов.

Пусть в плоском листе толщиной a, высотой h и длиной l направление магнитного потока совпадает с осью Oy (см. рис. 21.3*а*) и магнитный поток изменяется во времени синусоидально. Как и в расчете, при равномерном распределении потока по сечению принимается, что $h \gg a$, $l \gg a$ и γ — const. Тогда искажением поля у краев пластины можно пренебречь и считать, что в пластину с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна, для которой справедливы уравнения (21.4). Следовательно, опуская индексы x и y, можно написать:

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{-pz} + \dot{A}_2 e^{pz}, \quad \dot{E} = -\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{d\dot{H}}{dz}, \tag{21.12}$$

где по-прежнему $p = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)k$.

Соответственно комплексное значение индукции

$$\dot{B} = \dot{A}_1 \mu e^{-pz} + \dot{A}_2 \mu e^{pz}. \tag{21.13}$$

Поскольку электромагнитные волны входят в лист с двух сторон, то значения индукции $\dot{B}$ при $z = \pm 0{,}5a$ равны между собой. Это приводит к равенству $\dot{A}_2 = \dot{A}_1$.

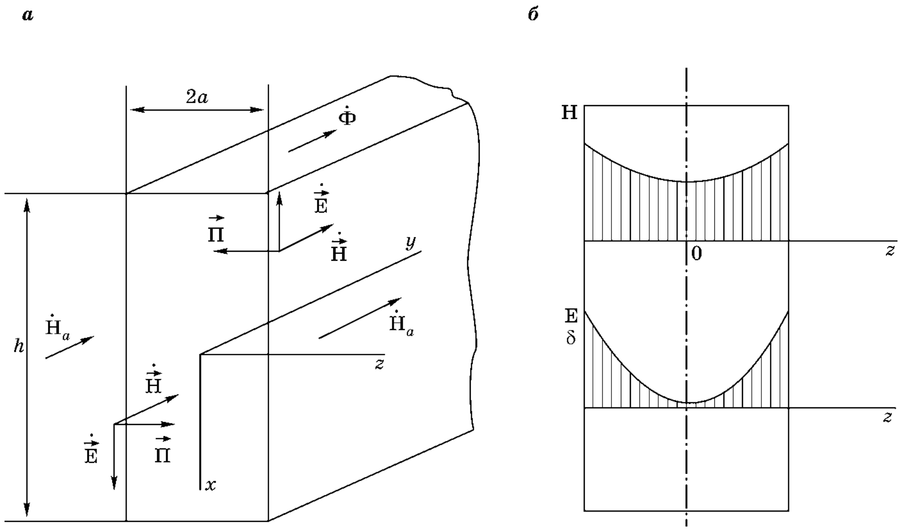


Рис. 21.3
Плоский ферромагнитный лист

Таким образом,

$$\dot{B} = \dot{A}_1\mu(e^{-pz} + e^{pz}) = 2\dot{A}_1\mu \operatorname{ch} pz = \dot{B}_0 \operatorname{ch} pz, \tag{21.14}$$

$$\dot{\delta} = \gamma\dot{E} = -\frac{d\dot{H}}{dz} = -\frac{\dot{B}_0 p}{\mu}\operatorname{sh} pz, \tag{21.15}$$

где $\dot{B}_0 = 2\dot{A}_1\mu$ — комплексное действующее значение индукции в середине сечения листа ($z = 0$).

Среднее значение комплексного действующего значения вектора магнитной индукции

$$\dot{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{a}\int\limits_{-0,5a}^{0,5a} \dot{B}dz = \frac{\dot{B}_0}{a}\int\limits_{-0,5}^{0,5a} \operatorname{ch} pzdz = 2\frac{\dot{B}_0}{pa}\operatorname{sh}\frac{pa}{2}. \tag{21.16}$$

Переход от комплексов к действующим значениям требует вычисления модулей комплексов shpz, chpz и p:

$$|\operatorname{sh} pz|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz)\operatorname{sh}(kz - jkz) = 0,5(\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz),$$

$$|\operatorname{ch} pz|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz)\operatorname{ch}(kz - jkz) = 0,5(\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz),$$

$$|p| = \sqrt{2}k.$$

Таким образом,

$$B = B_0\sqrt{0,5(\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz)}, \quad \delta = \frac{kB_0}{\mu}\sqrt{0,5(\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz)},$$

$$B_{\text{ср}} = \frac{B_0}{ka}\sqrt{\operatorname{ch} ka - \cos ka}.$$

Наибольшее значение индукция имеет у поверхности листа:

$$B_e = B_0\sqrt{0{,}5(\operatorname{ch}ka + \cos ka)}. \qquad (21.17)$$

Зависимости действующих значений вектора магнитной индукции и вектора плотности тока от координаты z представлены на рис. 21.3*б*.

При значении параметра $ka = \sqrt{0{,}5\omega\mu\gamma}\,a = 2$, что может быть при $f = 400$ Гц, $\mu = 1000\mu_0$, $\gamma = 10^7$ Сим/м и $a = 0{,}5$ мм, отношение $B_e/B_0 = 1{,}3$, но уже при $ka = 4$, т. е. $a = 1$ мм, $B_e/B_0 = 3{,}7$. Поэтому неравномерность распределения магнитного потока по сечению может считаться допустимой при значениях $ka < 2$.

Мощность потерь на вихревые токи в единице объема листа:

$$P_0 = \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{\omega B_0^2}{2\mu}(\operatorname{ch}2kz - \cos 2kz) = \frac{\omega k^2 a^2 B_{cp}^2}{2\mu}\cdot\frac{\operatorname{ch}2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch}ka - \cos ka}. \qquad (21.18)$$

Потери во всем листе:

$$P = \int\limits_{-0{,}5a}^{0{,}5a} P_0 lhdz = B_{cp}^2\,\frac{\omega ka}{2\mu}\cdot\frac{\operatorname{sh}ka - \sin ka}{\operatorname{ch}ka - \cos ka}. \qquad (21.19)$$

При $ka \ll 1$ эти потери определяются формулой

$$P_{0cp} = \frac{\pi^2}{3} f^2 \gamma a^2 B_{cp}^2, \qquad (21.20)$$

совпадающей с выведенной в предположении равномерного распределения потока.

Так как $ka = \sqrt{0{,}5\omega\mu\gamma}a$, то при увеличении частоты для сохранения той же величины потерь приходится уменьшать толщину листа или применять прессованные сердечники из ферритов.

21.2. ЭФФЕКТ БЛИЗОСТИ ДЛЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОКОПРОВОДЯЩИХ ШИН

Рассмотренное неравномерное распределение магнитного потока и тока по сечению проводника относится к уединенному проводнику. Если близко расположены несколько проводников с переменными токами, то неравномерное распределение тока в каждом из проводников будет определяться не только его собственным полем, но и полями остальных проводников. Это явление называется эффектом близости и имеет существенное значение для некоторых электротехнических устройств.

Пусть две плоские шины толщиной a, высотой $h \gg a$ расположены параллельно друг другу на расстоянии $b \ll h$ (см. рис. 21.4).

Длина шин $l \gg b$ и искажения поля у концов и краев шин в расчете не учитываются. Материал, из которого изготовлены шины, обладает постоянными магнитной проницаемостью μ и удельной проводимостью γ. По шинам протекают в разных направлениях токи $\dot{I}$ частоты ω, одинаковые по величине.

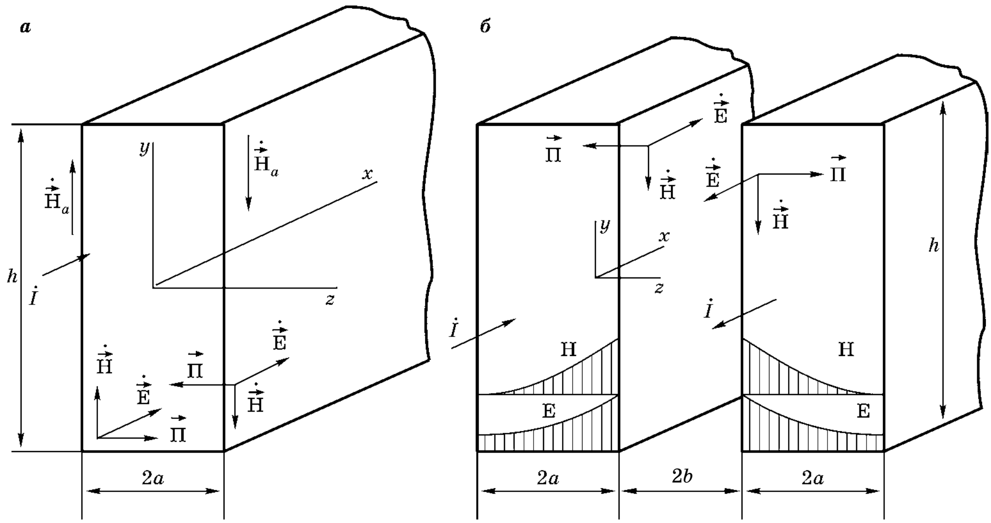


Рис. 21.4
Две плоские параллельно расположенные шины

Оси координат указаны на рис. 21.4*а*. Начало координат находится посередине между шинами.

При принятых условиях поле является плоскопараллельным и вектор $\dot{H}$ имеет практически лишь одну составляющую $\dot{H}_y = \dot{H}$. Все величины являются функцией только одной координаты x.

Так же как и в п. 21.1.2, общее решение уравнения для комплексного действующего значения напряженности МП имеет вид

$$\dot{H} = \dot{A}_1 e^{-px} + \dot{A}_2 e^{px}, \tag{21.21}$$

где $p = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$.

Из закона полного тока, примененного к двум контурам, один из которых охватывает одну шину, а другой — обе шины, следует, что напряженность поля между шинами неизменна и равна $\dot{I}/h$. А на внешних поверхностях обеих шин равна нулю из-за взаимной компенсации обеих шин.

Таким образом, для правой шины при $x = 0{,}5b$:

$$\dot{A}_1 e^{-0{,}5pb} + \dot{A}_2 e^{0{,}5pb} = \frac{\dot{I}}{h}, \tag{21.22}$$

при $x = 0{,}5b + a$:

$$\dot{A}_1 e^{-p(0{,}5b+a)} + \dot{A}_2 e^{p(0{,}5b+a)} = 0. \tag{21.23}$$

Из уравнений (21.19), (21.20) находят постоянные интегрирования:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{e^{0{,}5pb}}{1 - e^{-2pa}}, \quad \dot{A}_2 = -\frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{e^{-p(0{,}5b+2a)}}{1 - e^{2pa}}. \tag{21.24}$$

Следовательно,

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2pa}} [e^{-p(x-0{,}5b)} - e^{p(x-0{,}5b-2a)}]. \tag{21.25}$$

Вектор плотности тока $\dot{\delta}$ имеет лишь одну составляющую $\dot{\delta}_z = \dot{\delta}$, поэтому

$$\dot{\delta} = \frac{d\dot{H}}{dx} = -\frac{\dot{I}}{h} \cdot \frac{p}{1 - e^{-2pa}} \left[e^{-p(x-0,5b)} + e^{p(x-0,5b-2a)} \right]. \qquad (21.26)$$

Для левой шины получаются аналогичные формулы.

Из выражения для плотности тока (21.26) видно, что распределение тока по сечению шины несимметрично по отношению к оси симметрии ее сечения. Плотность тока больше у внутренней поверхности (рис. 21.4*б*). При этом возрастает активное сопротивление шин. Из-за сближения прямого и обратного токов уменьшается площадь контура, а следовательно, и его индуктивность.

При одинаковом направлении токов в обеих шинах плотность тока будет наименьшей у внутренних поверхностей шин и наибольшей — у наружных.

Эффект близости используется в индукционном поверхностном нагреве. Если контур с током высокой частоты (индуктор) приблизить к поверхности нагреваемого тела, то вблизи поверхности возникает индуктированный ток. Из-за эффекта близости путь индуктированного в теле тока повторяет форму индуктора, так как индуктированный в теле ток находится в противофазе с током индуктора. Тем самым создается нагрев поверхности в требуемых местах. Этот метод широко используется для поверхностной закалки стальных изделий сложной формы.

21.3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ

Рассмотрим передачу энергии по коаксиальному кабелю длиной l от генератора с постоянной ЭДС E к нагрузке с сопротивлением R_H (рис. 21.5). Удельная проводимость внутренней жилы кабеля и наружного цилиндра (оболочки) — γ.

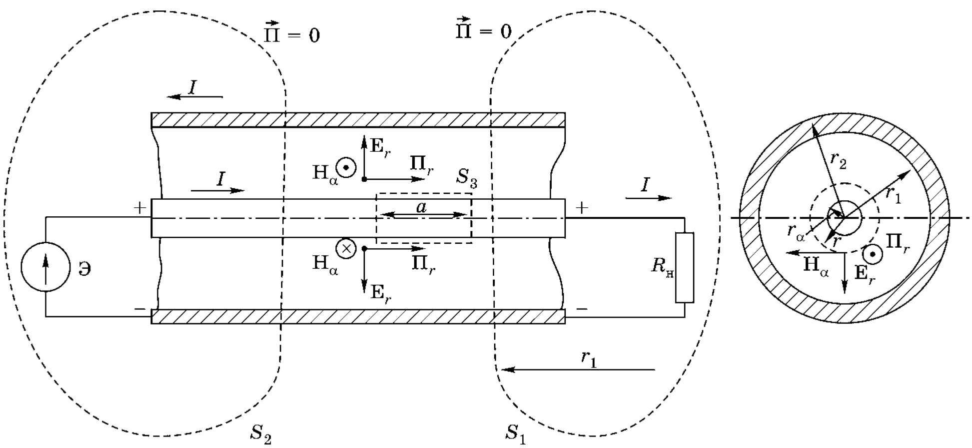


Рис. 21.5
Распространение ЭМП в коаксиальном кабеле

Для того чтобы судить о распространении энергии в пространстве, необходимо найти вектор Умова–Пойнтинга в сечении, перпендикулярном оси кабеля на расстоянии z от его конца.

Ток в кабеле находится в виде

$$I = \frac{E}{R_H + R_K},$$

где

$$R_K = \frac{l}{\pi\gamma r_0^2} + \frac{l}{\pi\gamma(r_2^2 - r_1^2)} = lR_0 \qquad (21.27)$$

представляет собой сумму сопротивлений внутренней жилы и оболочки кабеля, а R_0 — сопротивление единицы длины кабеля.

Напряжение между жилой и оболочкой в рассматриваемом сечении:

$$U_1 = I(R_H + R_0 z_1). \qquad (21.28)$$

Радиальная составляющая напряженности ЭП в любой точке изолирующего слоя на расстоянии r от оси кабеля в этом сечении:

$$E_r = \frac{U_1}{r\ln\frac{r_1}{r_0}} \quad \text{при} \quad r_0 < r < r_1. \qquad (21.29)$$

Кроме радиальной составляющей, напряженность поля в изолирующем слое имеет и осевую (продольную) составляющую E_z. Вне кабеля $E_r = 0$ при $r > r_2$.

Напряженность МП в изолирующем слое по закону полного тока:

$$H = H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}, \qquad (21.30)$$

и направлена перпендикулярно радиусу r рассматриваемой точки и оси кабеля. Вне кабеля $H = 0$. Зная плотность тока в жиле

$$\delta_{1z} = \frac{I}{\pi r_0^2} \qquad (21.31)$$

и в оболочке

$$\delta_{2z} = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \qquad (21.32)$$

можно найти осевую составляющую напряженности ЭП в жиле и в оболочке:

$$E_{1z} = \frac{1}{\gamma}\delta_{1z}, \quad E_{2z} = \frac{1}{\gamma}\delta_{2z}. \qquad (21.33)$$

На поверхностях жилы и оболочки согласно граничным условиям нормальная составляющая напряженности ЭП разрывается, и если в изоляции напряженность ЭП имеет значительную радиальную составляющую E_r, то в проводнике $E_r = 0$.

Напряженность МП внутри проводов направлена так же, как и в изоляции, и по закону полного тока

$$H = H_\alpha = \frac{Ir}{2\pi r_0^2} \quad \text{при} \quad r < r_0,$$

$$H = H_\alpha = \frac{I(r_2^2 - r^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)} \quad \text{при} \quad r_2 > r > r_1. \tag{21.34}$$

Найдем теперь вектор Умова–Пойнтинга $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$ в различных точках кабеля. Вектор $\vec{\Pi}$ имеет две составляющие: осевую Π_z, определяемую радиальной составляющей напряженности ЭП — E_r, так что $\Pi_z = E_r H_\alpha = E_r H$, и радиальную составляющую Π_r, определяемую осевой составляющей напряженности ЭП — E_z, так что $\Pi_r = E_z H_\alpha = E_z H$ (рис. 21.6).

В изоляции кабеля радиальная составляющая напряженности ЭП практически всегда значительно превышает осевую, и, следовательно, осевая составляющая вектора Умова–Пойнтинга по мере удаления от оси кабеля убывает обратно пропорционально квадрату радиуса:

$$\Pi_z = \frac{U_1 I}{2\pi r^2 \ln(r_1 / r_2)}. \tag{21.35}$$

Таким образом, электромагнитная энергия, распространяясь вдоль кабеля, имеет большую плотность ближе к внутренней жиле кабеля.

Наличие хотя и небольшой осевой составляющей напряженности ЭП приводит к тому, что вблизи поверхности проводника и внутри него имеется радиальная составляющая вектора Умова–Пойнтинга Π_r.

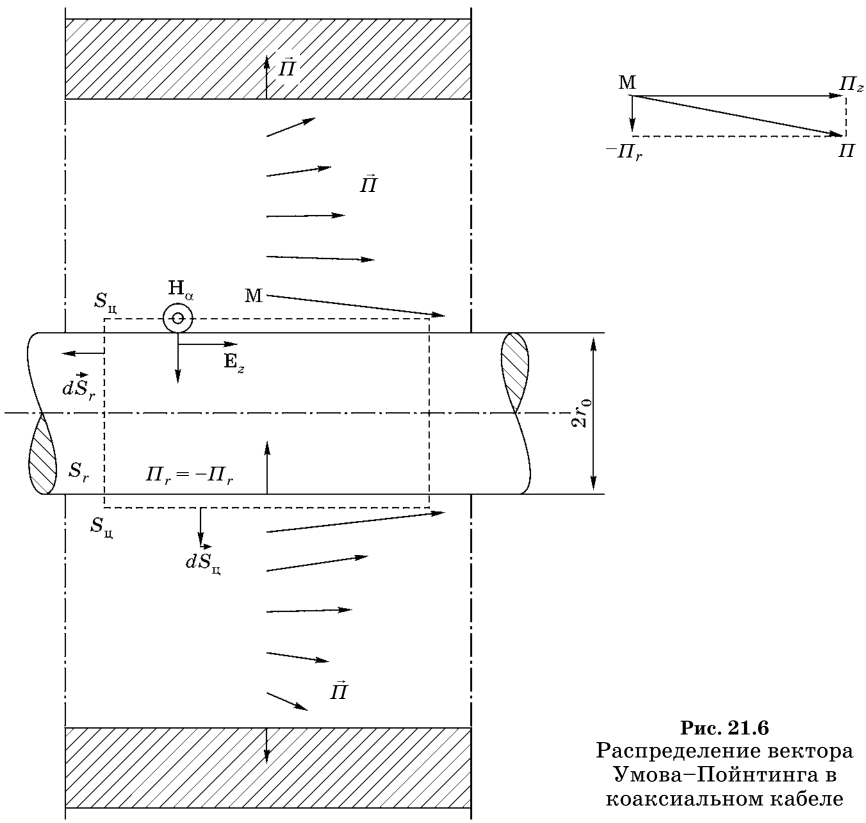


Рис. 21.6
Распределение вектора Умова–Пойнтинга в коаксиальном кабеле

Эта составляющая вектора $\vec{\Pi}$ направлена внутрь проводов кабеля и выражает собой плотность потока энергии, идущей в единицу времени на нагрев проводов кабеля. Естественно, чем больше γ, тем меньше эта составляющая. Внутри проводов $\Pi_z = 0$, так как $E_r = 0$.

На рис. 21.6 схематически показан вектор Умова–Пойнтинга в изоляции, в жиле и в оболочке кабеля.

Рассмотрим несколько различных замкнутых поверхностей и убедимся, что поток вектора Умова–Пойнтинга, входящий внутрь этих поверхностей, равен мощности, потребляемой внутри этих поверхностей.

Для поверхности S_1 (см. рис. 21.5) поток вектора Умова–Пойнтинга, входящий внутрь этой поверхности, выразится в виде

$$\int_{r_0}^{r_1} \Pi_z 2\pi r dr = \int_{r_0}^{r_1} \frac{U_1 I}{r \ln(r_1 / r_0)} dr = U_1 I. \qquad (21.36)$$

Интегрирование производилось только в пределах изоляции кабеля, так как внутри проводов вектор $\vec{\Pi}$ лежит в плоскости интегрирования нормальной оси кабеля $\vec{\Pi} = \mathrm{P}_r$, а вне кабеля $H = 0$ и, следовательно, $\vec{\Pi} = 0$. Результат интегрирования дает общую мощность, выделяющуюся в нагрузке и в проводах кабеля внутри поверхности интегрирования.

Для поверхности S_2 аналогично (21.35) поток вектора $\vec{\Pi}$, входящий внутрь этой поверхности, равен $U_2 I$. Отрицательный знак означает, что потребление мощности внутри области интегрирования отрицательно или что в данном объеме вырабатывается энергии больше, чем потребляется.

Для поверхности S_3, окружающей участок внутренней жилы кабеля длиной a, получаем, что на торцевых участках поверхности $(S_{\text{T}} = \pi r_0^2)$ вектор $\vec{\Pi}$ лежит в плоскости интегрирования $\Pi_z = 0$, $\vec{\Pi} = \Pi_r$, а на остальной цилиндрической части поверхности ($S_{\text{ц}} = 2\pi r_0 a$) его радиальная составляющая Π_r нормальна к поверхности интегрирования и постоянна по величине:

$$-\Pi_r = -E_{1z} H_\alpha = -\frac{I^2}{2\pi^2 \gamma r_0^3}. \qquad (21.37)$$

В таком случае, интегрируя вектор Умова–Пойнтинга по поверхности S_3, получаем

$$-\oint_{S_3} \vec{\Pi} d\vec{s} = -\int_{S_T} \vec{\Pi} ds - \int_{S_{\text{ц}}} \vec{\Pi} ds = 0 - \int_{S_{\text{ц}}} -\Pi_r ds = \Pi_r S_{\text{ц}} = \frac{I^2 a}{\pi \gamma r_0^2}, \qquad (21.38)$$

здесь первый интеграл обращается в нуль, так как $\vec{\Pi} \perp S_T$. Следовательно, поток вектора Умова–Пойнтинга, входящий через рассматриваемую поверхность S_3, равен мощности, идущей на нагрев участка жилы, находящегося внутри поверхности S_3.

Из этого примера видно, что распространение электромагнитной энергии от источника к потребителю не происходит по проводам, как это иногда неправильно говорится. Энергия движется в пространстве вдоль проводов, а провода являются направляющими, концентрирующими передаваемую энергию и поглощающими ее часть, идущую на их нагрев. Если воспользоваться аналогией между передачей электроэнергии «по проводам» и движением воды в канале, то прилегающая к проводам непроводящая среда является вместилищем электромагнитной энергии и аналогична объему, заполняемому водой в канале, а поверхность проводов аналогична поверхности воды в канале. Расход электрической энергии на нагрев проводов аналогичен потерям воды, просачивающейся в грунт берегов и дна канала, а также испаряющейся с ее открытой поверхности.

Теорема Умова–Пойнтинга дает возможность судить о передаче и распространении электромагнитной энергии как в линиях электропередач, так и в различных электротехнических устройствах.

Контрольные вопросы

1. Что такое электрический поверхностный эффект?
2. Что такое магнитный поверхностный эффект?
3. Что такое эффект близости?
4. Как рассчитать электрический поверхностный эффект?
5. Что происходит с активным сопротивлением среды при наличии электрического поверхностного эффекта?
6. При каких частотах проводник не проводит ток?
7. Как распространяется электромагнитная энергия по коаксиальному кабелю?
8. Что представляет собой вектор Умова–Пойнтинга, и как его рассчитать?

22

ГЛАВА 22

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

22.1. СОВМЕСТИМОСТЬ В ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Под совместимостью в дальнейшем будем понимать способность двух или более технических элементов систем работать совместно, с высокой степенью эффективности и надежности. Конечно, некоторые функции и параметры элементов систем при этом могут претерпевать те или иные изменения, но это не должно приводить к отрицательному эффекту, т. е. к ухудшению качества работы элементов. Совместимость может быть разная: акустическая, электромагнитная, тепловая и т. д.

Чтобы разработать набор электротехнических устройств, являющихся комплектующими элементами современной ЭЭС и эффективно реализующими свое техническое предназначение, необходимо еще на стадии проектирования решить проблему многокритериальной оптимизации структуры как для каждого технического устройства, так и для их совокупности. Эта проблема включает решение ряда задач. Среди них: обеспечение минимальной достаточности функционально-структурного состава энергетического и информационно-управляющего оборудования; удовлетворение условиям надежности, продолжительности работы и безопасности функционирования в условиях внутрисистемных и внесистемных воздействий; достижение технико-экономической эффективности; снижение производственных и эксплуатационных затрат; обеспечение электротехнической совместимости и т. д. К электротехнической совместимости относят [22.1], прежде всего, электроэнергетическую, электромагнитно-сигнальную, электромагнитную совместимости и стойкость к мощным электромагнитным импульсам. Здесь под электроэнергетической совместимостью понимают совместимость по видам, параметрам, качеству, отказам электропитания и аварийным режимам в системах электроснабжения. Под электромагнитно-сигнальной совместимостью — совместимость по видам, параметрам, качеству, сбоям сигналов в информационно-управляющих системах; под электромагнитной совместимостью (ЭМС) — способность высокочувствительных элементов автоматики и вычислительных комплексов функционировать совместно и одновременно с другими устройствами при воздействии непреднамеренных электромагнитных помех и электромагнитных импульсов.

Стойкость к электромагнитным импульсам оценивается по способности эффективно функционировать после воздействия молний и мощных разрядных процессов. Но необходимости вводить новое понятие [22.2] «электротехническая совместимость» нет, так как в самом понятии ЭМС находят место все перечисленные виды совместимости. Стоит лишь вспомнить, что электромагнитный процесс может протекать по-разному, в зависимости от видов воздействия на систему (или отдельные технические средства) и электрофизических параметров самой системы (или отдельных технических средств). Под воздействием здесь необходимо понимать как внутрисистемные воздействия, такие как переходные режимы в самой системе, связанные с изменениями в работе отдельных технических средств, так и изменения электрофизических параметров отдельных технических средств, подсистем или ЭЭС в целом, и внесистемные воздействия, к которым необходимо отнести непреднамеренные электромагнитные помехи, электромагнитные импульсы и т. д. Поэтому в дальнейшем будем использовать лишь термин ЭМС (которая должна быть обеспечена на всех стадиях проектирования, изготовления, испытания и эксплуатации электрооборудования). Далее речь пойдет об ЭЭС любой по сложности и габаритам, в том числе и транспортной. Дело в том, что в транспортной ЭЭС к обеспечению требований ЭМС необходимо подходить с большей ответственностью из-за ограниченных размеров энергетических помещений, что приводит дополнительно к усложнению условий размещения всей совокупности технических средств.

В отличие от ранее публиковавшихся материалов только по ЭМС технических средств считаем необходимым расширить это понятие. А именно, включить в него и человека — того, кто управляет ЭЭС. Ведь от него в значительной мере зависит эффективное функционирование ЭЭС в целом. Не случайно отмечают, что большинство современных техногенных катастроф (в том числе и Чернобыльская) связано с некомпетентным управлением персонала техническими средствами.

В последние десятилетия человечество все больше стремится совершенствовать электротехнические системы. С целью увеличения эффективности их работы усиливается внимание к надежности, продолжительности работы и безопасности как системы в целом, так и составляющих ее подсистем и отдельных элементов. Однако по мере усложнения и развития автоматизированных систем контроля и управления ими эти показатели не только не увеличивались, но в ряде случаев и снижались. В значительной мере такое связано с двумя обстоятельствами. Первое: ухудшение качества электрической энергии, питающей систему, появление внешних полей помех (в основном электромагнитных), воздействующих на высокочувствительные элементы автоматики, линии связи, вычислительные комплексы и т. д. Второе: ошибки

Таблица 22.1

Вероятность безотказной работы последовательной технической системы

Особенности технической системы	Формула для расчета вероятности безотказной работы
Система из N элементов без учета внешних воздействий	$P_c^{(1)} = \prod_{i=1}^{i=N} P_i(t),\ \ i \in [1, N]$, где $P_i(t)$ — вероятность безотказной работы i элемента
Система из N элементов с учетом человека как элемента системы	$P_c^{(2)}(t) = P_0(t)\prod_{i=1}^{i=N} P_i(t)$, где $P_0(t)$ — вероятность безотказной работы оператора
Система из N элементов с учетом ЭМС	$P_c^{(3)}(t) = \prod P_i^{\bullet}(t)$, где $P_i^{\bullet}(t) < P_i\ (t)$ — вероятность безотказной работы i элемента с учетом ЭМС
Система из N элементов с учетом ЭМС и электромагнитной экологии	$P_c^{(4)}(t) = P_0^{\bullet}(t)\prod P_i^{\bullet}(t)$, где $P_0^{\bullet}(t) < P_0(t)$ — вероятность безотказной работы оператора с учетом ЭМС и электромагнитной экологии

операторов, обслуживающих систему. Перед конструкторами-разработчиками и инженерами-эксплуатационниками встали две группы задач. Одна группа задач связана с проблемами ЭМС. Вторая — с проблемами эргономики. Решать их необходимо было совместно. Это позволило снова выйти на сравнительно высокие показатели надежности, живучести и безопасности. Проходило время, усложнялись и совершенствовались системы, а снижение показателей надежности их работы наблюдалось все чаще. Стали снова наблюдаться сбои в работе энергетических комплексов. Было установлено, что снижение показателей надежности энергетических комплексов происходит из-за ухудшения качества работы операторов. Будучи элементами системы, они не справлялись со своими обязанностями (быстрое утомление, пониженная внимательность и т. д.). И связано это было с воздействием на них внешних физических полей, создаваемых тем же электрооборудованием, которым они управляли. Для примера в табл. 22.1 [22.3] приведены формулы для расчета вероятности безотказной работы последовательной технической системы.

Если учесть, что $P_i(t)$, $P_0(t)$ всегда ограничены пределами [0, 1], т. е. $0 < P_i(t), P_0(t) \le 1$, то сомнений в снижении вероятности безотказной работы такой системы не возникает. Аналогичный вывод можно применить к технической системе любой сложности.

22.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СРЕДА И ЕЕ ФОРМИРОВАНИЕ

В энергетическом помещении устанавливается разнородное электрооборудование. Прежде всего, это сильноточное, являющееся источниками ЭП, МП и ЭМП широкого частотного спектра оборудование. К нему относятся: электрические машины, кабели, распределительные щиты, трансформаторы, статические и электромашинные преобразователи и др. Также здесь размещено и слаботочное оборудование: пульты управления, системы автоматики, информационные линии, приборы и счетно-вычислительные комплексы, радиоэлектронная аппаратура. Слаботочное оборудование, как правило, является приемниками (рецепторами) ЭМП-помех. В ряде случаев один и тот же элемент оборудования может быть как источником внешних ЭМП, так и рецептором. В результате перекрестного влияния внешних ЭМП от разнородного оборудования создается электромагнитная среда, обладающая определенными магнитной $\vec{H}$ и электрической $\vec{E}$ напряженностями. Величина и фазовая направленность этих напряженностей определяется количеством и интенсивностью источников поля; геометрическими размерами помещения, источников и рецепторов; материалами, используемыми при конструировании.

Электромагнитная среда в энергетическом помещении, создаваемая системой собственных излучателей, существенно может быть скорректирована воздействием сторонних ЭМП-помех (например, молнии). Таким образом, в каждой точке помещения электромагнитная среда будет обладать значительными электрической $\vec{E}$ и магнитной $\vec{H}$ напряженностями, которые могут отрицательно воздействовать на рецепторы, изменяя их параметры и режимы работы. Такое воздействие осуществляется двумя способами: электромагнитной и электростатической индукциями.

В первом случае воздействие помех на рецептор можно рассматривать как связь между двумя электрическими цепями или в более общем случае как связь между двумя электромагнитными системами, имеющими общее МП.

Во втором случае воздействие помех на рецептор можно рассматривать как связь между двумя электростатическими системами, имеющими общее ЭП.

22.3. ПОМЕХИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

22.3.1. МАГНИТНАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ

В электрических цепях ЭЭС, как правило, протекают значительные по величине токи при сравнительно низких напряжениях питания. Это приводит к тому, что в ближней к цепям зоне создаются ЭМП с преобладающей магнитной составляющей. При этом рассматриваемые помехи определяются в ближней зоне магнитной индукцией. Преимущественное влияние таких полей на высокочувствительное оборудование (аппаратуру, слаботочное оборудование) произойдет в случае, если последние не восприимчивы к электрической составляющей. Рассмотрим магнитную связь двух электрических цепей (см. рис. 22.1), которая оценивается их взаимной индуктивностью M, зависящей от индуктивностей источника $L_{\text{и}}$ и рецептора $L_{\text{р}}$ помех, а также от коэффициента связи k_L, т. е.

$$M = k_L \sqrt{L_{\text{и}} L_{\text{р}}}. \tag{22.1}$$

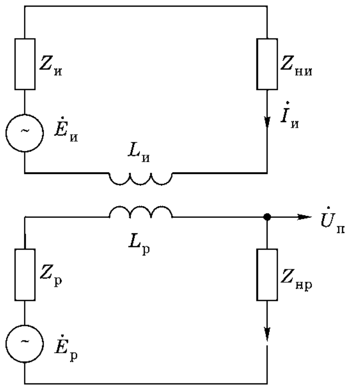


Рис. 22.1
Электрические цепи
с магнитной связью

Если в цепи источника помех протекает синусоидальный ток $\dot{I}_и$ (здесь и в дальнейшем используются комплексные величины) с угловой частотой ω, то в цепи рецептора наводится ЭДС:

$$\dot{E} = -M\frac{d\dot{I}_и}{dt} = -jM\omega\dot{I}_и. \qquad (22.2)$$

Индуктированная ЭДС вызывает в цепи рецептора помех ток, который определяется как

$$\dot{I}_р = -j\omega M\dot{I}_и / (j\omega L_р + z_р + z_{нр}), \qquad (22.3)$$

где $z_р$, $z_и$ — внутренние сопротивления рецептора и источника помех соответственно; $z_{нр}$ — сопротивление нагрузки цепи рецептора.

В результате наведенное напряжение помех на сопротивление нагрузки рецептора:

$$\dot{U}. = -j\omega M\dot{I}_и z_{нр} / (j\omega L_р + z_р + z_{нр}). \qquad (22.4)$$

В области низких частот при $\omega L_р \ll z_р + z_{нр}$ выражение (22.4) примет вид

$$\dot{U}. = j\omega M\dot{I}_и z_{нр} / (z_р + z_{нр}). \qquad (22.5)$$

В соответствии с (22.5) в области низких частот напряжение помех, наводимое в цепи рецептора, увеличивается пропорционально частоте и индуктивности связи между источником и рецептором помех. Если $|z_р| \ll |z_{нр}|$, то напряжение помех

$$\dot{U}. = -j\omega M\dot{I}_и, \qquad (22.6)$$

т. е. цепь переноса помех является дифференцирующей.

В области довольно высоких частот ($\omega L_р \gg |z_р + z_{нр}|$) рост напряжения помех в соответствии с выражением (16.4) ограничивается самоиндукцией:

$$\dot{U}. = -Mz_{нр}\dot{I}_и / L_р = -k_L z_{нр}\dot{I}_и\sqrt{L_и / L_р}. \qquad (22.7)$$

На фиксированной частоте при действии нескольких источников помех на один рецептор (цепи в первом приближении можно считать линейными), используя принцип суперпозиции, получим

$$\dot{U}. = z_{нр}\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{иk}M_k / L_р, \qquad (22.8)$$

где n — число источников помех; $I_{иk}$ — ток k-го источника помех; M_k — индуктивность связи k-го источника с рецептором.

В частном случае настройки резонансного контура на основную частоту или гармонику основной частоты ω мешающего сигнала источника помех (рис. 22.2) ток в цепи рецептора помех:

$$\dot{I}_р = -j\omega M\dot{I}_и / r, \qquad (22.9)$$

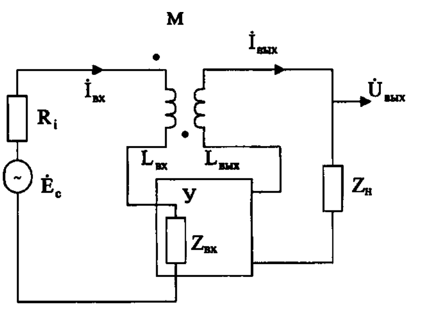


Рис. 22.2
Электрические цепи
с магнитной связью

где r — активное сопротивление цепи рецептора помех.

Наведенное напряжение в цепи, волновое сопротивление которого $z_с = \omega L$, определяется выражением

$$\dot{U}_{\cdot} = I_р j z_с = \omega M Q \dot{I}_и, \tag{22.10}$$

где $Q = \omega L/r$ — добротность контура.

Следовательно, в случае совпадающих или близких друг к другу частот источника и рецептора помех уровень наводимого напряжения прямо пропорционален добротности контура рецептора, и связь по МП оказывается тем опаснее, чем выше добротность используемых контуров.

При случайном характере помех с известным энергетическим спектром, например $F(\omega) = 2a/(1 + \omega^4)$ для дифференцирующей цепи переноса помех, их дисперсия на входе рецептора:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\omega M)^2 \frac{2a}{1+\omega^4} d\omega = aM^2/\sqrt{2}. \tag{22.11}$$

Рассмотрим влияние импульсного МП на нагрузку $K(j\omega) = -j\omega M R_и/(R_и + + j\omega L_р)$, его импульсная характеристика имеет вид

$$g(t) = M[\delta(t) - \exp(-t/\tau_2)/\tau_2]/\tau_2, \tag{22.12}$$

где τ_2 — постоянная времени цепи рецептора помех, $\tau_2 = L_р/R$.

В случае импульсного воздействия в виде скачка постоянного напряжения в цепи источника помех ток источника $I_и = I_0[1 - \exp(-t/\tau_1)$, где $I_0 = E/R_и$ — постоянный ток в цепи источника помех, $\tau_1 = L_и/R_и$ — постоянная времени цепи источника. С учетом (22.1) напряжение помех находится как

$$U_{\cdot}(t) = \int_0^\infty I_и(t-\tau)g(\tau)d\tau = -I_0 M[\exp(-t/\tau_2) - \exp(-t/\tau_1)]/(\tau_2 - \tau_1). \tag{22.13}$$

Согласно (22.13) можно показать, что при $t_m = \tau_1\tau_2 \ln\dfrac{\tau_2/\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$ максимальное напряжение помех на рецепторе

$$U(t)_{\max} = -I_0 M[\exp(-t_m/\tau_2) - \exp(-t_m/\tau_1]. \tag{22.14}$$

Влияние МП-помех в линейном усилителе зависит от коэффициента обратной связи $\dot{\beta}$, обусловленного взаимной индуктивностью M выхода усилителя с его входом, а также его коэффициента усиления $\dot{K}$ (рис. 22.2).

Коэффициент нежелательной индуктивной обратной связи:

$$\dot{\beta} = -[j\omega M/(j\omega L_{вх} + R_i + z_{вх})](z_{вх} z_н).$$

С учетом обратной связи коэффициент усиления устройства определяется как

$$\dot{K}_{ос} = \dot{K}(1 - \dot{K}\dot{\beta}) = \dot{K}/\{1 + [j\omega M\dot{K}/(j\omega L_{вх} + R_i + z_{вх})](z_{вх}/z_н)\}. \tag{22.15}$$

Наличие индуктивной связи в линейном усилителе в зависимости от соотношения параметров (22.15) может приводить к искажению амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик усилителя, а также к его самовозбуждению, т. е. потере устойчивости. Зададим допустимый коэффициент усиления с учетом обратной связи $\dot{K}_{\text{ос}}^{(\text{доп})}$ и найдем допустимый коэффициент обратной связи:

$$\dot{\beta}_{\text{доп}} = (1 - \dot{K} / \dot{K}_{\text{ос}}^{(\text{доп})}) / \dot{K} \tag{22.16}$$

и допустимую индуктивную связь:

$$M_{\text{доп}} = -[\dot{\beta}_{\text{доп}}(j\omega L_{\text{вх}} + R_i + Z_{\text{вх}}) / j\omega](z_{\text{н}} / z_{\text{вх}}). \tag{22.17}$$

Следовательно, чем больше коэффициент усиления усилителя и чем жестче требования, предъявляемые к отклонению $\dot{K}_{\text{ос}}$ от номинального $\dot{K}$, тем меньше допустимое значение коэффициента обратной связи $\dot{\beta}_{\text{доп}}$. Согласно (22.16) для снижения коэффициента обратной связи следует уменьшать магнитную связь выхода усилителя с его входом.

При прочих равных условиях коэффициент обратной связи оказывается меньше при включении источника сигнала в режиме генератора тока, т. е. при $R_i \gg [j\omega L_{\text{вх}} + z_{\text{вх}}]$. Рассмотренный подход применим при проектировании и многокаскадных усилителей с учетом наиболее опасного вида индуктивной связи последнего и первого каскадов. Величина магнитной связи в значительной мере зависит от формы и размеров источника и рецептора. Рассмотрим воздействие источника в виде протяженного провода с током $\dot{I}_{\text{и}}$ на рецептор помех, образующий замкнутый контур цепи длиной l, шириной h, находящийся на расстоянии d от источника помех в плоскости, перпендикулярной МП помех (рис. 22.3). Напряженность МП вокруг провода, по которому протекает ток $\dot{I}_{\text{и}}$ на расстоянии r, $\dot{H} = \dot{I}_{\text{и}} / 2\pi r$. Магнитный поток, пронизывающий контур рецептора:

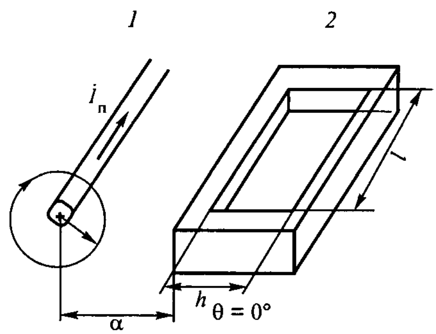


Рис. 22.3
Источник в виде провода с током и рецептор в виде проводящего контура

$$\dot{\Phi} = \int\limits_{d}^{d+h} \mu \dot{H} \cos\theta l dr = \mu l I_{\text{и}} \ln[(d + h/d)] \cos(\theta/2\pi), \tag{22.18}$$

где θ — угол между вектором воздействующего магнитного потока на плоскость, в которой расположен контур цепи рецептора помех, и нормалью к ней.

Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС, индуктированная в контуре рецептора помех, с учетом (22.18):

$$\dot{e} = -d\dot{\Phi}/dt = -j\mu l f \dot{I}_{\text{и}} \ln[(d + h)/d] \cos\theta, \tag{22.19}$$

откуда амплитуда наведенной ЭДС:

$$E_m = \mu l f I_m \ln[(d + h)/d] \cos\theta. \tag{22.20}$$

Таким образом, при заданной компоновке амплитуда наведенной ЭДС в рецепторной цепи прямо пропорциональна магнитной проницаемости среды μ, длине контура рецептора l, амплитуде тока $\dot{I}_{\text{и}}$, его частоте f и зависит от взаимного расположения цепей источника и рецептора помех, определяемых углом θ. Полагая что рассматриваемому случаю (рис. 22.3) соответствует схема замещения на рис. 22.1 и сопоставляя выражения (22.2) и (22.19), находим взаимную индуктивность цепей источника и рецептора помех:

$$M = \mu l \ln[(d + h)/d]\cos(\theta/2\pi). \qquad (22.21)$$

Для ослабления влияния магнитной связи согласно (22.21) необходимо:

1) по возможности компоновать цепи рецепторов помех в плоскости, параллельной направлению воздействующего на них МП помех, что приводит к $M \to 0$ при $\theta \to 90°$;

2) максимально удалять цепи рецепторов и источников помех, что снижает напряженность МП помех в местах расположения восприимчивых цепей аппаратуры и, следовательно, уменьшает M;

3) уменьшать площадь петли, образованной цепью рецептора помех, сокращая длину l и расстояние между проводами h, что снизит магнитный поток, пронизывающий петлю, и, следовательно, M.

22.3.2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ ИСТОЧНИКА И РЕЦЕПТОРА

Рассмотрим электростатическую связь источника и рецептора (рис. 22.4*а*) с помощью схемы замещения (рис. 22.4*б*), на которой действие ЭП помех представлено эквивалентной емкостью связи $C_{св}$.

Если источник синусоидальной ЭДС $\dot{E}_и$ действует на угловой частоте ω, то напряжение помех в цепи рецептора $\dot{U}_п$ определяется как

$$\dot{U}_п = \dot{E}_и \frac{z_р}{z_р + (1/j\omega C_{св})}, \qquad (22.22)$$

где $z_р$ — комплексное сопротивление цепи рецептора помех, состоящее из параллельно включенных входного сопротивления $R_{вх}$ и емкости $C_р$ относительно корпуса.

Если входное сопротивление рецептора помех является чисто активным, т. е. $z_р = R_{вх}$ и $R_{вх} \ll (1/\omega C_р)$, то напряжение помех $\dot{U}_e \approx \dot{E}_и j\omega C_{св} R_{вх}$, иначе говоря, оно прямо пропорционально ЭДС источника помех, его частоте, входному сопротивлению рецептора и емкости связи между источником и рецептором помех. При этом цепь переноса помех является дифференцирующей. В случае $R_{вх} \gg (1/\omega C_{св})$ напряжение помех:

$$\dot{U}_п = \dot{E}_и C_{св}/(C_{св} + C_р). \qquad (22.23)$$

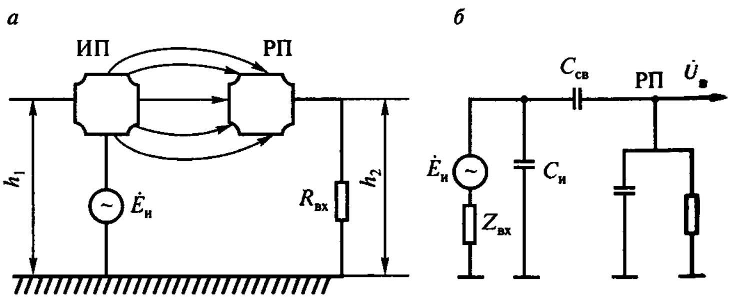


Рис. 22.4
Электростатическая связь источника и рецептора

Обычно $C_р \gg C_{св}$ и, следовательно, согласно (22.23) напряжение помех на рецепторе: $\dot{U}_п \approx \dot{E}_и C_{св} / C_р$. На фиксированной частоте при действии нескольких источников помех на один рецептор помех согласно принципу суперпозиции:

$$\dot{U}_п = \frac{1}{C_р} \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k C_{св}^{(i)}, \qquad (22.24)$$

где n — число источников помех, $\dot{E}_k$ — ЭДС k-го источника помех, $C_{св}^{(i)}$ — емкостью связи i-го источника с рецептором.

Если рецептор является резонансным контуром, настроенным на основную частоту ω или гармонику мешающего сигнала источника помех, то $z_р = z_с/d_э = 1/\omega C_р d_э$, где $C_р$ — емкость контура; $z_с = 1/C_р$ — волновое сопротивление контура; $d_э$ — эквивалентное затухание контура, определенное через добротность контура как $d_э = 1/Q$. На практике $z_р \ll (1//\omega C_{св})$, то согласно (22.22):

$$\dot{U}_п \approx \dot{E}_и jQC_{св} / C_р. \qquad (22.25)$$

Следовательно, как и в случае магнитной связи, связь по ЭП оказывается тем опаснее, чем выше добротность используемых контуров.

22.4. РАСЧЕТ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

При оценке параметров электромагнитной среды в энергетическом помещении может быть использована методика расчета внешних ЭМП источников, создающих помехи работе высокочувствительного оборудования. Эта методика приведена ниже.

Как правило, ЭЭС (или автономная электроустановка) состоит из множества элементов, строгий учет полей которых весьма затруднителен и не всегда необходим. Не все источники равнозначны в создании результирующего ЭМП помех. Поэтому первоочередной задачей следует считать выявление наиболее интенсивных источников ЭМП. Выявить их можно без проведения специальных исследований, учитывая лишь мощности источников, геометрические размеры, свойства оболочек и частотный диапазон. После выявления наиболее интенсивных источников осуществляется их классификация по группам в зависимости от соотношения габаритных размеров, размещения токовых, магнитных зон и т. д. [22.4]. Затем производится расчет ЭМП отдельных источников при заданных режимах работы. Подобные расчеты относятся к прямым задачам электродинамики. Аналитическими или экспериментальными путями определяются составляющие магнитных или электрических напряженностей ЭМП в окружающей источник среде. Решение прямых задач электродинамики по расчету ЭМП хорошо изучено и в большинстве случаев выполнить его не сложно. Однако с целью унификации результатов расчета внешних ЭМП разнородных источников и упрощения их использования при нахождении результирующего ЭМП можно использовать для описания ЭМП отдельных источников математические модели в виде диполей и квадруполей.

Представление ЭМП источников в виде диполей и квадруполей требует решения обратных задач электродинамики. Количество таких задач ограничено, поскольку ЭЭС, как правило, включает однотипные элементы, модели внешнего ЭМП которых могут быть описаны заранее. При построении дипольных и квадрупольных моделей полей не следует ограничиваться формальным применением математических методов, а использовать и физические соображения. Так, известно, что двухполюсные электрические машины создают внешние ЭМП дипольного типа, четырехполюсные — квадрупольного типа, восьмиполюсные — октупольного типа и т. д. Кабельные трассы проще всего моделировать осевыми дипольными моделями и т. д. Использование физических соображений упрощает процесс построения математических моделей внешнего ЭМП источников, примеры нахождения которых известны.

После нахождения ЭМП отдельных источников следует рассчитать результирующее поле с учетом отражений и переотражений на оболочках соседних источников. Использование того или иного метода расчета результирующего поля определяется соотношениями габаритных размеров источников, их взаимного расположения в пространстве, параметров составляющих их материалов. В случае, если источники удалены на большие расстояния друг от друга, можно при расчете использовать метод наложения — суммировать поля отдельных источников без учета взаимного влияния. Соответственно по мере приближения источников друг к другу следует рассчитывать результирующее ЭМП с учетом взаимного влияния: чем ближе источники друг к другу, тем больше источников влияют на распределение результирующего поля.

22.5. СРЕДСТВА СНИЖЕНИЯ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

22.5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Выбор способа или технического средства защиты определяется многими факторами: характером ЭМП, его частотным диапазоном, амплитудно-фазовыми характеристиками, гармоническим составом и т. д.

Для успешного разрешения проблемы требуется соединить комплексный системный подход к проектированию аппаратуры с полным описанием всех факторов, влияющих на генерирование помех и чувствительность к ним. При учете воздействия внешних электромагнитных возмущений на автономный объект уровень сложности решаемых проблем возрастает. Приходится, прежде всего, устанавливать связь между падающими сигналами внешних электромагнитных возмущений и ответными реакциями в каком-то элементе внутри системы. Один из методов для определения этих функций передачи для автономного объекта состоит в разбиении системы на ряд менее сложных и относительно независимых подсистем. Анализ последних провести, как правило, легче. Реакция всей системы может быть определена из результатов анализа частей. Чтобы разбить большую систему на ряд подсистем, удобно рассматривать ее как построенную из некоторого числа проводящих поверхностей, которые ослабляют или экранируют падающую электромагнитную волну по мере ее распространения в систему. Чтобы выполнить разбиение системы, полезно иметь описание топологии защиты или описание того, как расположены в пространстве объекта экранирующие поверхности. При этом сначала определяют число экранирующих поверхностей, через которые проникает энергия электромагнитного возмущения в дискретные или локализованные области.

Если задача анализа включает первый экранирующий слой системы (например, внешняя оболочка устройства), часто применяется термин «внешнее воздействие». Термин «внутреннее воздействие» используется для обозначения процесса взаимодействия, которое происходит в пределах экранированных областей внутри системы. Результаты расчета взаимодействия на одном топологическом слое, таким образом, служат в качестве исходных данных для другого расчета внутреннего взаимодействия, совершенного в следующем слое.

Далее расскажем об эффективных способах и средствах защиты рецепторов от ЭМП.

22.5.2.
ЭКРАНИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Можно применять многослойные пассивные, активные и комбинированные экраны (как электрические, так и магнитные). При их конструировании используют соосные или концентрические как однотипные аналитические оболочки, так и неоднотипные. При этом слои, проводящие электрический ток, и ферромагнитные, и неферромагнитные, необходимо чередовать с непроводящими слоями. Методы расчета таких оболочек хорошо разработаны. Многослойные системы позволяют достичь высокого «магнитного вакуума», но отличаются высокой стоимостью. В зависимости от интенсивности и степени неоднородности падающего поля может быть рассчитана оптимальная структура слоев многослойной оболочки. Для защиты специальных электроприводов можно рекомендовать к использованию трехслойные оболочки с неоднотипными поверхностями раздела, как соосные, так и с регулируемым эксцентриситетом. При некоторой громоздкости такие системы, обеспечивая ту же эффективность экранирования, что и многослойные, существенно дешевле. В полости таких оболочек обеспечивается однородное поле малой интенсивности. В ряде случаев целесообразно использовать комбинированные экраны: активные (обмотки и слои с токами) и пассивные (проводящие электрический ток ферромагнитные слои). Такие экранирующие системы, как правило, громоздки и имеют существенные массогабаритные показатели. Однако при использовании резонансных контуров они позволяют не только снижать уровни внешних ЭМП помех, но и изменять их спектральный состав, что представляется существенным как для чувствительных элементов окружающей среды, так и для человека. Подробнее об экранах расскажем в гл. 23.

22.5.3. ПАССИВНЫЕ И АКТИВНЫЕ ПОМЕХОПОДАВЛЯЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ

Под такими фильтрами понимаются индуктивно-емкостные и резистивные устройства, предназначенные для поглощения, отражения или ответвления кондуктивных помех с относительно высокочастотным спектром, проникающих в информационно-управляющие каналы. По месту установки помехоподавляющие фильтры разделяются на сетевые и сигнальные. При этом сетевые помехоподавляющие фильтры следует отличать от силовых фильтров для подавления гармоник в сети переменного тока или для сглаживания пульсаций в сети постоянного тока, предназначенных сохранять качество электроэнергии. Последние функционируют в относительно низкочастотном спектре и при относительно сильноточных высших гармониках. В некоторых случаях они также выполняют функцию подавления радиопомех. По схеме включения в защищаемую цепь помехоподавляющие фильтры разделяются на сосредоточенные (последовательные, параллельные, смешанные) или распределенные (например, помехоподавляющие кабели и многозвенные фильтры). Расчеты помехоподавляющих фильтров не вызывают принципиальных трудностей.

22.5.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧИТЕЛИ МОЩНЫХ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ НАПРЯЖЕНИЯ

Так называют стабилитроны, выпрямительные и лавинные диоды, динисторы, разрядники, пробивные предохранители, варисторы и их комбинации с R-, L-, C-элементами. Важнейшим требованием, предъявляемым к указанным элементам защиты, является их быстродействие (высокочастотность). При этом необходимо минимизировать сквозные (межвитковые) емкости катушек, индуктивности выводных проводов конденсаторов и индуктивно-емкостные параметры резисторов, что является существенным для высокочастотной части сплошного спектра, соответствующего короткому одиночному импульсу.

22.5.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ РАЗВЯЗКИ

Наиболее эффективным способом защиты электрооборудования от импульсных перенапряжений, возникающих в цепях электроники, является электромагнитная (гальваническая, индуктивная, емкостная) развязка между питающей магистралью и непосредственным входом источника вторичного электропитания. Практически реализуемой и наиболее эффективной развязкой цепи питания и электрооборудования является специальный разделительный (развязывающий) трансформатор электромашинной системы «генератор — двигатель». Последнее наиболее предпочтительно из-за некритичности к первичному питанию, наличия демпферных контуров в роторе генератора (для асинхронизированных синхронных генераторов) и низкого значения его индуктивного сопротивления. Он как бы заменяет мощный емкостной фильтр, сглаживающий напряжение питания и компенсирующий при этом индуктивные сопротивления цепей. Из устройств электромагнитной развязки в информационно-управляющих каналах электронного оборудования наибольшую популярность в последнее время приобрели оптоэлектрические устройства: оптроны; фотодиоды; светодиоды и волоконно-оптические линии связи. При этом под электромагнитной развязкой понимают переход к оптическому частотному диапазону электромагнитных волн. Волоконно-оптические линии связи не только не подвержены влиянию помех, но и сами их не создают.

22.6. СТАНДАРТЫ И НОРМАТИВНЫЕ ДОКУМЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ

В России в 2001–2003 гг. вступили в силу ряд новых стандартов ЭМС, соответствующих или близких к европейским нормам *EN*. Часть стандартов заменяет стандарты, введенные ранее. Некоторые документы введены впервые.

1. ГОСТ Р50745-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Системы бесперебойного питания. Устройства подавления сетевых импульсных помех. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Взамен ГОСТ Р50745-95.
2. ГОСТ Р51317.3.2-99 (МЭК 61000-3-2-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Эмиссия гармонических составляющих тока техническими средствами с потребляемым током не более 16 А (в одной фазе). Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.
3. ГОСТ Р51317.3.3-99 (МЭК 61000-3-3-94) «Совместимость технических средств электромагнитная. Колебания напряжения и фликер, вызываемые техническими средствами с потребляемым током не более 16 А (в одной фазе), подключаемыми к низковольтным системам электроснабжения. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.
4. ГОСТ Р51317.3.8-99 (МЭК 61000-3-8-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Передача сигналов по низковольтным электрическим сетям. Уровни сигналов, полосы частот и нормы электромагнитных помех». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.
5. ГОСТ Р51317.4.2-99 (МЭК 61000-4-2-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к электростатическим разрядам. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 29191-91.
6. ГОСТ Р51317.4.3-99 (МЭК 61000-4-3-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к радиочастотному электромагнитному полю. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Взамен ГОСТ 30375-95/ГОСТ Р50008-92.
7. ГОСТ Р51317.4.4-99 (МЭК 61000-4-4-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к наносекундным импульсным помехам. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 29156-91.

8. ГОСТ Р51317.4.5-99 (МЭК 61000-4-5-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к микросекундным импульсным помехам большой энергии. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 30374-95/ГОСТ Р50007-92.

9. ГОСТ Р51317.4.6-99 (МЭК 61000-4-6-96) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к кондуктивным помехам, наведенным радиочастотными электромагнитными полями. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

10. ГОСТ Р51317.4.11-99 (МЭК 61000-4-11-94) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к динамическим изменениям напряжения электропитания. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 30376-95/ГОСТ Р50627-93.

11. ГОСТ Р51317.4.12-99 (МЭК 61000-4-12-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к колебательным затухающим помехам. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.

12. ГОСТ Р51317.4.15-99 (МЭК 61000-4-15-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Фликерметр. Технические требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.

13. ГОСТ Р51317.6.1-99 (МЭК 61000-6-1-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к электромагнитным помехам технических средств, применяемых в жилых, коммерческих зонах и производственных зонах с малым энергопотреблением. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

14. ГОСТ Р51317.6.2-99 (МЭК 61000-6-2-99) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к электромагнитным помехам технических средств, применяемых в промышленных зонах. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

15. ГОСТ Р51317.6.3-99 (МЭК 61000-6-3-96) «Совместимость технических средств электромагнитная. Помехоэмиссия от технических средств, применяемых в жилых, коммерческих зонах и производственных зонах с малым энергопотреблением. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

16. ГОСТ Р51317.6.4-99 (МЭК/СИСПР 61000-6-4-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Помехоэмиссия от технических средств, применяемых в промышленных зонах. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

17. ГОСТ Р51318.11-99 (СИСПР 11-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Радиопомехи индустриальные от промышленных, научных, медицинских и бытовых (ПНМБ) высокочастотных устройств. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Взамен ГОСТ 23450-79.

18. ГОСТ Р51318.12-99 (СИСПР 12-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Радиопомехи индустриальные от самоходных средств, моторных лодок и устройств с двигателями внутреннего сгорания. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Взамен ГОСТ 17822-91.

19. ГОСТ Р51318.14.1-99 (СИСПР 14-1-93) «Совместимость технических средств электромагнитная. Радиопомехи индустриальные от бытовых приборов, электрических инструментов и аналогичных устройств. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 23511-79, ГОСТ 30320-99 и ГОСТ Р50033-92.

20. ГОСТ Р51318.14.2-99 (СИСПР 14-2-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Помехоустойчивость бытовых приборов, электрических инструментов и аналогичных устройств. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

21. ГОСТ Р51318.15-99 (СИСПР 15-96) «Совместимость технических средств электромагнитная. Радиопомехи индустриальные от электрического светового и аналогичного оборудования. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 21177-82.

22. ГОСТ Р51318.22-99 (СИСПР 22-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Радиопомехи индустриальные от оборудования информационных технологий. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 29216-91.

23. ГОСТ Р51318.24-99 (СИСПР 24-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость оборудования информационных технологий к электромагнитным помехам. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

24. ГОСТ Р51319-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Приборы для измерения индустриальных радиопомех. Технические требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 11001-80.

25. ГОСТ Р51320-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Радиопомехи индустриальные. Методы испытаний технических средств — источников индустриальных радиопомех». Срок введения 01.01.2001 г. Взамен ГОСТ 16842-82.

26. ГОСТ Р51513-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Оборудование распределительных сетей приемных систем телевидения и радиовещания. Нормы электромагнитных помех, требования помехоустойчивости и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

27. ГОСТ Р51514-99 (МЭК 61547-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Помехоустойчивость светового оборудования общего назначения. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

28. ГОСТ Р51515-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Помехоустойчивость радиовещательных приемников, телевизоров и другой бытовой радиоэлектронной аппаратуры. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

29. ГОСТ Р51516-99 (МЭК 60255-22-4-92) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость измерительных реле и устройств защиты к наносекундным импульсным помехам. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.

30. ГОСТ Р51522-99 (МЭК 61326-1-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Электрическое оборудование для измерения, управления и лабораторного применения. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

31. ГОСТ Р51523-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Помехоэмиссия от профессиональной аудио-, видео- и аудиовизуальной аппаратуры и аппаратуры управления световыми приборами для зрелищных мероприятий. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

32. ГОСТ Р51524-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Системы электрического привода с регулируемой скоростью вращения. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

33. ГОСТ Р51525-99 (МЭК 60255-22-2-96) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость измерительных реле и устройств защиты к электростатическим разрядам. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.

34. ГОСТ Р51526-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Оборудование для дуговой сварки. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

35. ГОСТ Р51527-99 (МЭК 60478-3-89) «Совместимость технических средств электромагнитная. Стабилизированные источники питания постоянного тока. Кондуктивные электромагнитные помехи. Нормы и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.

36. ГОСТ Р51329-99 (МЭК 61543-95) «Совместимость технических средств электромагнитная. Устройства защитного отключения, управляемые дифференциальным током (УЗО-Д), бытового и аналогичного назначения. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2001 г. Введены впервые.

37. ГОСТ Р 51407-99 (МЭК 60118-13-97) «Совместимость технических средств электромагнитная. Слуховые аппараты. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.01.2002 г. Введены впервые.

38. ГОСТ Р51408-99 «Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к электромагнитным помехам профессиональной аудио-, видео- и аудиовизуальной аппаратуры и аппаратуры управления световыми приборами для зрелищных мероприятий. Требования и методы испытаний». Срок введения 01.07.2001 г. Введены впервые.

В распоряжении инженеров-проектировщиков электротехнических комплексов в настоящее время имеются практически все базовые (BASIC) стандарты, регламентирующие методики проведения испытаний на электромагнитную совместимость. Требования по испытаниям на устойчивость оборудования к помехам (ГОСТ Р51317.4.2 — Р51317.4.12) основаны на документах Международной электротехнической комиссии (МЭК) серии 1000-4. Требования по испытаниям на эмиссию помех (ГОСТ Р51320, ГОСТ Р51319, ГОСТ Р51318) соответствуют документам Международного комитета по радиопомехам (СИСПР).

Таблица 22.2

Требования стандартов GENERIC по устойчивости к электромагнитным помехам

Вид испытательных воздействий	ГОСТ Р51317.6.1-99 Жилые, коммерческие зоны, производственные зоны с малым энергопотреблением	ГОСТ Р51317.6.2-99 Промышленные зоны
Наносекундные импульсные помехи ГОСТ Р51317.4.4-99	Цепи питания: 1 кВ ввод-вывод: 0,5 кВ Критерий *B*	Цепи питания: 2 кВ ввод-вывод: 1 кВ Критерий *B*
Микросекундные импульсные помехи ГОСТ Р51317.4.5-99	Цепи питания: несимметр. 2 кВ симметрично 1 кВ Критерий *B*	Цепи питания: несимметр. 2 кВ симметрично 1 кВ Критерий *B*
Радиочастотные напряжения ГОСТ Р51317.4.6-99	1 В 0,15–80 МГц модуляция 80% 1 кГц. Критерий *A*	10 В 0,15–80 МГц модуляция 80% 1 кГц. Критерий *A*
Электростатический разряд ГОСТ Р51317.4.2-99	4 кВ контактный 8 кВ воздушный Критерий *B*	4 кВ контактный 8 кВ воздушный Критерий *B*
Радиочастотное электромагнитное поле ГОСТ Р 51317.4.3-99	3 В/м 80–1000 МГц модуляция 80 % 1 кГц. Критерий *A*	10 В/м 80–1000 МГц модуляция 80% 1 кГц. Критерий *A*
Динамические изменения напряжения электропитания ГОСТ Р 51317.4.11-99	–30% 0,2 с. Критерий *B* 100%, 0,02 с. Критерий *B* +20%, 0,5 с. Критерий *B*	–30% 0,5 с. Критерий *B* 100%, 0,1 с. Критерий *B* +20%, 0,5 с. Критерий *B*
Магнитное поле ГОСТ Р 50648-95	Переменное 50 Гц 3 А/м Критерий *A*	Переменное 50 Гц, 30 А/м, Критерий *A*

Впервые в России введены стандарты типа GENERIC (ГОСТ Р51317.6.1 — Р51317.6.4), регламентирующие требования по испытаниям оборудования в зависимости от места его применения. Стандарты содержат конкретные значения испытательных воздействий, критерии функционирования, нормы на эмиссию помех и ссылаются на методики испытаний в базовых стандартах (табл. 22.2). Введение этих документов устранило пробел в системе сертификации по ЭМС и распространило требования по ЭМС практически на любое электронное и электротехническое оборудование.

ГОСТ Р51316.6.1-99 распространяется на технические средства, применяемые в жилых, коммерческих и производственных зонах, с малым энергопотреблением как в помещениях, так и вне их. К ним относятся:

а) объекты жилищного хозяйства (например, дома, квартиры и т. д.);

б) предприятия торговли (например, магазины, супермаркеты и т. д.);

в) учреждения (например, офисы, банки и т. д.);

г) объекты культурно-массовых развлечений (например, кинотеатры, рестораны, танцевальные залы и т. д.);

д) объекты, расположенные на открытом воздухе (например, автозаправочные станции, автостоянки, центры развлечений и спорта и т. д.);

е) производственные и хозяйственные объекты (например, мастерские, лаборатории, центры технического обслуживания и т. д.).

ГОСТ Р51316.6.1-99 распространяется на технические средства, применяемые в промышленных зонах.

Критерий качества функционирования *A* означает, что в период воздействия помехи и после ее прекращения техническое средство должно продолжать функционировать в соответствии с назначением. Не допускается ухудшение рабочих характеристик технического средства ниже минимального уровня, установленного изготовителем применительно к использованию технического средства в соответствии с назначением, или прекращения выполнения техническим средством установленной функции. Минимальный уровень рабочих характеристик технического средства может быть заменен допустимыми потерями качества функционирования. Если минимальный уровень рабочих характеристик технического средства или допустимые потери качества функционирования не установлены изготовителем, указанные данные могут быть определены на основе анализа эксплуатационной и технической документации на техническое средство или исходя из результатов применения технического средства, которых пользователь вправе ожидать при использовании технического средства в соответствии с назначением.

Критерий качества функционирования *B* означает, что после прекращения помехи техническое средство должно продолжать функционировать в соответствии с назначением. Не допускается ухудшение рабочих характеристик технического средства ниже минимального уровня, установленного изготовителем применительно к использованию технического средства в соответствии с назначением, или прекращения выполнения техническим средством установленной функции. Минимальный уровень рабочих характеристик технического средства может быть заменен допустимыми потерями качества функционирования. Главное отличие от критерия *A* в том, что в период воздействия помехи допускается ухудшение рабочих характеристик технического средства. Вместе с тем прекращение выполнения техническим средством установленной функции или изменение данных, хранимых в памяти технического средства, не допускается. Если минимальный уровень рабочих характеристик технического средства или допустимые потери качества функционирования не установлены изготовителем, указанные данные могут быть определены на основе анализа эксплуатационной и технической документации на техническое средство или исходя из результатов применения технического средства, которых пользователь вправе ожидать при использовании технического средства в соответствии с назначением.

Критерий качества функционирования *C* допускает временное прекращение выполнения техническим средством установленной функции при условии, что функция восстанавливается сама или может быть восстановлена с помощью операций управления, выполняемых пользователем.

Режим функционирования испытуемого технического средства должен быть выбран из предусмотренных в технической документации на техническое средство и обеспечивать наименьшую устойчивость к помехе конкретного вида. Должна быть выбрана конфигурация, при которой испытуемое техническое средство обладает наименьшей помехоустойчивостью при соответствии типовому применению и типовым условиям установки технического средства.

Техническое средство, являющееся частью системы или подключаемое к вспомогательному оборудованию, испытывают при минимальной конфигурации подключенного вспомогательного оборудования, необходимой для проведения испытаний и проверки портов, учитывая рекомендации, приведенные в ГОСТ Р51318.22.

Если в технической документации на техническое средство установлена необходимость применения совместно с техническим средством внешних помехоподавляющих устройств или осуществления пользователем дополнительных мероприятий по обеспечению устойчивости к помехам, испытания технического средства, предусмотренные настоящим стандартом, проводят с применением внешних помехоподавляющих устройств и при осуществлении мероприятий, которые должны проводиться пользователем.

Если не представляется возможным провести испытания технического средства на помехоустойчивость во всех режимах функционирования, предусмотренных в технической документации на техническое средство, должен быть выбран наиболее критичный режим функционирования.

Стандарты на семейства продукции (FAMILY) представлены ГОСТ Р51522-99, ГОСТ Р51523-99 и рядом других стандартов, в том числе и введенных ранее, например ГОСТ Р50267.0.2-95 для медицинской техники.

Стандарты на продукцию (PRODUCT) многочисленны и имеют приоритет над стандартами FAMILY и GENERIC.

Требования по ЭМС судового оборудования регламентируются Морским Регистром судоходства России и рядом международных документов (подробнее см. [22.5]).

Анализ требований по устойчивости оборудования к электромагнитным помехам за последние годы показывает, что содержание основных документов сближается. Особенно это заметно в транспортных энергоустановках, в частности в судовых энергоустановках.

Общий подход к обеспечению ЭМС при размещении оборудования состоит в подавлении помех в источнике, помехозащите чувствительного оборудования и снижении электромагнитных связей оборудования. Следующие меры могут быть использованы отдельно или в комбинации: экранирование, заземление, правильный выбор и прокладка кабелей, выбор места установки оборудования, фильтрация, использование специальных средств подавления помех и помехозащиты, специальные меры для отдельных видов оборудования.

Передача данных по длинным кабелям должна осуществляться сигналами высокого уровня. Предпочтительно применение усилителей непосредственно в датчиках. В случае низких уровней сигналов может потребоваться помехоустойчивое кодирование с коррекцией ошибок. Желательно использовать в линиях передачи информации цепи с низким сопротивлением с целью ослабления емкостных влияний. Следует использовать симметричные линии передачи информации. Аналого-цифровые преобразователи должны быть интегрирующего типа. Внутренняя общая шина питания должна соединяться с корпусом только в одной точке, к которой должен быть хороший доступ для проведения проверки сопротивления изоляции. Оптроны и трансформаторы должны использоваться для гальванической развязки элементов системы, особенно когда невозможно обеспечить заземление только в одной точке. Компьютерные системы создают помехи и восприимчивы к помехам, и поэтому может потребоваться дополнительное их экранирование. Измерительные усилители с симметричными входами частично преобразуют несимметричные помехи в симметричные из-за небольшой несимметрии входов. Для уменьшения этого эффекта могут понадобиться дополнительные меры. Выбор и прокладка кабелей должны выполняться с соблюдением всех приведенных выше требований.

Требования по ЭМС разработаны для разных групп оборудования: A, B, C, D, E, F, G.

Группа A включает отдельные виды радиотехнического оборудования: антенны, радиопередатчики и приемники, электромагнитные развязки в цепях питания, помехозащитные трансформаторы, экранирование, радиотехнические кабели, заземления.

Группа B включает оборудование генерирования, преобразования, периодического переключения и управления электрической энергией. Может создавать гармоники напряжения и тока в электрической сети. Генераторы должны иметь минимальное сверхпереходное сопротивление. Мощность преобразователей электроэнергии должна быть значительно меньше мощности генераторов. В противном случае необходимо использовать отдельную электрическую сеть, развязанную с основной сетью. Фильтры могут устанавливаться параллельно с преобразователями. Должны быть устранены резонансы. Люминесцентные лампы должны содержать индуктивности для устранения перегрузок при воздействии гармоник. Оборудование может быть как источником, так и рецептором помех.

Группа C включает оборудование, работающее с импульсной мощностью, например радиолокаторы, которые создают помехи во время излучения зондирующего сигнала и могут быть восприимчивы к помехам во время приема. Кабели, несущие большую импульсную мощность, должны иметь двойной экран или прокладываться в металлических трубах. Кабели, используемые для приема сигналов, должны быть проложены отдельно от кабелей с высоким уровнем помех.

Группа D включает коммутационное оборудование и оборудование, создающее кратковременные помехи при переключении. Оборудование этой группы создает широкополосные помехи. Ограничители напряжений должны быть установлены возможно ближе к индуктивным цепям. Элементы, подавляющие высокочастотные процессы, должны устанавливаться на переключающих контактах. Рекомендуется использовать диоды, варисторы, RC-цепи, конденсаторы.

Группа E включает такое оборудование обработки сигналов и внутренней связи, как цифровые и аналоговые системы связи между датчиками, дисплеями, панелями управления, компьютерами, исполнительными электродвигателями и реле. Для этого оборудования, как к источнику помех, применимы меры, аналогичные мерам для групп B и D. Для повышения устойчивости к помехам применяют следующие меры.

Передача данных по длинным кабелям должна осуществляться сигналами возможно более высокого уровня. Предпочтительно применение усилителей непосредственно в датчиках. В случае низких уровней сигналов может потребоваться помехоустойчивое кодирование с коррекцией ошибок. Желательно использовать в линиях передачи информации цепи с низким сопротивлением с целью ослабления емкостных влияний. Следует использовать симметричные линии передачи информации. Аналого-цифровые преобразователи должны быть интегрирующего типа. Внутренняя общая шина питания должна соединяться с корпусом только в одной точке, к которой должен быть хороший доступ для проведения инспекции и проверки сопротивления изоляции. Оптроны и трансформаторы должны использоваться для гальванической развязки элементов системы, особенно когда невозможно обеспечить заземление только в одной точке. Компьютерные системы создают помехи и восприимчивы к помехам. Может потребоваться дополнительное экранирование таких систем. Измерительные усилители с симметричными входами частично преобразуют несимметричные помехи в симметричные из-за небольшой несимметрии входов. Для уменьшения этого эффекта могут понадобиться дополнительные меры. Выбор и прокладка кабелей должны выполняться с соблюдением всех приведенных выше требований.

Группа F включает неэлектротехническое оборудование. Может создавать дополнительные помехи при воздействии ЭМП при протекании тока по корпусу из-за изменения сопротивления точек контакта металлических частей оборудования. Для снижения помех необходимо выполнение качественного заземления всех металлических частей оборудования.

Группа G включает интегрированные системы — оборудование различных производителей, объединенное единой кабельной сетью и обеспечивающее его одновременную совместную работу. Отдельные части системы при этом работают в различных электромагнитных условиях. Возможность взаимных влияний возрастает с объединением большого числа оборудования. Успешное прохождение испытаний отдельных образцов оборудования не гарантирует идеальной работы системы. Рекомендуется испытать систему в минимально необходимом составе оборудования в условиях лаборатории. Допускается проведение испытаний непосредственно в месте установки. Вопросы обеспечения ЭМС в системах еще не достаточно регламентированы и требуют дополнительных исследований.

Контрольные вопросы

1. Объясните понятие электромагнитная совместимость технических средств и человека.
2. Какие вопросы изучают специалисты в области электромагнитной совместимости?
3. Как осуществляется магнитная связь между контурами? Поясните примером.
4. Как осуществляется электростатическая связь источника и рецептора?
5. Какие элементы электрооборудования можно считать источниками помех и почему?
6. Какие элементы электрооборудования можно считать рецепторами и почему?
7. Перечислите меры, которые предпринимаются для защиты рецепторов от помех.
8. Что входит в понятие «экранирование»?

23

ГЛАВА 23

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

23.1. НАЗНАЧЕНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ

В результате перекрестного влияния внешних ЭМП от разнородного электрооборудования в энергетическом помещении создается электромагнитная среда, обладающая определенными магнитной и электрической напряженностями. Их величина и фазовая направленность определяются количеством и интенсивностью источников поля; материалами, используемыми при конструировании; геометрическими размерами помещения, а также размерами источников и рецепторов. Такая среда может отрицательно воздействовать на рецепторы, изменяя их параметры и режимы работы. Воздействие может осуществляться электромагнитной или электростатической индукциями (гл. 22).

Для снижения отмеченных взаимосвязей между полями помех и рецепторами, среди прочего, используется экранирование. Экраны предназначаются для локализации в некотором объеме пространства полей, создаваемых источниками электромагнитной энергии, с целью ослабления или исключения их воздействия на рецепторы. В зависимости от назначения различают экраны с внутренним возбуждением ЭМП (в них обычно помещается источник помех) и экраны внешнего ЭМП (во внутренней их полости помещаются рецепторы). В первом случае экран предназначен для локализации поля в некотором объеме, во втором — для защиты от воздействия внешних ЭМП помех. Обе эти задачи часто формулируют как задачу экранирования от ЭМП помех. Ее решение связано со всеми особенностями и закономерностями распространения ЭМП. К этой же задаче относится и экранирование ЭМП помех, создаваемых отдельными блоками или электрическими цепями, близко расположенными друг к другу. В таких случаях может идти речь о полях, создаваемых проводами, по которым протекает ток высокой частоты. Подобную задачу формулируют как задачу «экранирования от токов помех». Такое разделение задач экранирования от высокочастотных помех обычно делается как в целях систематизации методов решения задач, так и в интересах упрощения расчета экранов.

Обе задачи объединяются тем, что при их решении в самом общем случае должны быть применены электромагнитные экраны, одинаково хорошо защищающие рецептор от ЭП и МП помех. Практическая реализация таких экранов возможна лишь в ограниченном количестве случаев (как правило, для однородных ЭМП полей помех, однородных по форме и материалам экранов).

В ряде случаев задачи экранирования ЭП и МП решаются раздельно. Сделать это можно, когда одна из составляющих полей не имеет решающего значения для работы экранируемого устройства. Тогда можно раздельно рассматривать воздействие ЭП и МП и производить расчет электрических и магнитных экранов.

Экранирование является одной из основных мер ослабления и локализации ЭМП в интересах повышения устойчивости функционирования рецепторов. Однако эффективность экранирования в значительной степени зависит и от фильтрации электрических сетей управления, сигнализации, связи и электропитания, проходящих через экран, вводимых в экран и выходящих из него.

Работоспособность любого самого совершенного экрана будет существенно снижена, если не препятствовать распространению электромагнитных колебаний вне и внутрь экранируемого пространства по этим сетям. Следовательно, фильтрация электрических сетей и линий сопутствует электромагнитному экранированию в подавляющем большинстве его применений. А устройства, обеспечивающие фильтрацию, должны быть неотъемлемой частью системы экранирования. Предположим, что электромагнитная энергия выходит за пределы экранируемого пространства или входит в него только вследствие несовершенства экрана и недостаточной фильтрации сети. Тогда, если задана общая эффективность системы экранирования или системы подавления помех, частные эффективности собственно экранирования и сопутствующей ему фильтрации в общем случае должны быть не хуже результирующей эффективности системы в целом. Потери эффективности подавления помех и затраты будут минимальными, если обе эти частные эффективности принять равными.

Экранирование является одним из эффективных средств защиты рецепторов от воздействия мощного электромагнитного импульса, а также от излучения радиолокационных установок, работающих в импульсном режиме. Необходимость экранирования должна быть обоснована и рассмотрена только после того, как полностью исчерпаны конструкторские методы оптимальной компоновки и размещения аппаратуры. В качестве экранирующих средств используются пассивные и активные экраны. В ряде случаев находят применение комбинированные экраны — активно-пассивные, с включением резонансных контуров для фильтрации нежелательных частот помехонесущих ЭМП.

23.2. ЭКРАНИРОВАНИЕ ПАССИВНОЕ

23.2.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭКРАНОВ

Пассивное экранирование имеет свои специфические особенности, обусловленные его физической сущностью, принципами действия и конкретными условиями применения экранов. Это находит свое выражение в количественной оценке эффективности экранирования. Для оценки функциональных качеств экрана могут быть использованы различные характеристики. Чаще всего качество пассивного экрана характеризуется двумя параметрами: коэффициентом прохождения (экранирования)

$$K^F = F_э/F,\ F = (E, H) \tag{23.1}$$

и коэффициентом отражения (реакции)

$$W^F = F_0/F. \tag{23.2}$$

В формуле (23.1) $F_э$, F — комплексные значения напряженностей соответствующего поля в данной точке при наличии экрана (индекс «э») или при его отсутствии. В формуле (23.2) F_0, F — комплексные значения напряженности отраженного от экрана поля в данной точке и падающего (точки над комплексными величинами для упрощения не проставляются). Из (23.1) и (23.2) следует, что коэффициент экранирования определяет степень уменьшения поля в экранируемой области пространства, а коэффициент отражения — величину отраженной волны и основные закономерности изменения поля со стороны источника. Оба параметра взаимосвязаны и в общем случае являются комплексными. Аргумент их характеризует фазу прошедшего через экран (или отраженного от экрана) поля по отношению к фазе падающего поля.

В инженерной практике иногда вместо коэффициента экранирования K^F используют обратную величину — эффективность экранирования $Э^F$:

$$Э^F = 1/K^F, \tag{23.3}$$

которая определяется в относительных единицах и показывает, во сколько раз экран уменьшает падающее поле в заданной точке.

В ряде случаев [23.1] эффективность экранирования, или иначе — экранное затухание, представляют в логарифмических единицах — децибелах (Дб):

$$S^F = 20\lg|Э^F|. \tag{23.4}$$

В технике связи [23.2] экранное затухание оценивают в неперах (Нп):

$$b^F = \ln|Э^F|. \tag{23.5}$$

При этом для перевода из одной системы единиц в другую может быть использован коэффициент 8,7, тогда

$$S^F = 8{,}7b^F.$$

Также необходимо озвучить некоторые важные замечания.

1. Здесь эффективность экранирования, экранное затухание и реакция экрана оцениваются как параметры. В действительности это сложные функции, зависящие не только от размеров, формы и электрофизических характеристик экрана, но и от взаимного расположения источника поля, экрана и рецептора. Подробнее об этом в [23.1–23.3].

2. Можно считать, что характеристики электромагнитного экрана изменяются линейно. Для него справедлив принцип взаимности перемещений, т. е. эффективность экранирующей оболочки сохраняется одной и той же независимо от того, расположен внутри него источник поля или защищаемая область пространства.

3. Обычно $S^H > S^E$ при реальных соотношениях габаритных размеров оболочек и длин волн ЭМП помех. Это означает, что ослабление составляющих напряженности ЭП при прохождении через экран превышает ослабление составляющих напряженности МП, поэтому, осуществив необходимое экранирование магнитных составляющих, обеспечиваем экранирование и электрических.

При расчете экранирующих функций оболочек, как правило, используется общая теория ЭМП, базирующаяся на уравнениях Максвелла, которые решаются для стенки экрана и окружающих сред, а на границах сопрягаются с помощью граничных условий. При изучении экранов сложной формы их представляют в виде набора экранов простых геометрических форм, экранирующий эффект которых поддается расчету. При этом нередко приходится исследовать физически неосуществимые, но более простые для анализа задачи, чтобы оценить напряженность ЭМП, проникающего внутрь реальных конструкций, и учесть краевые эффекты, щели, отверстия и т. д. Для однородных постоянных МП и ЭМП экранирующие оболочки простых геометрических форм были рассчитаны в конце XIX — начале XX в. Работы по устранению неточностей методов расчета оболочек простых геометрических форм публикуются и в настоящее время.

В меньшей степени рассмотрены задачи экранирования оболочек, находящихся в неоднородных полях. Экранирующие функции зависят здесь от места расположения источника поля и являются функциями координат.

Для расчета экранирующих функций оболочек в неоднородных полях был разработан метод, основанный на «теории длинной линии» [23.1]. Метод базируется на аналогии между уравнениями распространения электромагнитных волн через бесконечной протяженности плоскую оболочку и известными уравнениями «длинной линии».

Метод широко распространен, несмотря на существенные его недостатки: применимость этого метода ограничивается лишь плоскими бесконечными пластинами при нормальном падении ЭМП, когда составляющие электрической и магнитной напряженностей ЭПМ взаимно перпендикулярны и можно пользоваться скалярным волновым полным сопротивлением, а временну́ю фазу определять, исходя из напряжения вектора Пойнтинга. Это связано с его положительными качествами: возможностью использования для широкого класса экранирующих оболочек и получения аналитических решений, наглядностью при применении в инженерной практике.

В ряде случаев при расчете пассивных экранирующих оболочек используется метод теории цепи. При этом экран представляют электрической цепью с заданными индуктивностью, взаимной индуктивностью и т. д. Заменяя экран четырехполюсником, а воздействующее ЭМП источником с некоторым внутренним сопротивлением, зависящим от конфигурации и материала экрана, определяют эффективность экранирования. Недостатками метода являются: необходимость определения параметров схемы замещения из решения уравнений Максвелла; возможность его использования с заданной точностью лишь при низких частотах, когда можно пренебречь поверхностными эффектами. Но есть и преимущество: возможно построение моделей аналоговых цепей для исследования изменений эффективности экранирования оболочек в широком диапазоне изменения параметров, как геометрических, так и электрофизических.

Коэффициент отражения или реакции может явиться мерой воздействия экрана на параметры экранируемых элементов. При всех видах экранирования, за исключением статического, из-за отражения электромагнитной энергии от стенок экрана происходит взаимодействие между экраном и экранируемым устройством. Экран, защищая цепи, детали, колебательные контуры от воздействия внешних полей, оказывает существенное влияние на параметры экранируемых элементов: изменяются магнитные связи, уменьшается первичная индуктивность катушек, увеличивается емкость контуров, возрастает активное сопротивление. Это может привести к изменению частоты настройки и добротности колебательных контуров, потерям энергии и т. д. Относительное изменение параметров экранируемых элементов можно учесть с помощью коэффициентов [23.3]:

$$P_{kj} = 1 - (A_{эkj}/A_{0kj}), \qquad (23.6)$$

где $A_{эkj}$ — значение k-го параметра j-го экранируемого элемента при наличии экрана; A_{0kj} — значение первичного k-го параметра j-го элемента при отсутствии экрана. Каждый из P_{kj} является коэффициентом реакции экрана на k-й параметр j-го элемента. Задаваясь допустимыми пределами изменений параметров и зная размеры экранируемых элементов, можно определить габаритные размеры экрана; материал, из которого он должен быть изготовлен, и условия размещения элементов внутри него. В дальнейшем при оценке эффективности конкретных экранов будем пользоваться экранным затуханием S^F (23.3), (23.4) или коэффициентом экранирования K^F (23.1).

23.2.2. ПРИНЦИПЫ ПАССИВНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ

Источник ЭМП помех может быть представлен в виде набора расположенных в геометрическом центре электрических и магнитных мультиполей или произвольно ориентированных в пространстве магнитных и электрических диполей [23.1]. В зависимости от типа источника, частоты f и расстояния до экрана r поле имеет различную структуру, поэтому один и тот же экран будет вести себя по-разному. Например, электрический и магнитный диполи в ближней зоне, когда $r < (\lambda/2\pi)$ (λ — длина волны) создают соответственно квазиэлектростатическое или квазимагнитостатическое поле. В этой зоне можно рассматривать только ЭП с напряженностью $\vec{E}$ или МП с напряженностью $\vec{H}$, которые действуют на рецептор через емкостные или индуктивные связи. В промежуточной зоне (зоне индукции), когда $(\lambda/2\pi) < r < 2\pi\lambda$, составляющие $\vec{E}$ и $\vec{H}$ несут неодинаковую энергию и сдвинуты по фазе примерно на 90°. В дальней зоне (волновой), когда $r > 2\pi\lambda$, поле имеет структуру волны TEM. Обе составляющие поля находятся в фазе и несут одинаковую энергию. Соответственно в структуре поля различают следующие режимы экранирования: электростатический, магнитостатический, квазиэлектростатический, квазимагнитостатический, электромагнитный и волновой. При всех режимах, кроме статических, экран взаимодействует с экранируемым элементом. Например, уменьшается индуктивность и увеличивается емкость катушки, уменьшается добротность контуров, возрастает активное сопротивление экранируемого элемента, в экране теряется мощность энергии.

Электростатический режим экранирования. Он основан на использовании явления электростатической индукции и заключается в замыкании зарядов на «землю» или корпус электрооборудования. Размеры замкнутого экрана здесь не играют роли. Для экранирования может быть применен очень тонкий экран из магнитного или немагнитного металла, и даже диэлектрика.

Квазиэлектростатический режим экранирования. Он возникает при работе электростатического экрана на низких частотах ($0 < f < 5\cdot10^3$ Гц). В этом режиме по экрану протекает переменный ток. Поле проникает в глубь металла, а эффективность экранирования становится зависимой от толщины и электрической проводимости материала экрана. С ростом частоты все большую роль играют индукционные токи. Они создают вторичное поле, которое взаимодействует с первичным полем и ослабляет его. Для характеристики материала экрана и оценки проникающего в экран поля вводится понятие глубины проникновения δ (предполагается ослабление поля в e раз):

$$\delta = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}, \tag{23.7}$$

где $\omega = 2\pi f$, f — частота поля, рад/с; γ, μ — электрическая проводимость и магнитная проницаемость материала экрана.

Магнитостатический режим экранирования. Основан на замыкании силовых линий МП в материале экрана. Целью таких экранов является отвод магнитного потока из защищаемой области и направление этого потока по желательному пути, где он не приносит вреда. При использовании магнитостатических экранов, экранирующих МСП, редко интересуются их способностями ослаблять также и ЭСП. Однако эффективность таких экранов может оказаться по отношению к ЭСП значительно выше, чем по отношению к МСП. При конструировании магнитостатических экранов используются только магнитные материалы. Большей их эффективности достигают не из-за увеличения толщины, а за счет создания многослойных конструкций, в которых магнитные слои чередуются с немагнитными (например, с воздушными промежутками).

Квазимагнитостатический режим экранирования. Сходен с квазиэлектростатическим режимом экранирования. Переменный электрический ток, протекающий по экрану, вытесняет МП из толщи экрана. Вторичное МП, создаваемое индукционными токами, сдвинуто относительно первичного по фазе на 180° и ослабляет первичное поле. С ростом частоты возрастает роль индукционных токов, возрастает поверхностный эффект, толщина экрана начинает играть все меньшую роль.

Во многих практических случаях достаточным оказывается экранирование лишь МП. Если частота поля помех низка, то помеха распространяет свое действие на рецептор за счет электромагнитной индукции. Экранирование сводится к уменьшению связи между цепями за счет уменьшения общего для обеих цепей МП.

Электромагнитный режим экранирования. Возникает на высоких частотах ($5 \cdot 10^3 < f < 10^9$, Гц), когда индукционные токи играют первостепенную роль в величине эффективности экранирования. Как ЭП, так и МП вытесняются из экрана. Квазистатические режимы переходят в электромагнитный режим экранирования. Физическая сущность такого экранирования, рассматриваемая с точки зрения теории цепей и ЭМП, сводится к взаимодействию вторичного и первичного полей, которые близки по величине и противоположны по фазе. Результирующее поле оказывается сильно ослабленным. Если рассматривать электромагнитный режим экранирования с точки зрения волновых процессов, то процесс сводится к многократному отражению электромагнитных волн от поверхности экрана и к затуханию их в толще экрана. Отражение энергии связано с несоответствием волновых характеристик металла и окружающего диэлектрика. Чем больше отличаются эти сопротивления, тем больше отражение и лучше эффективность экранирования. Затухание энергии обусловлено тепловыми потерями, вызванными индукционными токами в материале экрана. На эффективность экранирования влияют и переотражения волн в материале самого экрана. Как уже отмечалось, электромагнитное экранирование охватывает широкий частотный диапазон и может осуществляться с помощью экранов из магнитных и немагнитных материалов. Последним отдается предпочтение в случаях, когда желательно иметь меньшие потери, вносимые экраном в источник поля.

Волновой режим экранирования имеет место, когда длина волны соизмерима с размером экрана ($f > 10^9$, Гц). В этом случае появляются резонансные накопления и резонансные поглощения энергии. Электромагнитный режим экранирования переходит в волновой. Резонанс внутри экрана может возникнуть на волнах любого типа. Для анализа и расчета таких экранов используются полные уравнения Максвелла. Особенностью волнового режима является колебательный характер изменения эффективности экранирования при изменении частоты. Закономерности в изменении эффективности зависят от конструкции экрана.

23.2.3. РАСЧЕТ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭКРАНА МЕТОДОМ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В однородном и синусоидально изменяющемся во времени МП с напряженностью $\vec{H}_0$ (используется символический метод) помещен экран в виде прямого полого цилиндра внешнего радиуса r_0 с толщиной стенки a, причем $a \ll r_0$ (рис. 23.1). Ось экрана перпендикулярна направлению МП. Материал

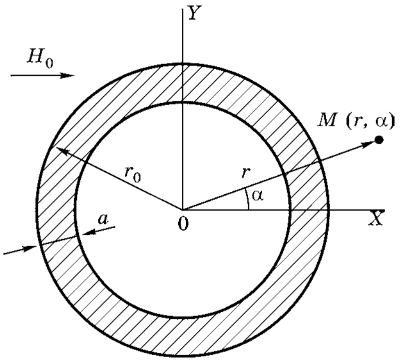


Рис. 23.1
Круговой цилиндрический экран

экрана обладает постоянной магнитной проницаемостью μ и удельной проводимостью γ. Длина экрана велика и искажение поля у его концов в расчете не учитывается. Требуется определить напряженность поля в полости экрана. При рассмотрении используются декартова и круговая цилиндрическая системы координат.

Вектор напряженности МП совпадает по направлению с осью X. Следовательно, $\dot{H}_{0y} = 0$, $\dot{H}_{0z} = 0$ и $\dot{H}_{0x} = \dot{H}_0$. Так как поле при принятых условиях плоскопараллельно, то все величины, характеризующие МП, не зависят от z.

Для комплексного действующего значения магнитного потенциала справедливы те же уравнения, что и для постоянного МП, поэтому магнитный потенциал вне экрана определяется выражением

$$\dot{\varphi}_{ma} = -(M_3 r + N_3 r^{-1})\cos\alpha, \tag{23.8}$$

где M_3, N_3 — постоянные величины.

Так как при $r \gg r_0$ магнитный потенциал $\dot{\varphi}_{ma} = -M_3 r\cos\alpha = -\dot{H}_0 r\cos\alpha$, то $M_3 = \dot{H}_0$. Для дальнейших расчетов удобно принять $N_3 = \dot{H}_0 r_0^2 w$, где w — комплексный коэффициент обратного действия экрана. Как будет видно из дальнейшего, он учитывает влияние вихревых токов в стенке экрана на внешнее поле.

По окончательному выражению для магнитного потенциала вне экрана

$$\dot{\varphi}_{ma} = -\dot{H}_0(r + r_0^2 r^{-1} w)\cos\alpha \tag{23.9}$$

определяются комплексные действующие значения составляющих вектора напряженности МП $\dot{\vec{H}}_a$ вне экрана:

$$\dot{H}_{ar} = -\frac{\partial\dot{\varphi}_{ma}}{\partial r} = \dot{H}_0(1 - r_0^2 r^{-2} w)\cos\alpha, \tag{23.10}$$

$$\dot{H}_{a\alpha} = -\frac{\partial\dot{\varphi}_{ma}}{r\partial\alpha} = -\dot{H}_0(1 + r_0^2 r^{-2} w)\sin\alpha. \tag{23.11}$$

В полости экрана исходное уравнение для потенциала имеет вид

$$\dot{\varphi}_{mi} = -(M_1 r + N_1 r^{-1})\cos\alpha. \tag{23.12}$$

Так как потенциал на оси экрана не должен обращаться в бесконечность, то $N_1 = 0$ и

$$\dot{\varphi}_{mi} = -M_1 r\cos\alpha = -\dot{H}_i r\cos\alpha, \tag{23.13}$$

где $\dot{H}_i$ — комплексное действующее значение вектора напряженности МП в полости экрана. Его составляющие равны

$$\dot{H}_{ir} = \dot{H}_i\cos\alpha, \quad \dot{H}_{i\alpha} = -\dot{H}_i\sin\alpha.$$

Введем коэффициент экранирования:

$$K = \dot{H}_i / \dot{H}_0. \tag{23.14}$$

При расчете МП в стенке экрана ($r_0 - a \le r \le r_0$) удобно сначала найти вектор напряженности $\dot{\vec{E}}$ ЭП. Так как вектор напряженности МП лежит в плоскости, перпендикулярной оси z, и не зависит от z, то из первого уравнения Максвелла следует, что вектор $\dot{\vec{E}}$ имеет единственную составляющую:

$$\dot{E}_z = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}, \quad \dot{E}_x = \dot{E}_y = 0, \tag{23.15}$$

а в круговых цилиндрических координатах $\dot{E}_r = \dot{E}_\alpha = 0$ и $\dot{E}_z = \dot{E}$.

Для определения напряженности ЭП в круговой цилиндрической системе координат r, α, z служит уравнение

$$\Delta \dot{E} = k^2 \dot{E} \tag{23.16}$$

или

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \dot{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial \alpha^2} = k^2 \dot{E}. \tag{23.17}$$

Для тонкостенного экрана ($a \ll r_0$) можно пренебречь изменением r в толще экрана, принимая в любой точке радиус равным r_0. Тогда

$$\frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial \alpha^2} = k^2 \dot{E}. \tag{23.18}$$

Подстановка $\dot{E} = F(r)\sin\alpha$ позволяет с помощью метода разделения переменных перейти от уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $F(r)$:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} - (k^2 + r_0^{-2})F = 0, \tag{23.19}$$

общее решение которого:

$$F(r) = M_4 e^{-k_1 r} + N_4 e^{k_1 r}, \tag{23.20}$$

где

$$k_1 = \sqrt{k^2 + r_0^{-2}}.$$

Тогда напряженность ЭП:

$$\dot{E} = M_4 e^{-k_1 r} + N_4 e^{k_1 r} \sin\alpha. \tag{23.21}$$

Из второго уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}$ находят составляющие вектора напряженности МП:

$$\operatorname{rot}_r \dot{\vec{E}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \dot{E}_\alpha}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}}{\partial \alpha} = -j\omega\mu \dot{H}_{er}, \tag{23.22}$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \dot{\vec{E}} = \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{E}}{\partial r} = -j\omega\mu \dot{H}_{e\alpha}, \tag{23.23}$$

так как $\dot{E}_\alpha = \dot{E}_r = 0$.

Отсюда

$$\dot{H}_{er} = -\frac{1}{j\omega\mu r}(M_4 e^{-k_1 r} + N_4 e^{k_1 r})\cos\alpha, \qquad (23.24)$$

$$\dot{H}_{e\alpha} = \frac{k_1}{j\omega\mu}(-M_4 e^{-k_1 r} + N_4 e^{k_1 r})\sin\alpha. \qquad (23.25)$$

Из граничных условий на поверхности экрана:

$$\text{при } r = r_0 \text{ — } \mu\dot{H}_{er} = \mu_0\dot{H}_{ar} \text{ и } \dot{H}_{e\alpha} = \dot{H}_{a\alpha};$$

$$\text{при } r = r_0 - a \text{ — } \mu\dot{H}_{er} = \mu_0\dot{H}_{ir} \text{ и } \dot{H}_{e\alpha} = \dot{H}_{i\alpha}.$$

После подстановки выражений для составляющих вектора напряженности МП и сокращения получается система уравнений

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{j\omega r_0}(M_4 e^{-k_1 r_0} + N_4 e^{k_1 r_0}) = \mu_0\dot{H}_0(1-w),\\
&\frac{k_1}{j\omega\mu}(-M_4 e^{-k_1 r_0} + N_4 e^{k_1 r_0}) = -\dot{H}_0(1+w),\\
&-\frac{1}{j\omega(r_0-a)}(M_4 e^{-k_1(r_0-a)} + N_4 e^{k_1(r_0-a)}) = \mu_0 K\dot{H}_0,\\
&-\frac{k_1}{j\omega\mu}(-M_4 e^{-k_1(r_0-a)} + N_4 e^{k_1(r_0-a)}) = -K\dot{H}_0.
\end{aligned}$$

Введением новых обозначений:

$$M_5 = \frac{M_4 e^{-k_1(r_0-a)}}{j\omega\mu_0 r_0},\;\; N_5 = \frac{N_4 e^{k_1(r_0-a)}}{j\omega\mu_0 r_0},\;\; m = \frac{\mu_0}{\mu}k_1 r_0,$$

и заменой в знаменателе третьего уравнения $r_0 - a \approx r_0$ систему преобразуют к виду

$$\begin{aligned}
&M_5 e^{-k_1 a} + N_5 e^{k_1 a} = -\dot{H}_0(1-w),\\
&-M_5 e^{-k_1 a} + N_5 e^{k_1 a} = -\dot{H}_0(1+w)/m,\\
&M_5 + N_5 = -K\dot{H}_0,\\
&-M_5 + N_5 = -K\dot{H}_0/m.
\end{aligned}$$

Из последней системы уравнений находят коэффициент экранирования:

$$K = \frac{1}{\operatorname{ch}k_1 a + 0{,}5(m + m^{-1})\operatorname{sh}k_1 a}, \qquad (23.26)$$

и коэффициент обратного действия экрана:

$$w = \frac{0{,}5(m - m^{-1})\operatorname{sh}k_1 a}{\operatorname{ch}k_1 a + 0{,}5(m + m^{-1})\operatorname{sh}k_1 a}. \qquad (23.27)$$

Для экранов, используемых в инженерной практике, обычно удовлетворяется условие $|k|r_0 = r_0\sqrt{\omega\mu\gamma} \gg 1$. В этом случае

$$k_1 = \sqrt{k^2 + r_0^{-2}} \approx k,\;\; m \approx \frac{\mu_0}{\mu}kr_0$$

и

$$K = \frac{1}{\operatorname{ch} ka + 0{,}5(m + m^{-1})\operatorname{sh} ka}, \tag{23.28}$$

$$w = \frac{0{,}5(m - m^{-1})\operatorname{sh} ka}{\operatorname{ch} ka + 0{,}5(m + m^{-1})\operatorname{sh} ka}. \tag{23.29}$$

Из приведенного расчета видно, что если первоначальное поле однородно, то ослабленное поле в полости экрана также однородно и совпадает по направлению с первоначальным, но сдвинуто от него по фазе, так как коэффициент экранирования — комплексное число.

С ростом частоты экранирование усиливается, т. е. коэффициент экранирования убывает. При $\omega = 0$ и $\mu = \mu_0$ он обращается в единицу и, следовательно, экранирования не будет. При $\omega = 0$ и стальном экране, когда $\mu >> \mu_0$, K может быть значительно меньше единицы. Электромагнитное экранирование в этом случае переходит в магнитное, обусловленное преимущественным прохождением постоянного магнитного потока в толще экрана. Величины k и m одновременно с частотой стремятся к нулю, а коэффициент магнитного экранирования стремится к пределу:

$$K_0 = \lim \frac{1}{\operatorname{ch} pa + 0{,}5(m + m^{-1})\operatorname{sh} pa} = \frac{1}{1 + 0{,}5\dfrac{\mu}{\mu_0}\cdot\dfrac{a}{r_0}} \approx \frac{1}{0{,}5\cdot\dfrac{\mu}{\mu_0}\cdot\dfrac{a}{r_0}} \tag{23.30}$$

при $k \to 0$, $m \to 0$.

23.2.4. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПАССИВНЫХ ЭКРАНОВ

В зависимости от режима работы экрана могут быть рекомендованы вполне определенные материалы. Среди них: металлические, фольговые, полимерные, токопроводящие краски и лаки, металлизированные сетки, композитные материалы и др. Ниже расскажем об электрофизических параметрах материалов, которые целесообразно использовать в тех или иных частотных областях, при тех или иных интенсивностях ЭМП помех.

Металлические материалы длительное время используются в практике электромагнитного экранирования, как правило, в виде металлических листов. Это объясняется тем, что высокая электрическая проводимость обеспечивает быстрое затухание электромагнитной энергии в толще металла, а большая разница между поверхностным сопротивлением металла и полным сопротивлением падающей волны приводит к значительному отражению поля от поверхности металла. Поэтому даже сравнительно тонкие металлические листы обладают высокой эффективностью экранирования. Однако практика показывает, что чрезвычайно большие эффективности экранирования фактически реализуются лишь на 10–20%, поскольку основным фактором здесь является качество конструкции.

Металлические материалы выбирают из условий достижения заданной величины ослабления ЭМП в рабочем диапазоне частот, устойчивости к коррозии, достаточной механической прочности, технологичности конструкции экрана и получения требуемых ее конфигураций и массогабаритных характеристик.

Электрофизические параметры ряда металлических материалов представлены в табл. 23.1.

В последнем столбце табл. 23.1 приведена эквивалентная глубина проникновения поля в материал, представляющая собой постоянную, характеризующую материал и определяемую в виде (23.7); $\mu_r = \mu/\mu_0$ — относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Фактическая глубина проникновения высокочастотного ЭМП не определяется однозначно. Например, если полагать ее равной расстоянию от поверхности экрана, на котором поле уменьшается до 1% своего значения на поверхности, то получается величина, равная 4,6δ. При десятипроцентном уменьшении получится 2,3δ. Глубина проникновения будет равна δ, если уменьшение поля взять равным $1/e = 1/2{,}73$.

Как следует из табл. 23.1, первому требованию, предъявляемому при экранировании к металлическому материалу, удовлетворяют все применяемые в настоящее время листовые материалы (сталь, медь, алюминий, латунь и др.) при соответствующей их толщине. Если рассматривать эффективность экранирования магнитными и немагнитными материалами одинаковой толщины в зависимости от частоты, то для разных частотных интервалов экранирующие свойства будут разными. Качественный вид эффективности экранирования в виде S^H в зависимости от частоты для магнитных и немагнитных металлов представлен на рис. 23.2.

Таблица 23.1

Электрофизические параметры ряда металлических материалов

Материал	Удельная электрическая проводимость, $\gamma \cdot 10^{-7}$ Ом·м$^{-1}$	Относительная магнитная проницаемость, μ_r	Эквивалентная глубина проникновения, $\delta = \sqrt{f^{-1}}$, м
Серебро	6,0	1	0,065
Медь	5,6	1	0,0672
Золото	4,0	1	0,0796
Алюминий	3,47	1	0,0854
Магний	2,16	1	0,108
Цинк	1,71	1	0,122
Латунь	1,48	1	0,1305
Никель	1,14	1	0,149
Бронза	1,03	1	0,157
Олово	0,85	1	0,173
Свинец	0,46	1	0,235
Сталь нержавеющая	0,11	1	0,480
Железо	0,15–0,96	1000–100	0,013–0,016
Пермаллой	0,17	80000	0,00137

В первом частотном интервале до $f_1 \in [3 - 10]\cdot 10^3$ Гц (зона I) магнитный экран (2) работает в квазимагнитостатическом режиме и обладает лучшими экранирующими свойствами, чем немагнитный экран. Это объясняется тем, что на низких частотах МП замыкается через толщу магнитного экрана. С ростом частоты возрастает роль индукционных токов и повышенная магнитная проводимость экрана теряет смысл. Во втором частотном интервале до $f_2 = 10^6$ Гц (зона II) немагнитный экран (1) имеет больший экранирующий эффект, чем магнитный. Это объясняется тем, что затухание отражением преобладает над затуханием поглощением, а немагнитные экраны лучше отражают поле. В третьем частотном интервале выше 10^6 Гц (зона III) магнитные экраны обладают лучшими экранирующими свойствами, чем немагнитные. Это объясняется тем, что затухание поглощением превалирует над затуханием отражением, а магнитные экраны лучше поглощают энергию. Следует отметить, что в реальных экранах указанные свойства магнитных и немагнитных материалов проявляются слабо. Преимущественное применение стали определяется условиями экономичности и технологичности конструкции. Преимущества стали теряются при экранировании элементов, по которым протекают токи, критичных к вносимым в них потерям. Так, сравнивая при прочих равных условиях потери мощности в экранах, выполненных из стали ($P_{ст}$) и меди ($P_м$), полагая при этом $\Delta \gg \delta$ (Δ — толщина экрана), получаем

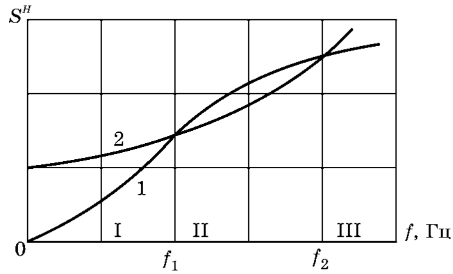


Рис. 23.2
Качественный вид эффективности экранирования в виде S^H

$$\frac{P_{ст}}{P_м} = \sqrt{\left(\frac{\gamma_м}{\gamma_{ст}}\right)}\mu_r, \tag{23.31}$$

где $\gamma_м$, $\gamma_{ст}$ — удельная электрическая проводимость соответственно меди и стали. Поскольку $\gamma_м > \gamma_{ст}$ и $\mu_r \gg 1$, потери в стали всегда выше. Поэтому применение стальных экранов в основном ограничивается из-за больших потерь в них.

При экранировании высокочастотных колебательных цепей и контуров цилиндрическими экранами с условием, что потери колебательной мощности не превышают 1%, радиус экрана должен быть:

$$R \geq 8{,}5 r_к \sqrt[3]{\frac{n^2 I^2}{\gamma\delta(l_к / r_к)P}}, \tag{23.32}$$

где $l_к$, $r_к$ — длина и радиус катушки, м; n — число витков катушки; I — ток в катушке, А; γ — удельная электрическая проводимость материала экрана, См/м; P — мощность генератора, Вт. Если в этом случае при прочих равных условиях применять стальные и медные экраны, то отношение их радиусов должно быть:

$$\frac{r_{ст}}{r_м} = \sqrt[6]{\frac{\gamma_м}{\gamma_{ст}}\mu_r}. \tag{23.33}$$

При $\gamma_м > \gamma_{ст}$ и $\mu_r \gg 1$ — $r_{ст} > r_м$ и габариты стального экрана оказываются больше, чем медного. Например, если $\mu_r = 50$, то при одних и тех же потерях радиус стального экрана должен быть примерно в два раза больше радиуса медного экрана. Примерно так же выглядят результаты сравнения стали с другими немагнитными материалами при использовании их в электромагнитном экранировании высокочастотных катушек с большой добротностью. Эти результаты оказываются справедливыми для экранов любой формы.

Рассеиваемая мощность быстро падает с увеличением эквивалентного радиуса $r_э$ экрана. Если необходимо уменьшить потери при заданном $r_э$ или уменьшить $r_э$ при заданных потерях, то экран следует изготовлять из меди или алюминия.

Для электромагнитного экранирования на высоких частотах могут быть успешно использованы тонколистовые материалы толщиной $(1 \div 5)\cdot 10^{-5}$, м. Однако при их использовании нужно считаться с возможностью возникновения резонансных явлений, снижающих эффективность экранирования. Что касается обеспечения устойчивости против коррозии и механической прочности, то этому требованию могут удовлетворять практически все металлические материалы, включая фольговые и металлизированные сетки.

Наиболее технологичными являются конструкции экрана из листовой стали, поскольку при монтаже такого экрана можно использовать сплошные сварные швы.

В последнее время стальные листы в качестве экранирующего материала стали использовать все чаще из-за возможности создать в них анизотропные свойства (различные магнитные проницаемости по координатным осям) за счет направленной прокатки. Благодаря увеличению магнитной проницаемости на пути основного магнитного потока удается существенно увеличить эффективность экранирования материала.

Фольговые материалы. К ним относятся электрически тонкие материалы толщиной $(1/5)\cdot 10^{-5}$, м. В сортамент фольговых материалов входят алюминий, латунь, цинк. Монтаж фольговых экранов несложен, так как крепление фольги к основе экрана производится клеем. Выбор клея должен производиться с учетом условий эксплуатации экрана, к которым относятся температурный режим, влажность, вибрационные нагрузки и др. Фольговые материалы применяются на токопроводящей конструкции экрана. Выбор толщины материала должен производиться с учетом возможностей возникновения резонансных явлений.

Расчет эффективности экранирования фольговыми материалами производится по формулам для электрически тонких материалов. Эффективность этих материалов достаточно высока при экранировании электрической напряженности ЭМП. Магнитную напряженность такие материалы ослабляют сравнительно мало и тем меньше, чем больше длина волны.

Полимерные материалы. Используются для уплотнений конструкций с полем СВЧ, которое чаще всего проникает через различные неплотные связи, разъемные соединители, щели и т. д. Наиболее перспективными являются уплотнения из электропроводящих полимерных материалов и резин, поскольку они обладают высокой эластичностью, стойкостью к многократным деформациям, влаго- и газонепроницаемостью, малым удельным весом и хорошими технологическими свойствами. Поскольку электропроводные полимерные материалы и резины в отношении прохождения через них СВЧ-энергии в основном относятся к группе полупроводников, то общее ослабление электромагнитной энергии СВЧ-диапазона определяется выражением

$$S^F = \Delta\alpha + 10\lg\left[\frac{1}{1-(r_\Sigma)^2}\right], \tag{23.34}$$

где Δ — толщина материала; r_Σ — модуль амплитудного коэффициента отражения;

$$\alpha = 2\pi f\sqrt{\varepsilon\mu_0\left[-0{,}5+0{,}5\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 4\pi^2 f^2}}\right]};$$

$$r_\Sigma = \sqrt{\frac{\exp(2\alpha b)+\exp(-2\alpha b)-2\cos(2\beta b)}{P_0^{-1}\exp(2\alpha b)+P_0\exp(-2\alpha b)-2\cos(2\beta b)}};$$

$$P_0 = \left(\frac{z_2-z_1}{z_2+z_1}\right)^2;\ \ z_2 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\varepsilon^2+\frac{\sigma}{4\pi^2 f^2}}};\ \ z_1 = \sqrt{\mu/\varepsilon}\cdot z,$$

где z_2, z_1 — волновое сопротивление полимерного материала и окружающей среды (в данном случае $z_1 = 377$ Ом); ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости материала; σ — удельная электрическая проводимость материала; β — фазовый множитель (рад/м), характеризующий движение электромагнитной волны в материале и определяет фазовую скорость $\upsilon_{\text{тм}} = \omega/\beta$.

Токопроводящие краски. Использование токопроводящих красок для электромагнитного экранирования является весьма перспективным направлением, так как позволяет быстро изготовить экран любого назначения. При этом может быть обеспечена эффективность экранирования не менее 30 Дб в широком диапазоне частот.

Токопроводящие краски создаются на основе диэлектрического пленкообразующего материала с добавлением в него проводящих составляющих, пластификатора и отвердителя. В качестве токопроводящих пигментов используются коллоидное серебро, графит, окиси металлов, порошковая медь, алюминий. Проводимость покрытий зависит от толщины, свойств и концентрации токопроводящего пигмента, от свойств пленкообразующего материала и других факторов.

Эффективность экранирования токопроводящими красками определяется, как и для электрически тонких материалов, по формуле

$$S^E = 20\lg\frac{60\pi}{R_\perp} + 20\lg 0{,}21\frac{\lambda}{r_э}, \tag{23.35}$$

где $R_\perp$ — поверхностное сопротивление; $r_э$ — эквивалентный радиус экрана. Формула (23.35) справедлива при $\lambda \gg 2\pi r_э$.

Сеточные материалы. Находят широкое применение из-за ряда преимуществ, связанных с приемлемыми массогабаритными характеристиками, удобством в эксплуатации и т. д. В качестве материалов для их изготовления используют латунь, сталь, омедненную сталь и др. Существуют различные типы сеточных материалов: плетеные проволочные (для экранированных кабелей); металлические сетки с перпендикулярным относительно друг друга набором проволок, ориентированно погруженных в диэлектрик, и т. д. Расчет эффективности экранирования такими материалами можно найти в п. 23.2. Более тщательный расчет может быть выполнен по формулам работ [23.2–23.5]. Экранирующие свойства металлических сеток проявляются главным образом в результате отражения электромагнитной волны от поверхности. Параметрами сетки, определяющими ее экранирующие свойства, являются шаг сетки d, равный расстоянию между соседними центрами проволоки, радиус проволоки r, удельная электрическая проводимость и магнитная проницаемость материала сетки.

Металлизация поверхностей. Получает все большее распространение благодаря большой производительности и универсальности методов нанесения покрытий.

Чаще используется метод распыления. Нанесение металла на подложку осуществляется пульверизацией расплавленного металла струей сжатого воздуха. Химический состав покрытия отличается от исходного материала, а микроструктура покрытия состоит из наслоения различного размера частиц металла и окисных пленок.

В процессе образования покрытия распыленные частицы металла ударяются с большой скоростью о поверхность подложки и деформируются. При этом образуется окисная пленка, свойства которой зависят от продолжительности полета частиц и активности металла. От ударов новых частиц пленка разрушается и вытесняется наружу, а частицы металла вступают в непосредственное соприкосновение, обеспечивая прочную связь с подложкой и непрерывную проводимость покрытия.

В качестве подложки можно использовать плотную бумагу, картон, ткань, дерево, текстолит, пластмассу, цементированные поверхности и др.

Металлизированные слои могут быть различной толщины. Толщина слоя зависит от свойств подложки. Количество наносимого слоя металла должно соответствовать физико-химическим свойствам материала подложки, его прочностным и деформационным характеристикам. Так, для плотной бумаги слой металла не должен превышать 0,28 кг/м^2, для ткани — 0,3 кг/м^2. Для жесткой подложки количество наносимого металла существенно не ограничивается. Ограничения обусловливаются в основном массогабаритными характеристиками экрана.

В качестве покрытия чаще используется цинк. Средняя эффективность экранирования при этом может быть рассчитана по формуле

$$S^F = 97 + 5\lg d_0 - 20\lg f, \qquad (23.36)$$

где d_0 — количество распыленного металла, кг/м^2; f — частота, МГц.

Эффективность экранирования алюминиевыми покрытиями примерно на 20 Дб выше, чем цинковыми. В общем случае при прочих равных условиях эффект экранирования металлизированным слоем ниже, чем сплошным листом той же толщины. Это объясняется отличием химического состава покрытия от структуры исходного металла, в результате чего проводимость покрытия обычно меньше проводимости самого металла.

Кроме рассмотренных здесь материалов, при экранировании можно использовать стекла с токопроводящим покрытием; специальные ткани; радиопоглощающие материалы; электропроводные клеи и т. д.

В качестве перспективных материалов, существенно повышающих функции экранирования, рекомендуются анизотропные, композитные и составные материалы.

Анизотропные материалы. Из анизотропных материалов, которые могут быть рекомендованы при изготовлении экранов в электротехнических устройствах, можно рассматривать диэлектрические, магнитные и проводниковые материалы для экранирования соответственно статических ЭП, и МП, и ЭМП. При этом представляют интерес лишь материалы с ортогональной анизотропией: оси анизотропии прямолинейны и совпадают с направлением трех основных векторов координатной системы. Следует отметить, что большинство анизотропных материалов удовлетворяют отмеченным условиям.

Из известных в настоящее время материалов с анизотропными свойствами интерес для целей экранирования представляют материалы, собранные в табл. 23.2.

Диэлектрические материалы рекомендуется использовать для защиты кабелей и токопроводящих шин, а также в качестве покрытия оболочек блоков электроники от воздействия ЭСП.

Магнитные материалы рекомендуется использовать при экранировании статических МП, а также низкочастотных ЭМП.

Таблица 23.2

Материалы с анизотропными свойствами

Наименование материалов		**Величина анизотропии $M^2 = (\chi_\varphi/\chi_r)$, $\chi = (\varepsilon, \mu, \gamma)$**
Диэлектрические материалы $M^2 = (\varepsilon_\varphi/\varepsilon_r)$	Слюда	1–5
	Слоистые изоляционные материалы	1–5000
Магнитные материалы $M^2 = (\mu_\varphi/\mu_r)$	Холоднокатаные текстурованные материалы	1,5–10
	Ферромагнитные ленты	1–500
	Ферромагнитные пленки	1–10
	Спрессованные магнитопроводящие материалы	1–10
	Композиционные магнитные материалы	1–10
Проводниковые материалы $M^2 = (\gamma_\varphi/\gamma_r)$	Сплавы из проводящих материалов	1–10
	Слоистые проводниковые материалы	1–5000
	Смеси из нескольких компонент	1–10
	Структурно-анизотропные материалы	1–10
Композиционные материалы $M^2 = (\chi_\varphi/\chi_r)$	Материалы волокнистого строения	1–3000

Проводниковые материалы рекомендуются при экранировании ЭМП в широком диапазоне изменения частоты.

Количество разрабатываемых в настоящее время материалов весьма велико. Экспериментальное определение эффективных параметров многокомпонентных систем связано с трудоемкими затратами и технически достаточно сложно выполнимо. Эти обстоятельства стимулируют поиски расчетных методов прогнозирования свойств разрабатываемых композитов.

Анализ существующих материалов с анизотропными параметрами показывает, что созданию таких материалов не уделялось должного внимания, а поэтому не исчерпаны возможности их создания.

Следует принять во внимание, что анизотропные материалы являются средством повышения эффективности электромагнитных устройств путем:

а) снижения паразитных вихревых токов в конструктивных элементах;

б) перераспределения магнитных потоков в элементах устройств;

в) перераспределения электрических токов на путях магнитных потоков.

Представляется целесообразным наряду с использованием естественных анизотропных материалов обратить особое внимание на создание композиционных и составных материалов.

Композиционные материалы. Таковыми могут быть также диэлектрические, магнитные и проводниковые материалы. При расчете их параметров необходимо рассматривать некоторую периодическую структуру, состоящую из анизотропных составляющих, вводя срединные эквивалентные параметры материала. При создании новых технологий при изготовлении экранирующих материалов необходимо использовать известные способы стимулирования степени анизотропии (подмагничивание, вибрацию, вытягивание и т. д.). В результате могут быть получены существенные анизотропные параметры

$$(\chi_t/\chi_n) \in [1 \div n]\cdot 10^n,\ n = 1, 2, 3\ (\chi \equiv [\mu, \varepsilon, \gamma]).$$

Многослойные структуры. При экранировании статических и квазистатических МП с целью создания глубокого «магнитного вакуума» могут быть рекомендованы структуры, у которых проводящая (магнитная или электрическая) среда толщиной $\Delta_{\text{м}}$ чередуется с непроводящей средой толщиной $\Delta_{\text{н}}$ так, что $(\Delta_{\text{м}}/\Delta_{\text{н}}) \to \text{const}$. Такие составные экраны могут рассматриваться как сплошные с диагональной анизотропией параметров. Так, в случае магнитостатики чередование весьма тонких ферромагнитных и немагнитных слоев в пределе, когда толщина отдельного слоя стремится к нулю $(\Delta_{\text{м}} + \Delta_{\text{н}}) \to 0$, $\Delta_{\text{м}}/\Delta_{\text{н}} \to \text{const}$) при сохранении общей толщины оболочки фиксированной, вся структура может рассматриваться как сплошная анизотропная среда с тензором:

$$\mu_{ik} = \hat{\mu} = \frac{\partial B_i}{\partial H_k} = \begin{vmatrix} \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_t \end{vmatrix}, \tag{23.37}$$

где i, $k = 1$ соответствует координате x_1; i, $k = 2$ и i, $k = 3$ — координатам x_2, x_3 (n и t — индексы нормального и тангенциального направлений к поверхности слоя).

23.2.5.
СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭКРАНИРОВАНИЯ

Обеспечение ЭМС при использовании современного электрооборудования требует радикального повышения эффективности применяемых экранирующих устройств. Экранирование является наиболее распространенным и полно разработанным способом ослабления и локализации как стационарных, так и импульсных ЭМП в интересах устойчивости функционирования рецепторов путем ослабления индуктивных связей. В последние годы предпринята попытка выйти на оптимальные экраны с целью снижения их массогабаритных показателей, что существенно для транспортных энергоустановок.

В качестве мероприятий, оптимизирующих экранирующие оболочки и призванных увеличить их эффективность, можно назвать [23.1]:

а) создание двухслойных оболочек с управляемым эксцентриситетом;

б) создание оболочек с параметрическими неоднородностями: геометрическими и материальными;

в) стабилизирование магнитного состояния материала экрана и его подмагничивания;

г) синтезирование многослойных оболочек с оптимальными экранирующими свойствами чередованием магнитопроводящих и непроводящих слоев.

Необходимо отметить, что данные мероприятия позволяют поднять эффективность экранирования в полтора-три раза при сохранении или даже некотором улучшении массогабаритных показателей. Отмечается, что диапазон выбора формы экранирующей оболочки с учетом направленности поля помех невелик. Применение комбинированных и многослойных экранов приводит к усложнению и удорожанию экранирующих систем, к ухудшению их массогабаритных показателей. Столь же проблематичен путь повышения эффективности экранирования путем введения параметрических неоднородностей (по форме), поскольку связан со значительным усложнением и удорожанием конструкции экрана. Больший успех может быть достигнут благодаря правильному использованию известных и перспективных материалов: i, $k = 1$ соответствует радиальной координате q_1; i, $k = 2{,}3$ — поверхностным координатам q_2 и q_3 (q_1, q_2, q_3 — ортогональная криволинейная система координат);

$$\mu_t \approx \mu_0 \mu_n \frac{\Delta.}{\Delta. + \Delta,}, \ \ \mu_n \approx \mu_0. \tag{23.38}$$

Для специальных экранов, защищающих ответственное электрооборудование, могут использовать многослойные сверхпроводники, изготовленные из материалов с анизотропными электрическими и магнитными свойствами. Дополнительно должны осуществляться следующие мероприятия:

1) подмагничивание ферромагнитного материала вдоль одной из осей приводит к анизотропии материала — $(\mu_t/\mu_n) \in [1 \div 3]$;

2) охлаждение под растяжением ферромагнитных материалов — $(\mu_t/\mu_n) \in$ $\in [1 \div 1{,}5]$;

3) дрессировка ферромагнитных материалов в сильных направленных МП с однонаправленным растяжением или сжатием — $(\mu_t/\mu_n) \in [1 \div 2{,}5]$.

23.3.
ЭКРАНИРОВАНИЕ АКТИВНОЕ

23.3.1.
ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ

Пассивные оболочки, экранирующий эффект которых зависит от величины индуцируемых в материале оболочки токов и отведения части магнитного потока по материалу, требуют большого расхода дорогостоящего материала. Поэтому конструкторы проявляют большой интерес к различным методам увеличения эффективности экранирования без добавления дорогостоящего материала: подмагничиванию материала экрана или его встряхиванию с целью увеличения магнитной проницаемости; активному экранированию и созданию комбинированных экранов (пассивных и активных).

В ряде технических областей (например, при компенсации МП Земли, постоянных МП объектов и т. д.) получили распространение активные экраны. Нетрудно показать (например, [23.3]), что с помощью тока, распределенного по некоторой поверхности S, ограничивающей объем, в котором необходимо добиться либо отсутствия поля от внешних источников, либо сохранить однородное заданное поле, можно скомпенсировать напряженности МП помех, поступающих извне. Распределение тока, близкое к требуемому, может быть реализовано с помощью петлевой обмотки, размещенной на S. Обмотка играет роль экрана, защищающего внутреннюю область от внешнего МП. Такой принцип экранирования может быть использован в любых энергетических, измерительных и других системах, где требуется частично или полностью скомпенсировать постоянное и переменное МП некоторого источника в окружающем его пространстве. В отличие от электромагнитных экранов, у которых экранирующий эффект достигается за счет вихревых токов, возбуждаемых в проводящей оболочке под действием МП, компенсация здесь осуществляется с помощью одной или группы петлевых обмоток, питание которых может осуществляться либо от отдельного источника, либо от источника, создающего поле помех.

Для обеспечения эквивалентности пассивного и активного экранов при одном и том же источнике МП необходимо, чтобы экраны имели одинаковую форму и размеры и чтобы распределение тока по поверхности активного экрана было таким же, как и пассивного. В хорошо экранирующем пассивном экране глубина проникновения электромагнитной волны δ существенно меньше толщины экрана Δ и вихревые токи сосредоточены лишь в весьма тонком поверхностном слое. В активном экране распределение тока также должно быть близким к поверхностному, для чего толщину обмотки следует выбирать возможно более малой. Имеется, однако, существенное отличие: распределение тока по толщине обмотки активного экрана может быть сделано близким к равномерному, в то время как для пассивного экрана, по самому принципу его действия, оно должно быть неравномерным. Поэтому при одинаковых потерях мощности толщина обмотки активного экрана может быть много меньше толщины стенки пассивного экрана (теоретически в отношении δ/Δ). Приблизительно в таком же отношении будут находиться и веса экранов.

При высоких частотах толщина электромагнитных экранов невелика и нередко выбирается по чисто конструктивным соображениям. Поэтому принципиальная возможность дальнейшего ее уменьшения большого значения не имеет, и в этой области частот переход от пассивных экранов к активным вряд ли может быть оправдан. Иначе обстоит дело в промышленных установках, работающих при низких частотах. Здесь толщина экранов достигает десятков миллиметров, а массы — сотен и тысяч килограммов. Возможность в несколько раз уменьшить толщину экрана, не увеличивая потерь мощности и не снижая качества экранирования, дает активным экранам большие преимущества, которые в ряде случаев могут решить вопрос о выборе типа экрана в их пользу, несмотря на связанное с этим усложнение конструкции. В установках постоянного тока, где применение ферромагнитных экранов не всегда допустимо, активные экраны могут оказаться единственным средством для эффективной компенсации внешнего МП.

В основе процесса компенсации лежит принцип суперпозиции МП помех и МП компенсирующей системы. Компенсирующие системы вместе с источниками питания образуют устройство, задача которого заключается в создании в заданной области пространства МП, близкого по структуре, равного по величине и противоположного по направлению МП помех. Компенсирующие системы включают: источники компенсации, имеющие вид контурной обмотки или многовитковой катушки; элементы автоматики, контроля и сигнализации. Ток в обмотках регулируется автоматически с помощью специальных усилителей.

Система компенсации МП должна быть построена так, чтобы в результате наложения МП помех и поля компенсации результирующее МП в заданной области пространства отвечало бы требованиям, указанным в техническом задании на проектирование системы компенсации. Задача построения необходимой пространственной и временной структуры МП в некоторой области пространства — одна из сложнейших задач прикладной электротехники. Трудность ее решения заключается в том, что область, в которой требуется скомпенсировать МП, как правило, находится далеко от источников МП и обычно недоступна для установки в ней каких-либо датчиков, которые могут дать информацию об эффективности процесса компенсации. Поэтому практический интерес представляют лишь такие способы компенсации, действия которых основываются на закономерностях, установленных между характеристиками, измеренными на самом устройстве помех (или в ближайших его окрестностях) или на большом расстоянии от него.

В настоящее время известны способы компенсации МП по «току» и по «полю». Способ компенсации по «току» может быть реализован при компенсации МП отдельного источника (электрической машины, трансформатора и т. д.) лишь при работе с ненасыщенными ферромагнитными массами. При насыщении ферромагнитных масс система компенсации по «току» не работает удовлетворительно.

В основу систем компенсации по «полю» могут быть положены закономерности, существующие между МП помех и токами, протекающими в компенсационных обмотках. Основная задача такой системы компенсации заключается в том, чтобы определить параметры и места расположения вокруг источника, создающего МП помех, измерительных датчиков. При этом следует соблюдать некоторые условия.

1. ЭДС, индуцируемые в измерительных датчиках, должны быть подобны МП источников и МП помех.

2. МП помех необходимо исключать в ходе измерительного процесса от основного МП.

Основная трудность заключается в том, чтобы свести к минимуму паразитные сигналы, поступающие на датчики и на входы усилителей. Эти сигналы могут быть созданы местными неоднородностями в конструкции устройства помех и перекрестными связями по полю между датчиками одного канала и компенсирующими источниками МП помех других каналов.

Системы компенсации по «полю» являются замкнутыми. Их управляющий сигнал формируется полем, представляющим разность МП устройства помех и МП компенсации. Системы компенсации по «полю» обеспечивают компенсацию как основной частоты, так и высших гармонических составляющих МП помех в широком диапазоне режимов работы устройства, вплоть до экстремальных (короткие замыкания, включения и отключения и т. д.).

Применение компенсационных устройств и повышение эффективности компенсации требует всестороннего исследования закономерностей формирования как МП помех, так и компенсирующего МП: их структуры, а также амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик.

23.3.2. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ ОБМОТОК С ТОКАМИ

При решении задач компенсации МП важно определить степень соответствия получаемого с помощью обмоток с токами МП заданному МП. Это требует выбора структурных критериев МП и установления их связи с геометрическими параметрами обмоток.

Известно, что внешнее МП источника (или системы источников) может быть представлено в виде суммы полей мультиполей (например [23.3]):

$$H_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R^{n+2}} \sum_{m=0}^{n} [a_{nm} \cos(m\varphi) + b_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos\theta), \qquad (23.39)$$

где $\{R, \theta, \varphi\}$ — сферические координаты точки наблюдения; H_R — радиальная составляющая напряженности поля; a_{nm}, b_{nm} — коэффициенты; $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра; n, m — порядок и степень мультиполя.

Под элементарными мультиполями понимаем члены ряда (23.39) при n — const и m — var ($m \in [0; n]$), сумма которых описывает распределение поля некоторого мультиполя порядка n в общем случае. Как следует из выражения (23.39), с увеличением n-го порядка мультиполя возрастает степень убывания его величины с расстоянием. Поэтому уже на небольшом расстоянии

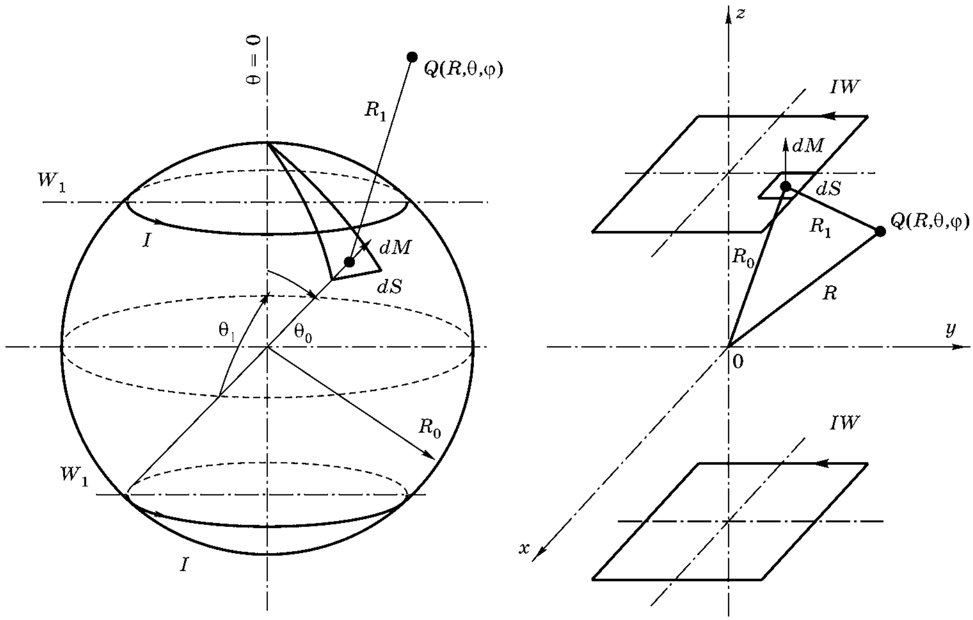


Рис. 23.3
Принципиальная схема активного экрана

от источника величина поля будет определяться двумя-тремя мультиполями низшего порядка, которые и следует экранировать.

Рассчитаем избирательные активные экраны в виде контурных обмоток с током для низших порядков мультиполей различных источников МП. В качестве активных экранов могут быть использованы питаемые током контурные обмотки, расположенные по координатным линиям сферической, цилиндрической и декартовой систем координат.

Напряженность МП, создаваемая обмотками компенсационного устройства, по которым протекает ток (его принципиальная схема изображена на рис. 23.3), может быть определена по формуле

$$H_R = -\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{d\vec{M}\cos(d\vec{M},\vec{R}_1)}{\vec{R}_1^2}\right], \qquad (23.40)$$

где $d\vec{M}$ — вектор элементарного магнитного момента; R_1 — расстояние от элементарного магнитного момента до точки наблюдения; S — поверхность, ограниченная контурной обмоткой; кроме того,

$$d\vec{M} = IwdS;$$

$$R_1^2 = R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cdot [\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)];$$

здесь Iw — ампер-витки контурной обмотки; R_0, θ_0, φ_0 — координаты расположения источника поля. Выражение $\cos(d\vec{M},\vec{R}_1)/R_1^2$ может быть представлено в виде частной производной:

$$\frac{\cos(d\vec{M},\vec{R}_1)}{R_1^2}=\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{R_1}\right), \qquad (23.41)$$

где k — координата, коллинеарная вектору $d\vec{M}$.

Производя операции по формуле (23.41), получим радиальную составляющую напряженности МП, создаваемого различными контурными обмотками с током.

Сопоставляя выражения (23.40) и (23.41), можно выразить мультипольные коэффициенты a_{nm}, b_{nm} через токи контуров в виде

$$\{a_{nm},b_{nm}\}=\{\Phi_{nm}(q_1,q_2,q_3),G_{nm}(q_1,q_2,q_3)\}\sum_i(I_i w_i), \qquad (23.42)$$

где $\Phi_{nm}(q_1, q_2, q_3)$, $G_{nm}(q_1, q_2, q_3)$ — функции в ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$; $i \in [1, N]$ — количество контуров с токами I_i.

При выводе выражений (23.42) среду, в которой располагаются контуры с токами, считаем однородной и пренебрегаем размерами поперечных сечений проводников. Для избирательного экранирования пространственных гармоник низших порядков какого-либо источника МП достаточно, чтобы активный электромагнитный экран создавал противоположное МП, в котором отсутствуют все низшие и по меньшей мере три следующие за экранируемой высшие гармоники. При этом более высокие гармоники принимаются равными нулю на том основании, что их величина с увеличением расстояния от источника R стремится к нулю в R^{-4} раз быстрее, чем величина экранируемой гармоники, так как согласно (23.42) величина любой гармоники n-го порядка убывает с расстоянием как R^{-n-2}. Таким образом, в состав МП, создаваемого избирательным активным экраном, будут входить экранируемая пространственная гармоника n-го порядка и гармоники порядка $k \geq n + 4$, величина которых убывает с увеличением расстояния от источника как R^{-n-6} или даже быстрее, что дает нам право считать эти гармоники пренебрежимо малыми уже на небольших расстояниях от источника.

Используя (23.42), нетрудно рассчитать экраны для пространственных гармоник $n \leq 3$. Так, для экранирования МП дипольного характера ($n = 1$) в системе координат $\{R, \theta, \varphi\}$ достаточно использовать две включенные согласно кольцеобразные обмотки (аналогичные кольцам Гельмгольца). Для экранирования поля квадрупольного характера ($n = 2$) достаточно двух, а для экранирования поля октупольного характера ($n = 3$) — трех, расположенных на сфере радиуса R_0 и симметричных относительно начала координат (совмещенного с источником поля) контурных обмоток с чередующимся направлением магнитного момента. Если в выражениях (23.42) перейти к системе координат $\{R, \varphi, z\}$, то можно рассчитать избирательные экраны, расположенные на поверхности одного радиуса. Аналогично и для системы координат $\{x, y, z\}$: две симметричные квадратные обмотки с числом витков w создают поле, имеющее практически дипольный характер ($n = 1$). При встречном включении двух квадратных обмоток создаваемое ими поле будет иметь квадрупольный характер ($n = 2$).

Описанные активные экраны, будучи замкнутыми на себя, превращаются в пассивные избирательные экраны для соответствующих пространственных гармоник поля источника.

Эффективность активных экранов теоретически равна бесконечности, так как напряженность МП (любой гармоники), создаваемого источником МП на некотором расстоянии от него, может быть сведена к нулю противоположным полем избирательного экрана.

Практически эффективность экрана будет определяться процентом неэкранированных высших гармоник поля источника и диапазоном режимов работы конкретного устройства, так как изменение режимов работы может привести к несоблюдению равенства поля источника и противоположного поля на экранируемой гармонике.

23.3.3. ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МУЛЬТИПОЛЕЙ

Если удается построить физическую модель мультиполя, адекватную в отношении поля математической модели, то принципиальных трудностей при создании компенсирующих устройств не встречается. Так, связь между сферическими гармониками и потенциалами мультиполей описана в [23.6]. Здесь остановимся лишь на видах мультиполей, которые могут быть интерпретированы в виде физической модели. Таковыми являются дипольные и квадрупольные модели.

Дипольные модели. В соответствии со сферическим гармоническим анализом диполь определяется тремя коэффициентами ряда — a_{10}, a_{11}, b_{11}, которые схематически представляются в виде (рис. 23.4).

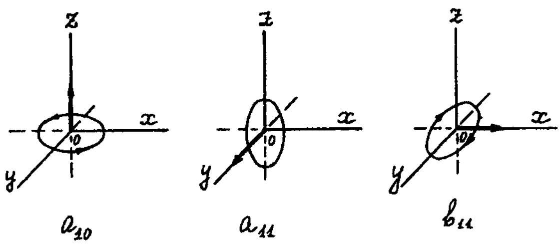


Рис. 23.4
Дипольные модели

Они являются проекциями диполя на оси прямоугольной системы координат: $a_{10} = \vec{M}_x = \vec{M}_{10}$, $a_{11} = \vec{M}_y = \vec{M}_{11}^{(0)}$, $b_{11} = \vec{M}_z = \vec{M}_{11}^{(e)}$, а при геометрическом сложении дают диполь с моментом $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + b_{11}^2}. \tag{23.43}$$

В соответствии с (23.28) диполь, произвольно ориентированный в пространстве относительно точки O, может быть представлен физической моделью в виде трех петель (витков) с токами, пропорциональными коэффициентам a_{10}, a_{11}, b_{11}.

Квадрупольные модели. Квадруполь определяется пятью коэффициентами мультипольного ряда [23.6] — a_{20}, a_{21}, a_{22}, b_{21},b_{22}, которые схематически представляются в виде [23.4] (рис. 23.5).

Коэффициенты a_{20}, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} являются составляющими квадрупольного магнитного момента и могут быть определены в виде $a_{20} = \vec{M}_{20}$,

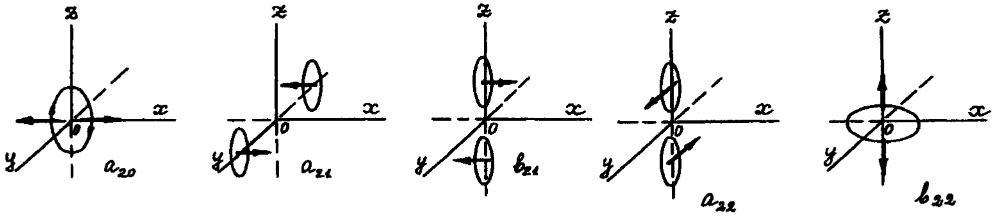


Рис. 23.5
Квадрупольные модели

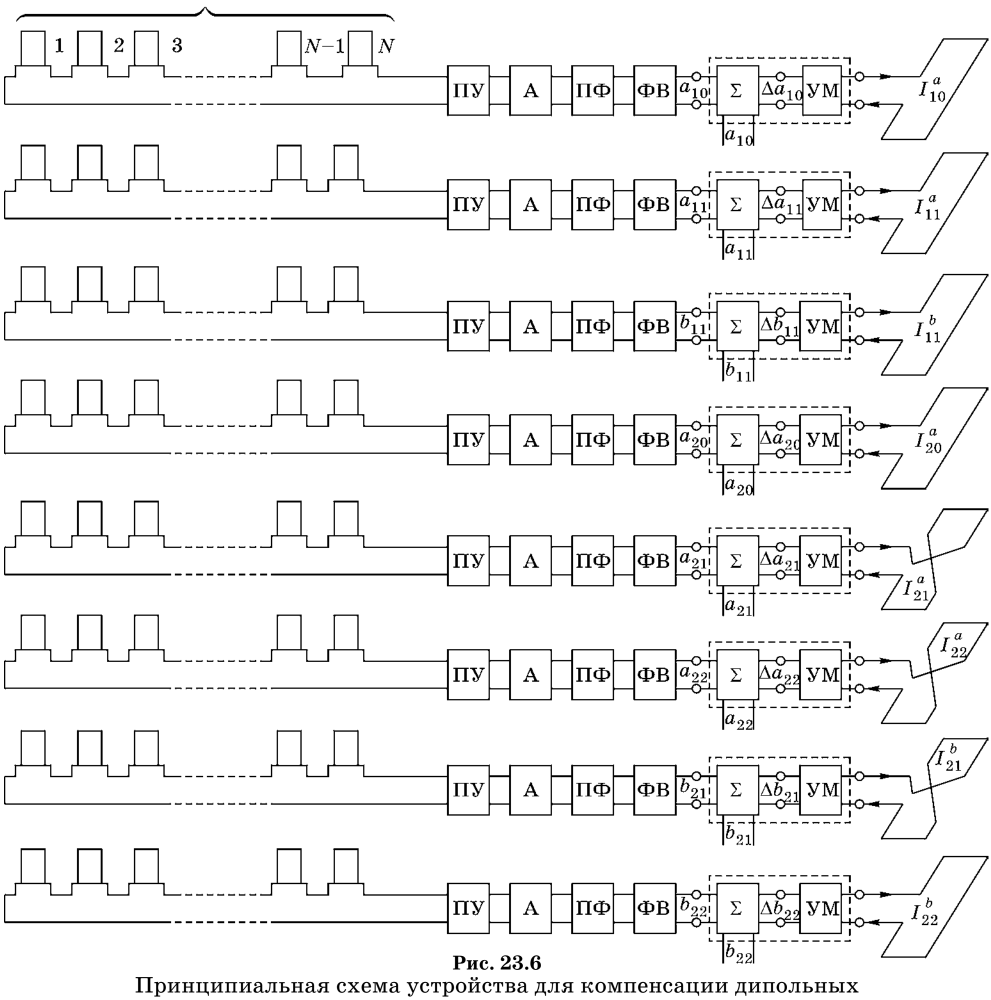


Рис. 23.6
Принципиальная схема устройства для компенсации дипольных и квадрупольных компонент МП

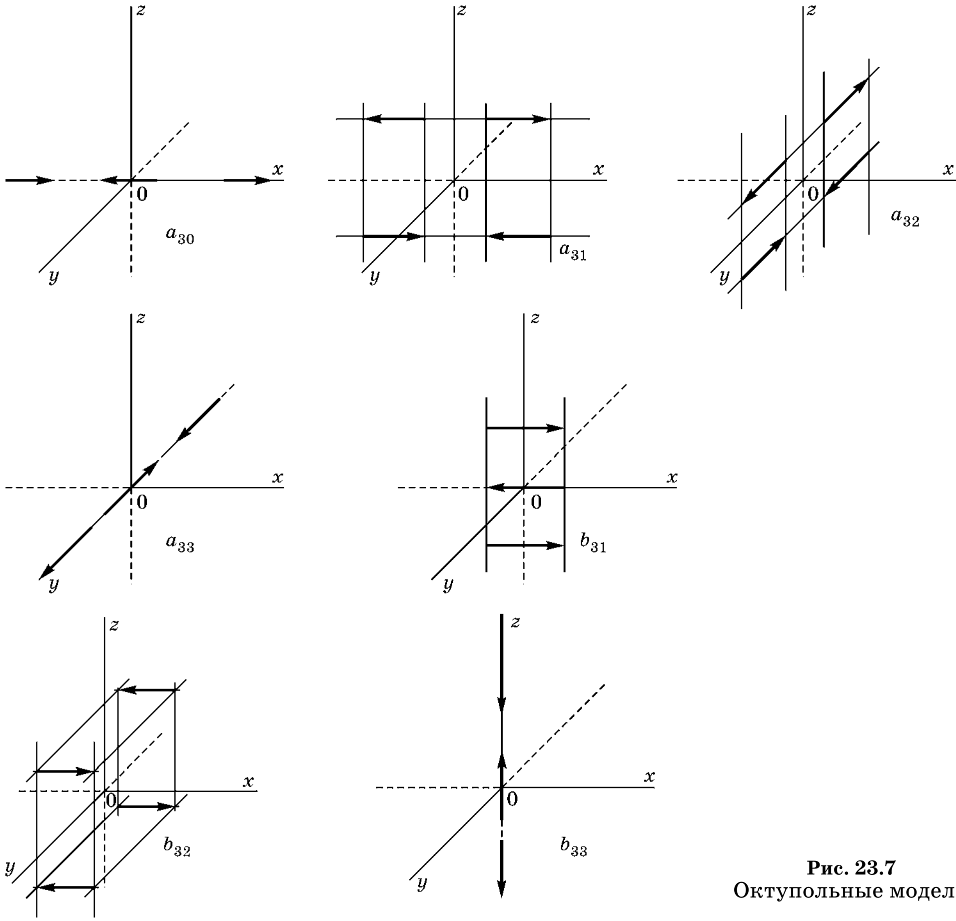


Рис. 23.7
Октупольные модели

$a_{21} = \vec{M}_{21}^{(0)}$, $a_{22} = \vec{M}_{22}^{(0)}$, $b_{21} = \vec{M}_{21}^{(e)}$, $b_{22} = \vec{M}_{22}^{(e)}$. Для них могут быть построены физические модели. Так, для составляющих a_{20} и b_{22} физические модели, как и в случае квадруполя, будут представлять петлевые обмотки — обмотки с токами I_{20}^{a}, I_{22}^{b}, а для a_{21}, b_{21}, a_{22}, обмотки в виде двойных петель (восьмерок), — обмотки с токами I_{21}^{a}, I_{21}^{b}, I_{22}^{a} (рис. 23.6) для компенсации дипольных и квадрупольных пространственных гармоник поля.

Октупольные модели. Октуполь определяется семью коэффициентами мультипольного ряда [23.5] — a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, которые схематически представляются в виде рис. 23.7.

23.3.4. КОМПЕНСАЦИЯ ДИПОЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

Результаты исследований показывают, что значение напряженности переменного МП существенно зависит от геометрии источника и, в частности, от соотношения длины и наружного диаметра. По мере удаления от поверхности источника доля высших пространственных гармоник в спектре поля уменьшается и на расстояниях, превышающих диаметр оболочки источника, вместо бесконечных рядов для радиальной составляющей магнитной напряженности достаточно удерживать лишь первые три члена с коэффициентами a_{10}, a_{11}, b_{11}. Поэтому удовлетворительная компенсация переменного МП будет достигнута, если скомпенсировать дипольное поле источника. В [23.7] показана возможность аппроксимации переменного источника МП, специально ориентированного и расположенного в пространстве магнитного диполя. Ниже приводятся системы, используемые для компенсации дипольного поля источника.

Система с одной петлевой обмоткой. По трем взаимно перпендикулярным осям с центром в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ — месте расположения диполя, полем которого аппроксимируют поле источника, расположены (рис. 23.8) индуктивные катушки-датчики 1 с ферромагнитными стержнями, соединенные «звездой» и питаемые от источника переменного тока 2 через фильтры.

Под влиянием поля источника в датчиках 1 индуктируются ЭДС, содержащие вторую гармонику. Последняя в каждой из цепей, соединенных в трехзвенную цепь «звездой», отфильтровывается фильтром двойной частоты 4 и выпрямляется с помощью выпрямителя 5. Три электрические тока сумми-

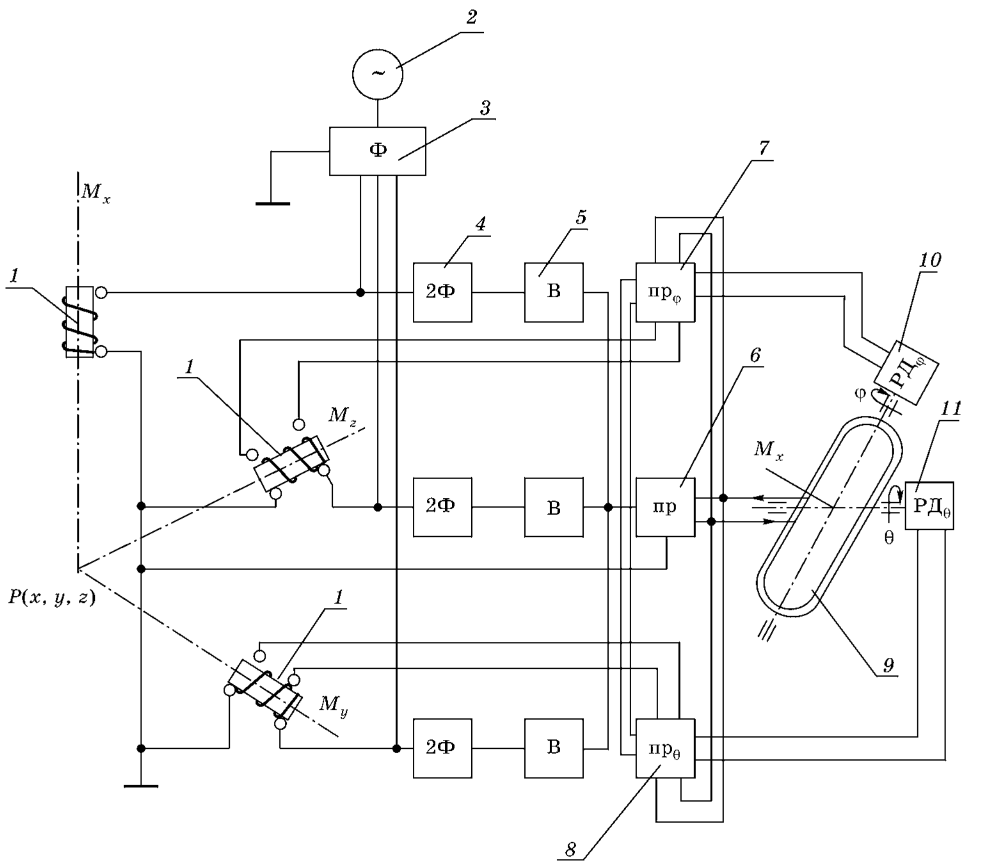


Рис. 23.8
Схема компенсации дипольных компонент источника МП

руются алгебраически. Полученный таким образом суммарный электрический ток пропорционален модулю вектора напряженности МП, а следовательно, в однородной среде и магнитного момента. Этот ток усиливается в преобразователе 9 и сдвигается на 180°. Полученный электрический ток пропускается по обмотке 7, благодаря чему создается компенсирующее МП с моментом $\vec{M}_k$, равным по значению и противоположным по направлению магнитному моменту источника $\vec{M}$. Так, если источник работает в определенном режиме и его МП не меняется по величине и направлению, то оно может быть скомпенсировано МП жестко закрепленной петлевой обмотки, ориентацию которой определяют из предварительных расчетов. В реальных условиях, однако, источник работает в разных режимах, что приводит к изменению его МП по значению и по фазе. Поэтому удовлетворительной компенсации МП источника достигают, если ориентация обмотки в пространстве около источника меняется при изменении режима его работы. Этого можно добиться за счет установки двух вспомогательных преобразователей 8 и 11.

Если учесть, что

$$M_x = \left|\vec{M}\right| \sin\varphi \sin\theta;\;\; M_y = \left|\vec{M}\right| \cos\varphi \sin\theta;$$

$$M_z = \left|\vec{M}\right| \cos\theta;\;\; \left|\vec{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

то для выделения углов θ и φ достаточно снять наведенные ЭДС со вспомогательных обмоток датчиков 1, ориентированных по осям y и z (индуктируемые токи пропорциональны моментам M_y и M_z), подать их на преобразователи 8 и 11 и сравнить их там с током, пропорциональным модулю магнитного момента $\vec{M}$. Электрические токи, пропорциональные углам θ и φ, подаются на реверсивные двигатели 6 и 10, которые осуществляют ориентацию обмотки по θ и φ.

Система с тремя петлевыми обмотками. В случае, когда ограниченность размеров помещения не позволяет разместить около источника петлевую обмотку, имеющую возможность ориентации в пространстве, необходимо установить непосредственно на корпусе три обмотки в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. В обмотки 8 (рис. 23.9) подают токи I_1, I_2, I_3,

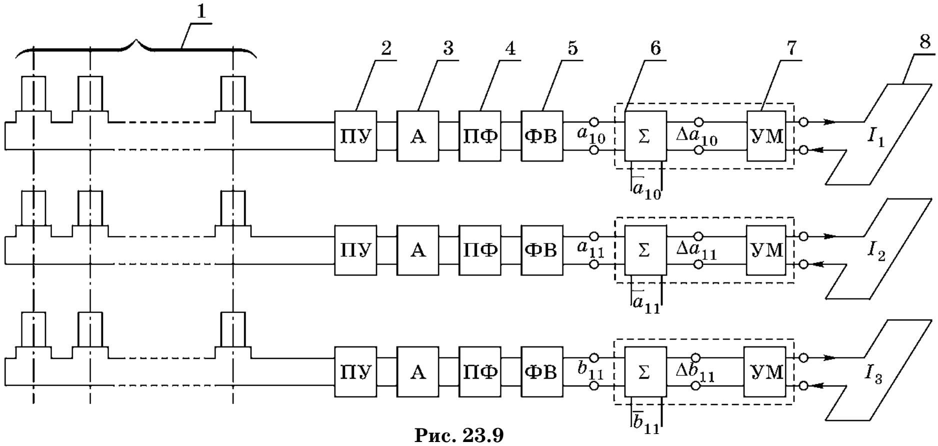


Рис. 23.9
Система компенсации дипольных компонент источника МП

пропорциональные составляющим дипольного момента МП источника — a_{10}, a_{11}, b_{11}. Токи снимаются с системы индуктивных катушек-датчиков 1, размещенных по полной координатной поверхности, охватывающей источник (например, сфера через $\Delta\theta = 90°$, $\Delta\varphi = 90°$), и соединенных последовательно в цепи согласно или навстречу.

В каждую из трех цепей включены предварительный усилитель 2, анализатор гармоник 3, полосовой фильтр 4, фазовый указатель 5, усилитель мощности 7. Контроль за полнотой компенсации МП осуществляется в сумматорах 6 путем сравнения с нормированными величинами $\bar{a}_{10}$, $\bar{a}_{11}$, $\bar{b}_{11}$.

23.3.5. КОМПЕНСАЦИЯ ДИПОЛЬНЫХ И КВАДРУПОЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

Ряд элементов ЭО, такого как электрические машины, может рассеивать во внешнее пространство переменные МП, преобладающими составляющими которых являются дипольные и квадрупольные моменты. Они могут быть определены с помощью анализаторов МП. В них системы датчиков, объеди-

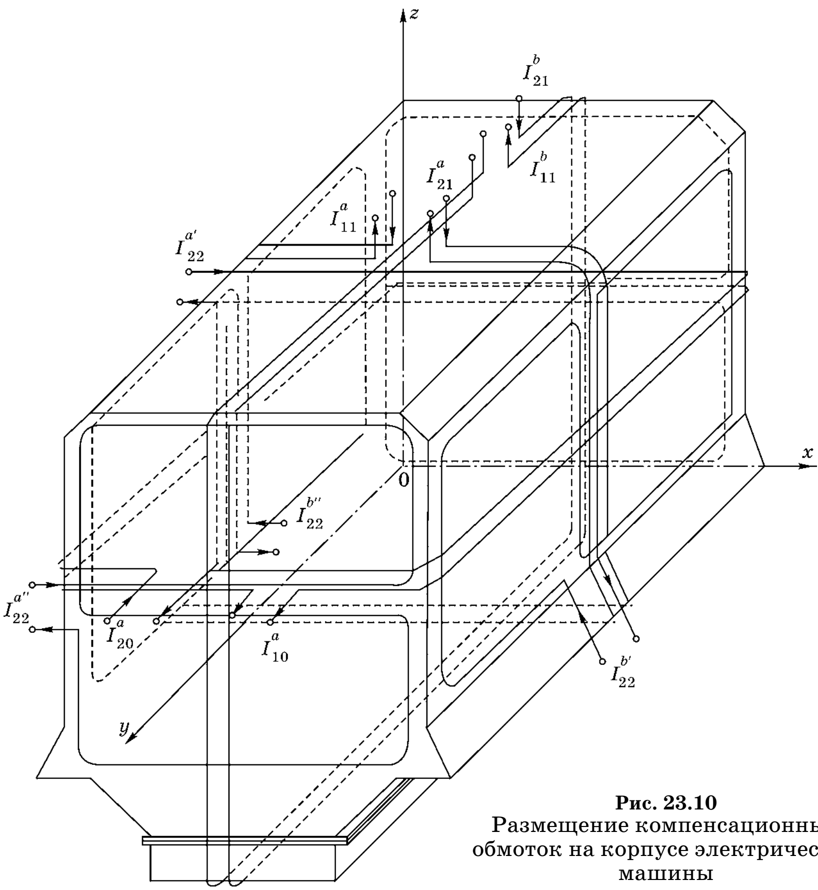


Рис. 23.10
Размещение компенсационных обмоток на корпусе электрической машины

ненные в электрические цепи, позволяют определить коэффициенты a_{10}, a_{11}, b_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, b_{21},b_{22}, которые пропорциональны дипольным и квадрупольным составляющим МП. Учитывая анализ, выполненный в п. 23.3.3–23.3.4, принципиальная блок-схема компенсационной системы может быть представлена в виде рис. 23.6. Здесь каждый из восьми каналов формирует информацию о соответствующем коэффициенте $a_{nm}(b_{nm})$, $n = 1, 2$; $m = 0, 1, 2$, дает информацию на контролирующий (показывающий) прибор 1, в сумматоре 2 сравнивает с нормированными величинами $\bar{a}_{nm}(\bar{b}_{nm})$ и в случае превышения электрических сигналов с датчиков над нормированными в виде $\Delta a_{nm}(\Delta b_{nm})$ усиливает их и подает в виде токов $I_{nm}^{(a)}(I_{nm}^{(b)})$ в соответствующие обмотки (петлевые и в виде восьмерок). Размещение обмоток на корпусе электрической машины представлено на рис. 23.10.

Элементы, используемые в конструкциях компенсирующих систем, представленные на рис. 23.10, принципиальных особенностей не имеют и могут быть выбраны из известных. По аналогичной схеме могут быть выполнены компенсирующие системы и для компенсации октупольных составляющих. Однако возникают трудности при создании физических моделей октуполей. Точность компенсации мультиполей зависит в первую очередь от точности изготовления датчиков анализаторов и тех погрешностей, которые при этом имеют место.

Контрольные вопросы

1. Для каких целей применяется экранирование?
2. Какие средства можно использовать для снижения ЭСП?
3. Какие средства можно использовать для снижения МСП?
4. Как можно снизить квазистатические ЭМП?
5. Расскажите о принципе действия пассивных экранов.
6. Как можно рассчитать пассивный экран?
7. В чем преимущества и недостатки пассивных экранов?
8. Каков принцип действия активных экранов?
9. В чем достоинства и недостатки активных экранов?

24

ГЛАВА 24

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

24.1. ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ С АНИЗОТРОПНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Необходимость расчета электромагнитных полей в анизотропных средах возникает в самых различных практических задачах. Это задачи геофизической развертки, задачи исследования различных электромагнитных устройств с анизотропными ферромагнетиками и пьезоэлектриками, задачи электрического моделирования движения грунтовых вод в анизотропных грунтах, задачи электрического нагрева различных анизотропных материалов и, конечно, задачи изучения самих анизотропных материалов. При этом анизотропия материалов бывает различной: она может быть обусловлена кристаллическим строением вещества, его микроструктурой и микроскопическими неоднородностями рассматриваемой композиции.

В последнем случае, рассматривая некоторую периодическую структуру, состоящую из изотропных составляющих, вводят средние эквивалентные параметры материала, которые зависят от направления векторов электрического и магнитного полей.

Ограничимся рассмотрением негиротропных сред с ортогональной анизотропией, т. е. сред, где всегда может быть выбрана такая ортогональная система координат, в которой удельные электрические параметры материала (диэлектрическая проницаемость, проводимость, магнитная проницаемость) выражаются диагональным тензором.

Часто встречающимся примером ортогональной анизотропии является прямолинейная анизотропия. В материалах с прямолинейной анизотропией при выборе осей координат x, y, z, совпадающих с осями анизотропии, анизотропный параметр $\hat{\upsilon}\,(\hat{\upsilon} \in [\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}])$, где $\hat{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость, $\hat{\mu}$ — магнитная проницаемость, $\hat{\gamma}$ — электрическая проводимость, выражается тензором такого вида:

$$\hat{\upsilon} = \begin{Vmatrix} \upsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_z \end{Vmatrix}. \qquad (24.1)$$

Прямолинейной анизотропией обладают, например, ферромагнитные ленты и пакеты пластин, слюда, кипы бумаги или ткани, различные волокнистые и слоистые структуры, грунты.

Вторым распространенным примером ортогональной анизотропии является аксиальная анизотропия, для которой в цилиндрических координатах r, α, z анизотропный параметр материала выражается также диагональным тензором:

$$\hat{\nu} = \begin{Vmatrix} \nu_r & 0 & 0 \\ 0 & \nu_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{Vmatrix}. \qquad (24.2)$$

Примером материалов с аксиальной анизотропией могут явиться участки ротора электрической машины, изоляция кабелей, ленточные тороиды, мотки пряжи, древесина и др.

Реже приходится иметь дело со сферической анизотропией. Примером структуры, описываемой диагональным тензором в сферических координатах, является «луковичная» структура многослойного ферромагнитного шара.

Рассмотрим некоторые случаи расчета электрических и магнитных полей в материалах с ортогональной анизотропией для различных частот ЭМП, когда задачи носят стационарный, квазистационарный или волновой характер.

24.2. СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Стационарные электрические и магнитные поля в любых средах при отсутствии пространственных зарядов описываются уравнениями непрерывности:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{D} = 0 \ \text{ для диэлектрика;} \\ &\operatorname{div}\vec{\delta} = 0 \ \text{ для проводника;} \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0 \ \text{ для магнетика.} \end{aligned} \qquad (24.3)$$

Для анизотропных сред каждый из этих векторов связан с градиентом потенциала афинным преобразованием, выражаемым тензорным уравнением

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi_{\text{Э}}; \\ \vec{\delta} &= -\hat{\gamma}\operatorname{grad}\varphi_{\text{Э}}; \\ \vec{B} &= -\hat{\mu}\ \operatorname{grad}\varphi_{\text{М}}. \end{aligned} \qquad (24.4)$$

В уравнениях (24.3)–(24.4) $\vec{D}$, $\vec{\delta}$, $\vec{B}$ — векторы электрического смещения, плотности тока и магнитной индукции; $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\gamma}$ — соответственно, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости и электрической проводимости; $\varphi_{\text{Э}}$, $\varphi_{\text{М}}$ — электрический и магнитный потенциалы.

Для анизотропных сред уравнение Лапласа приобретает следующий вид:

$$\vec{\nabla}(\hat{\nu}\vec{\nabla}\varphi) = 0. \tag{24.5}$$

Наибольший практический интерес представляет расчет полей в неоднородных средах, где анизотропные тела находятся в изотропном пространстве.

В этих задачах бывает необходимо сопрягать решения на границах изотропной и анизотропной областей. Граничное условие сопряжения решений вытекает из уравнений непрерывности потенциала $\varphi_э$, $\varphi_М$ и векторов поля (24.3).

Одним из путей решения этих задач является так называемое изотропизирующее преобразование координат, т. е. поиск такого преобразования координат в анизотропной области, чтобы в новых координатах уравнение (24.5) могло быть сведено к уравнению Лапласа и при этом на границах раздела изотропных и анизотропных сред новые координаты сопрягались бы со старыми. Этот путь был описан в работах [24.1–24.7].

Другой путь: непосредственный поиск решений уравнения (24.5) для анизотропной области и сопряжение его с решением для изотропной области.

24.2.1. РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

При рассмотрении электрических полей предполагается отсутствие пространственных зарядов.

Среды с прямолинейной анизотропией. Пусть в анизотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью, выражаемой в виде тензора второго ранга:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{Vmatrix},$$

создается электрическое поле; $\varphi(x, y, z)$ — потенциал точки с координатами x, y, z. Уравнение поля для этого диэлектрика будет иметь вид

$$\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\hat{\varepsilon}\operatorname{grad}\varphi = 0.$$

Переходя к дифференциальному оператору $\vec{\nabla}$, получаем

$$\vec{\nabla}\hat{\varepsilon}\vec{\nabla}\varphi = 0. \tag{24.6}$$

Таким образом, для анизотропных сред уравнение поля приобретает несколько необычный вид (24.6), где $\vec{\nabla}\hat{\varepsilon}\vec{\nabla}$ — дифференциальный оператор, отличный от лапласиана:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\vec{\nabla}\hat{\varepsilon}\vec{\nabla} = \varepsilon_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{24.7}$$

Важно найти такую деформацию (точечного преобразования пространства), чтобы каждой точке с координатами x, y, z рассматриваемого пространства A с анизотропными свойствами ($\hat{\varepsilon}$) соответствовала точка A_1 с координатами x_1, y_1, z_1 деформированного пространства, но с изотропными свойствами (ε_1) и при этом

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1); \tag{24.8}$$

$$\hat{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\varphi \cdot d\vec{s} = \varepsilon_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 \cdot d\vec{s}_1. \tag{24.9}$$

Если выражения (24.8)–(24.9) могут быть определены для соответствующих точек и элементов поверхности, то каждая точка пространства A отобразится в пространстве A_1 соответствующей точкой, а каждая эквипотенциальная поверхность — соответствующей поверхностью. Такое точечное преобразование пространства будем называть изотропизирующей деформацией.

Можно показать, что если выполнены условия (24.8) и (24.9), то емкости между двумя соответствующими парами поверхностей пространств A и A_1 будут одинаковы. Действительно: возьмем две поверхности s_a и s_b в пространстве A и зададим им потенциалы φ_a и φ_b. Тогда в пространстве A_1 появятся также две поверхности s_{a1} и s_{b1}, потенциалы которых в соответствии с (24.8) также равны φ_a и φ_b. Если теперь определить количество электричества внутри каждой из этих поверхностей

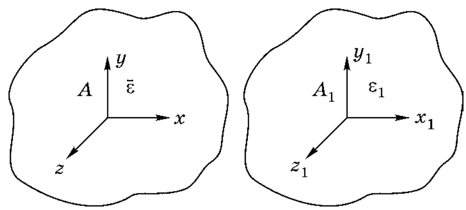


Рис. 24.1
Две пространственные системы отсчета

$$\oint \vec{D}d\vec{s},$$

то, как следует из условия (24.9), количества электричества на поверхностях s_a и s_{a1} и на s_b и s_{b1} между собой равны, а следовательно, равны и емкости между двумя телами, ограниченными этими поверхностями.

Найдем связь между точками пространств A и A_1 и свойства (в данном случае ε_1) пространства A_1 (рис. 24.1).

Для пространства A уравнение поля имеет вид

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{24.10}$$

а для пространства A_1:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z_1^2} = 0. \tag{24.11}$$

Для выполнения условия (24.8) необходимо

$$x_1 = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_x}}x; \;\; y_1 = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_y}}y; \;\; z_1 = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_z}}z, \tag{24.12}$$

где C — произвольная постоянная.

Действительно, подставляя (24.12) в уравнение (24.10), получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (24.11), легко видеть, что при преобразовании (24.12) условие (24.8) выполнено.

Для определения ε_1 воспользуемся условием (24.9), выбрав $d\vec{s} = \vec{k}dxdy$, а $d\vec{s}_1 = \vec{k}dx_1dy_1$, где $\vec{k}$ — орт оси z. Тогда

$$\hat{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\varphi \cdot d\vec{s} = \varepsilon_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dxdy,$$

$$\hat{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 \cdot d\vec{s}_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} dx_1dy_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_z}}{C} dxdy \frac{C^2}{\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}}.$$

Полагая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

из условия (24.9) получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}}{C}. \tag{24.13}$$

Таким образом, для того чтобы определить поле в среде с прямолинейной анизотропией, достаточно произвести изотропизирующую деформацию пространства путем растяжения его вдоль каждой из осей координат в отношении, обратно пропорциональном корню квадратному из значения диэлектрической проницаемости в направлении данной оси. Полученное таким образом изотропное пространство с диэлектрической проницаемостью, определяемой по формуле (24.13), можно рассчитать обычным путем, после чего, произведя деформацию, обратную первоначальной, легко найти потенциал любой точки анизотропного материала.

В том случае, когда поле плоскопараллельно и решение задачи производится в плоскости x, y, растяжение вдоль оси z должно отсутствовать и, следовательно,

$$C = \sqrt{\varepsilon_z}$$

и

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}. \tag{24.14}$$

Так как решение этой задачи не зависит от значения ε_z, то последнее может быть любым, и следовательно, деформация вдоль осей x и y может производиться в любом масштабе при условии неизменности отношения коэффициентов растяжения вдоль осей x и y:

$$x_1 = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_x}} x; \;\; y_1 = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_y}} y. \tag{24.15}$$

Таким образом, для определения плоскопараллельного поля в среде с прямолинейной анизотропией следует, деформировав в соответствующем отношении плоскость, определить поле в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью, равной среднегеометрическому значению составляющих проницаемости анизотропной среды в направлениях осей анизотропии.

Среды с аксиальной анизотропией. При рассмотрении полей в материалах с аксиальной анизотропией изотропизирующая деформация пространства может быть найдена подобно тому, как это имело место при рассмотрении сред с прямолинейной анизотропией.

Условие непрерывности линии индукции так же, как и в рассмотренном ранее случае, определяется уравнением (24.6). Однако для диэлектриков с аксиальной изотропией при совпадении осей анизотропии с цилиндрическими осями координат дифференциальный оператор:

$$\vec{\nabla}\hat{\varepsilon}\vec{\nabla} = \varepsilon_r \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\varepsilon_\alpha}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \varepsilon_z\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{24.16}$$

где диэлектрическая проницаемость ε представляет собой тензор с диагональной матрицей, записанной в цилиндрических координатах r, α, z (24.2).

По аналогии с решением задачи в среде с прямолинейной анизотропией произведем такое преобразование координат, чтобы потенциал φ_1 в новой системе координат r_1, α_1, z_1 соответствовал условиям

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{r_1^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z_1^2} = 0 \tag{24.17}$$

и

$$\hat{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\varphi d\vec{s} = \varepsilon_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 d\vec{s}_1 \tag{24.18}$$

при

$$\varphi_1(r_1,\ \alpha_1,\ z_1) = \varphi(r,\ \alpha,\ z). \tag{24.19}$$

Ограничимся рассмотрением только плоскопараллельных полей, для которых

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{24.20}$$

и допустим, что изотропизирующая деформация может быть выражена следующим образом:

$$r_1 = k_r(r)r \text{ и } \alpha_1 = \alpha. \tag{24.21}$$

Тогда уравнения

$$r_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial r_1} + r_1\frac{\partial^2 r}{\partial r_1^2}\right) + \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha^2} = 0 \tag{24.22}$$

и

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\alpha}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha} = 0 \tag{24.23}$$

должны быть тождественны.

Приравнивая коэффициенты при соответствующих производных, получаем

$$r_1\frac{\partial r}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial r_1^2}r_1^2 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\alpha}r; \tag{24.24}$$

$$\left(r_1\frac{\partial r}{\partial r_1}\right)^2 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\alpha}r^2. \tag{24.25}$$

Решая уравнение (24.25) относительно r_1, получаем

$$r_1 = Cr^{\sqrt{\varepsilon_\alpha/\varepsilon_r}} = k_r r = Cr^\beta. \tag{24.26}$$

Подстановка r_1 из (24.26) в (24.24) дает тождество.

Таким образом, деформация, выражаемая уравнением (24.26), приводит к замене анизотропной среды изотропной. Величина диэлектрической проницаемости ε_1 получаемой при этом изотропной среды определяется из уравнения (24.19).

Если принять, что

$$\left.\begin{aligned} ds = r d\alpha;\ ds_1 = r_1 d\alpha = Cr^{\beta} d\alpha; \\ \operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r};\quad \operatorname{grad}_{r_1} \varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{C\beta r^{\beta-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{24.27}$$

то, решая уравнение (24.19), легко получить величину ε_1.

Диэлектрическая проницаемость эквивалентной изотропной среды

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_\alpha \alpha_r} \tag{24.28}$$

не зависит от радиуса и равна среднему геометрическому значению составляющих в радиальном и тангенциальном направлениях.

При решении задач приходится часто иметь дело с техническими устройствами, в которых наряду с анизотропными материалами (с прямолинейной или аксиальной анизотропией) содержатся и изотропные вещества. Потому, решая такие задачи (с использованием плоскопараллельных полей), может быть также успешно применена изотропизирующая деформация пространства.

Рассмотрим некоторые примеры применения такого преобразования пространства к решению практических задач.

П р и м е р 24.1. **Поле двух заряженных проводов**. Два цилиндрических проводника с потенциалами $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$ находятся в анизотропной среде с диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{Vmatrix};$$

общая ось симметрии сечений двух проводов совпадает с осью x (рис. 24.2, плоскость A).

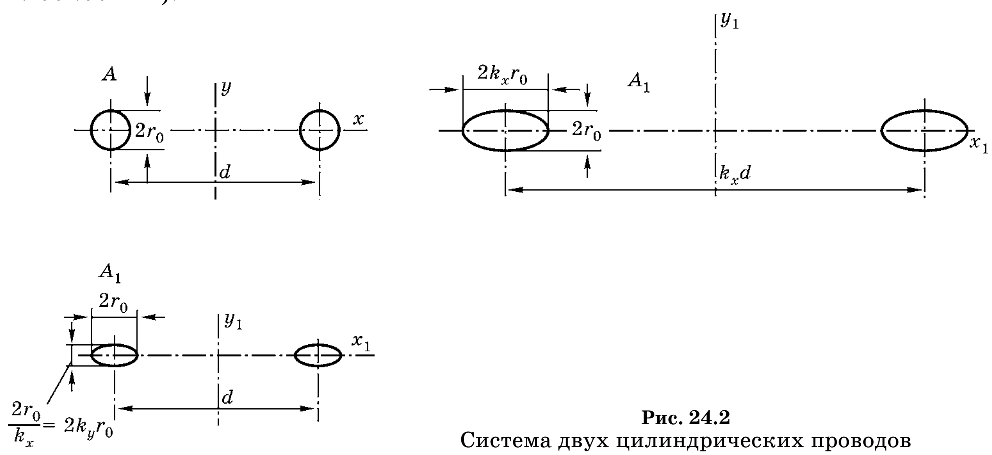


Рис. 24.2
Система двух цилиндрических проводов

Для определения электрического поля произведем деформацию плоскости x, y в соответствии с условием (24.15). Величину C можно выбрать так, чтобы деформация производилась только вдоль одной из осей. Если $C = \sqrt{\varepsilon_y}$, то $y_1 = y$, и деформация происходит только в направлении оси x (рис. 24.2, плоскость A_1). Если $C = \sqrt{\varepsilon_x}$, то $x = x_1$, и деформация происходит только в направлении оси y (рис. 24.2, плоскость A_1'). В том случае, когда $\varepsilon_y > \varepsilon_x$, вдоль оси x происходит растяжение, а вдоль оси y — сжатие; если же $\varepsilon_y < \varepsilon_x$ — наоборот.

Допустим, что деформация происходит только в направлении оси x, тогда $C = \sqrt{\varepsilon_y}$ и

$$x_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}}x, \tag{24.29}$$

а коэффициент растяжения вдоль оси x

$$k_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}}. \tag{24.30}$$

После деформации расстояние между осями проводов увеличивается в k_x раз, а круглое сечение провода становится эллипсом с полуосями $k_x r_0$ и r_0.

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно определить поле двух эллиптических цилиндров с расстоянием между осями $k_x d$, находящихся в среде с $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}$.

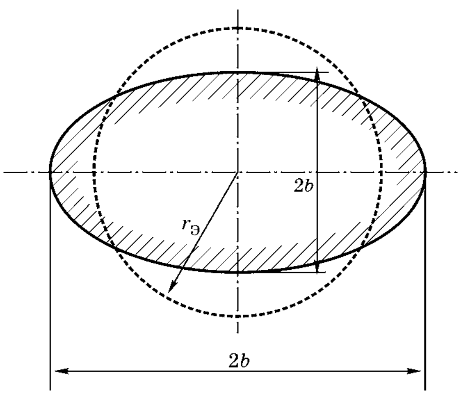


Рис. 24.3
Замена эллипса круговым цилиндром

Можно показать, что в том случае, когда расстояние между осями цилиндров много больше их поперечных размеров, эллиптические цилиндры могут быть заменены равноценными круговыми цилиндрами с эквивалентными радиусами, равными среднему арифметическому значению полуосей a и b эллипса (рис. 24.3):

$$r_э = \frac{a+b}{2}. \tag{24.31}$$

Частным случаем введения эквивалентного радиуса для случая, когда $b = 0$, широко пользуется Оллендорф [24.8] при расчете ленточных заземлителей. При такой замене электрическое поле на расстоянии от поверхности провода большем, чем его диаметр, практически оказывается одинаковым в обоих случаях, и расчет поля можно производить так же, как и для двух заряженных осей.

Картина поля для изотропной среды представлена на рис. 24.4. В области, непосредственно примыкающей к поверхности электродов, за счет того, что эллипсы заменены эквивалентными окружностями, поле несколько отличается от поля заряженных осей; однако в остальной части плоскости они совпадают с достаточной степенью точности.

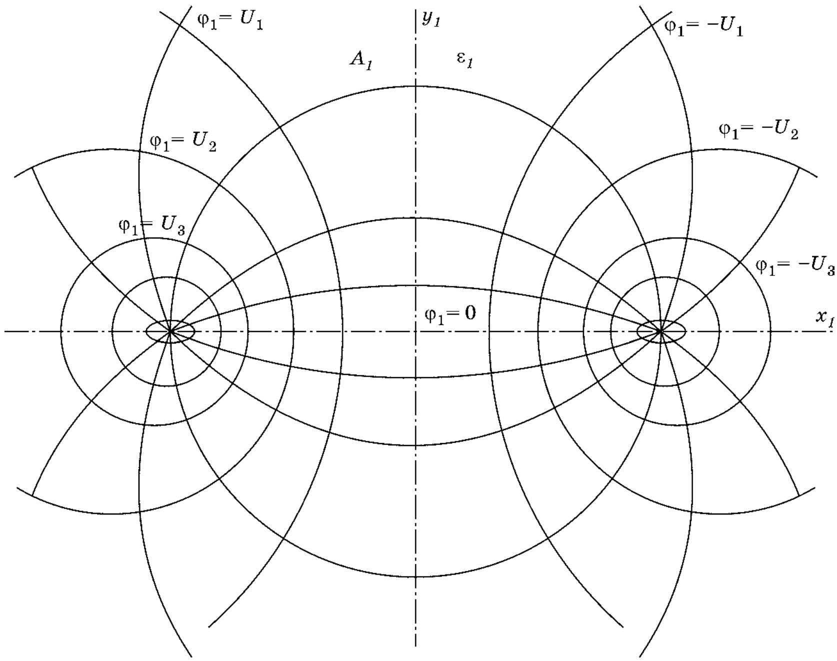


Рис. 24.4
Картина ЭП от двух проводов для изотропной среды

Если теперь совершить обратный переход от изотропной среды к анизотропной, то деформация носит обратный характер и происходит сжатие в k_x раз вдоль оси x. При такой деформации плоскости эквипотенциальные и силовые линии приобретают вид, изображенный на рис. 24.5, и это соответствует полю, реально существующему в рассматриваемом анизотропном диэлектрике. Как видно из графика, в этом случае линии электрического смещения могут составлять с эквипотенциалями угол, значительно отличающийся от 90°. Это естественно, так как вектор смещения $\vec{D}$ может не совпадать по направлению с напряженностью электрического поля $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

Так как емкость между проводами при преобразовании пространства не меняется, то легко подсчитать емкость, приходящуюся на единицу длины провода:

$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_1}{\ln\dfrac{2k_x d}{r_0(1+k_x)}}$$

(предполагается, что расстояние между проводами много больше их диаметра).

Выразив k_x и ε_1 через параметры анизотропного диэлектрика, получаем

$$C_0 = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_y}}{\ln\dfrac{2d\sqrt{\varepsilon_y}}{r_0\left(\sqrt{\varepsilon_x}+\sqrt{\varepsilon_y}\right)}}. \tag{24.32}$$

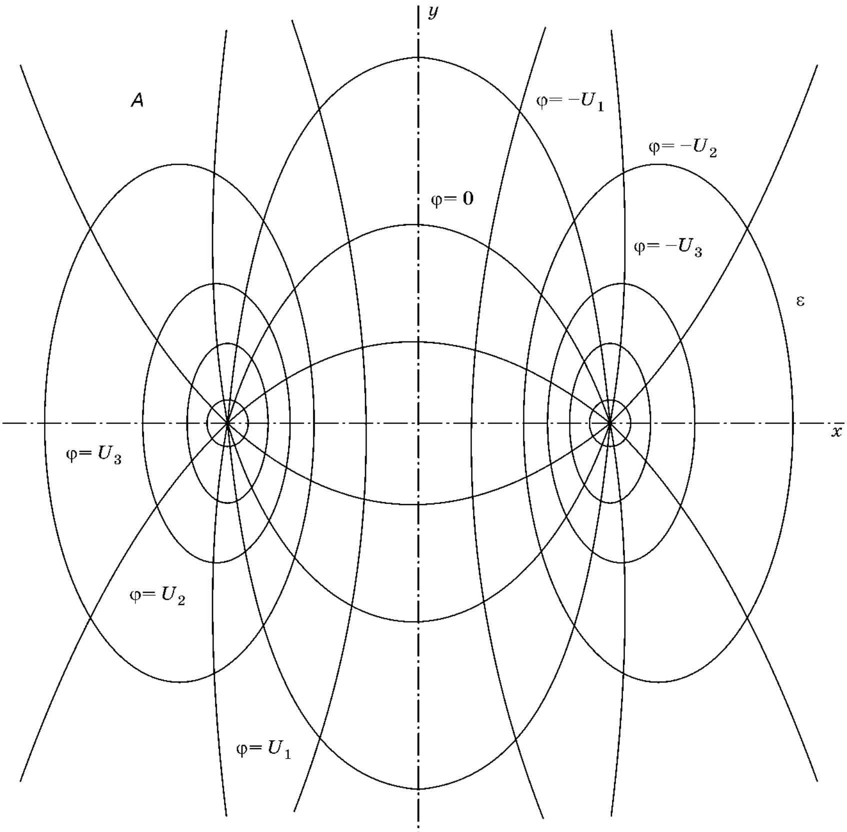


Рис. 24.5
Картина ЭП от двух проводов для анизотропной среды

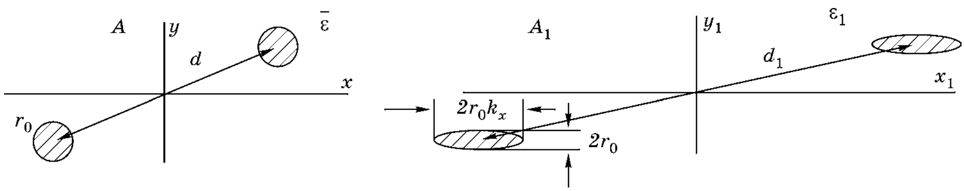


Рис. 24.6
Картина ЭП от двух проводов для анизотропной среды
при несовпадении осей симметрии пары проводов

В том случае, когда оси анизотропии материала не совпадают с осями симметрии пары проводов, деформация носит характер, представленный на рис. 24.6. При деформации вдоль оси x расстояние между осями проводов принимает следующее значение:

$$d_1 = d\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\varepsilon_x}\cos^2\alpha},$$

где α — угол между совместной осью двух проводов и осью деформации.

Емкость единицы длины пары проводов в этом случае

$$C_0 = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y}}{\ln \dfrac{2d\sqrt{\varepsilon_y \sin^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\alpha}}{r_0\left(\sqrt{\varepsilon_x} + \sqrt{\varepsilon_y}\right)}}. \tag{24.33}$$

П р и м е р 24.2. **Анизотропный цилиндр в электрическом поле**. Рассмотрим цилиндр радиуса r_0 из материала с аксиальной анизотропией в электрическом поле, направленном перпендикулярно его оси. В этом случае изотропизирующее преобразование координат сводится к радиальной деформации внутренних слоев цилиндра [24.4], выражаемой следующим преобразованием координат:

$$r_1 = r_0{}^{1-\beta} r^{\beta}, \tag{24.34}$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_r}}. \tag{24.35}$$

Рассматриваемое изотропизирующее преобразование координат применимо при любом внешнем плоскопараллельном поле, направленном перпендикулярно оси цилиндра.

П р и м е р 24.3. **Анизотропный шар в электрическом поле**. Расчет поля шара со сферической анизотропией во внешнем однородном поле может быть также произведен с помощью изотропизирующего преобразования координат. В этом случае преобразование выражается аналогично (24.34) [24.7]:

$$R_1 = R_0{}^{1-\beta} R^{\beta}, \tag{24.36}$$

а ε_r и ε_τ — диэлектрические проницаемости, соответственно в направлении радиуса и в направлении касательной.

Электрическое поле внутри сферы носит такой же характер, как и в цилиндре.

Аналогично решается задача и для эллипсоида вращения с эллипсоидальной анизотропией [24.7].

Кроме рассмотренных примеров, для инженерной практики может представить интерес рассмотрение стационарных электрических и связанных с ними гидродинамических полей в грунтах при электроосмотическом воздействии на эти грунты [24.5, 24.6, 24.9].

24.2.2.
РАСЧЕТЫ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Для расчета ферромагнитных сердечников, свитых из изотропной ленты, но имеющих различную среднюю магнитную проницаемость вдоль и поперек витков или свитых из анизотропной ленты, имеющей оси анизотропии, не совпадающие с осью ленты, важно уметь рассчитывать значение эффективной магнитной проницаемости вдоль средней линии тороида.

Определению эффективной магнитной проницаемости такого сердечника посвящена работа [24.10].

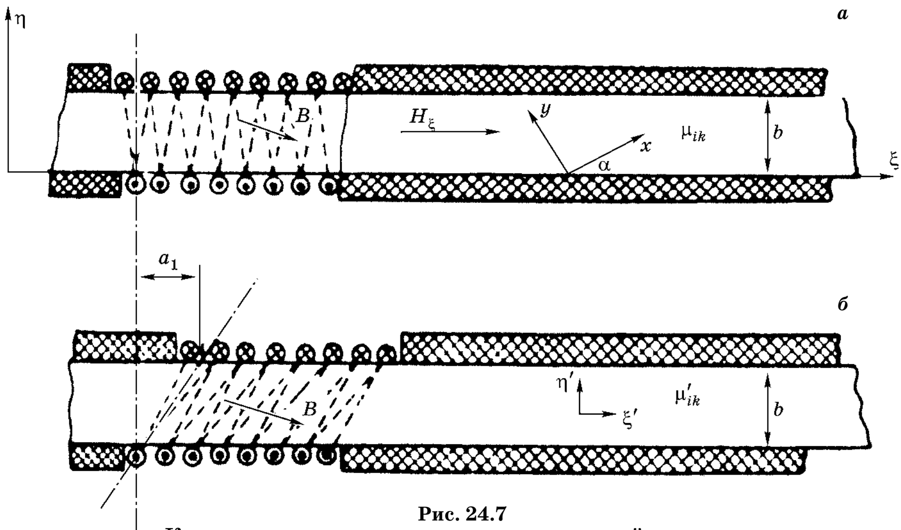


Рис. 24.7
К расчету магнитного поля в анизотропной пластине:
а — анизотропная исходная задача; *б* — преобразованная анизотропная задача.

Для этого случая необходимо учитывать размагничивающее действие боковых краев ленты и поперечный магнитный поток, замыкающийся через воздух между краями ленты.

Эта задача может быть решена путем преобразования поперечного магнитного потока, замыкающегося через воздух между краями ленты, в новое выражение умножением на тензор $\hat{A}$.

Рассмотрим анизотропную ферромагнитную (с магнитной проницаемостью $\hat{\mu}$) пластину, находящуюся в магнитном поле H_ξ катушки, направленном по оси ξ (рис. 24.7*а*).

Эффективная магнитная проницаемость пластины может быть выражена через магнитный поток, сцепленный с одним витком, следующим образом:

$$\mu_э = \frac{\Phi_0}{bH_\xi}. \qquad (24.37)$$

Здесь Φ_0 — магнитный поток, приходящийся на единицу длины витка в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

Для расчета магнитного потока Φ_0 удобно произвести преобразование, соответствующее сдвигу по оси ξ, умножением на тензор $\hat{A}$. Получаем преобразованную задачу, в которой оси анизотропии пластины совпадают с осями пластины η' и ξ', но намотка катушки становится наклонной (рис. 24.7*б*).

Если в первоначальной задаче

$$\hat{\mu} = \begin{Vmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{Vmatrix}, \qquad (24.38)$$

то теперь

$$\hat{\mu}' = \begin{Vmatrix} \mu_{\xi'} & 0 \\ 0 & \mu_{\eta'} \end{Vmatrix}, \qquad (24.39)$$

где

$$\mu_{\xi'} = \frac{\mu_x \quad \mu_y}{\mu_x \sin^2\alpha + \mu_y \cos^2\alpha},$$

а

$$\mu_\eta = \mu_{\eta'} = \mu_x \sin^2\alpha + \mu_y \cos^2\alpha. \qquad (24.40)$$

Величина сдвига a_1 выражается следующим образом:

$$a_1 = a_{\xi\eta} b = \frac{\mu_y - \mu_x}{\mu_x \operatorname{tg}\alpha + \mu_y \operatorname{ctg}\alpha} \cdot b. \qquad (24.41)$$

Определяя поток Φ_0 как сумму двух составляющих, соответствующих сечениям, перпендикулярным осям ξ и η, получаем

$$\Phi_\xi = H_\xi \mu_{\xi'} b, \qquad (24.42)$$

$$\Phi_\eta - H_\xi \frac{a_1^2}{b} \mu_{\eta'} \frac{1}{1 + \left(\mu_{\eta'} - 1\right) N_\eta}. \qquad (24.43)$$

Здесь N_η — размагничивающий фактор пластины при ее намагничивании в направлении оси η.

Выражая Φ_0 через Φ_ξ и Φ_η и подставляя в (24.37), находим

$$\mu_э = \mu_{\xi'} + \frac{a_{\xi\eta} \mu_{\eta'}}{1 + (\mu_{\eta'} - 1) N_\eta}. \qquad (24.44)$$

Путем несложных преобразований это выражение может быть сведено к формуле, полученной в [24.10] для $\mu_{\eta'} \gg 1$.

При $\Phi_\xi \gg \Phi_\eta$ формула (24.44) приобретает более простой вид [24.11]:

$$\mu_э = \mu_{\xi'} = \frac{\mu_x \mu_y}{\mu_\eta}. \qquad (24.45)$$

24.3. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Если длина электромагнитной волны в материале много больше, чем его размеры в направлении, перпендикулярном векторам $\vec{E}$ и $\vec{H}$, то материал можно считать прозрачным для электромагнитной волны и при рассмотрении электрических или магнитных полей пользоваться уравнением (24.5).

Однако теперь уже в качестве тензора диэлектрической и магнитной проницаемости необходимо вводить комплексные величины:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{\varepsilon}} &= \hat{\varepsilon}' - j\hat{\varepsilon}'', \\ \dot{\hat{\gamma}} &= \hat{\gamma}' - j\dot{\hat{\gamma}}, \\ \dot{\hat{\mu}} &= \hat{\mu}' - j\hat{\mu}''. \end{aligned}\right\} \qquad (24.46)$$

Так как комплексные векторы эквивалентного смещения $\dot{\vec{D}}$ и полной плотности тока $\dot{\vec{\delta}}$ связаны между собой [24.11] соотношением

$$\dot{\hat{\delta}} = j\omega\dot{\hat{D}}, \tag{24.47}$$

то между полными эквивалентными комплексными проводимостью и диэлектрической проницаемостью выполняется зависимость

$$\dot{\hat{\gamma}} = j\omega\dot{\hat{\varepsilon}}. \tag{24.48}$$

При подстановке вместо вещественных значений $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ соответствующих комплексных величин для расчета квазистационарных полей в анизотропных средах полностью могут быть применены все выводы, сделанные для стационарных полей.

Точно так же по формуле (24.44) может быть найдено значение комплексной магнитной проницаемости в направлении намагничивания листа. Последнее справедливо в тех случаях, когда можно пренебречь различием в потерях на гистерезис при поступательном и вращательном перемагничивании.

Анизотропия свойств материала при несовпадении направления внешнего поля ни с одной из осей анизотропии приводит к возникновению эллиптического вращающегося поля. Наличие такого поля имеет существенное значение при измерении магнитных свойств электротехнической стали на целых листах [24.12].

Рассмотрение изотропизирующих преобразований для сред с комплексными параметрами позволило предложить [24.13–24.14] метод измерения свойств анизотропных диэлектриков в полях высокой частоты.

При измерении средней комплексной диэлектрической проницаемости материалов с волокнистой или слоистой структурой (бумага, пряжа, волокно) очень просто измерить ее в поперечном направлении $(\dot{\hat{\varepsilon}}_y)$ и затруднительно измерение вдоль волокон $(\dot{\hat{\varepsilon}}_x)$, т. к. трудно создать конденсатор, в котором электрическое поле было бы направлено вдоль волокон исследуемого материала.

Значительно проще произвести измерение Z-комплексного сопротивления конденсатора, выполненного в виде двух параллельных ленточных электродов, уложенных в плоскости разъема двух слоев кипы исследуемого материала.

Зная геометрическую емкость C двух таких лент, легко рассчитать среднее геометрическое значение диэлектрической проницаемости в направлениях вдоль волокна (x) и поперек (y):

$$\sqrt{\dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_y} = \frac{1}{j\omega C_0 Z}. \tag{24.49}$$

На основании двух измерений определяется значение $\dot{\varepsilon}_y$.

С помощью аналогичных приемов можно измерить параметры материалов с аксиальной анизотропией [24.14].

Изучение квазистационарных электрических и магнитных полей в анизотропных поглощающих средах имеет большое значение для решения задач магнитной техники [24.15] и техники высокочастотного нагрева диэлектриков и полупроводников [24.16].

24.4. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ СО СТРУКТУРНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

При длине волны в рассматриваемом материале такого же порядка, что и размеры материала, уже нельзя пользоваться уравнением (24.5) и перестают быть справедливы все сделанные на основании этого уравнения выводы.

Однако и в этом случае при расчете полей в анизотропной среде может быть применено изотропизирующее преобразование.

Для примера выполним расчет поля прямоугольного стержня в продольном магнитном поле, синусоидально изменяющемся во времени [24.17].

Совместное решение уравнений Максвелла в комплексной форме для анизотропного стержня (рис. 24.8*а*) имеет вид

$$\gamma_x \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \gamma_y \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} = j\omega\mu_z\gamma_x\gamma_y\dot{H}_z. \qquad (24.50)$$

Изотропизирующее преобразование $x_1 = x$, $y_1 = y\sqrt{\gamma_x/\gamma_y}$ приводит это уравнение к изотропному виду. Соответственно в координатах x_1, y_1 стержень приобретает деформированный вид (рис 24.8*б*).

Для средней комплексной магнитной проницаемости стержня получаем следующую формулу:

$$\dot{\mu}_{\text{ср. эф}} = \mu_z\left[1 - \frac{64}{\pi^4}\sum_{m,n}\frac{1}{m^2n^2}\frac{j\omega\mu_z\gamma_x\gamma_y}{j\omega\mu_z\gamma_x\gamma_y + \gamma_x\left(\frac{\pi m}{2a}\right)^2 + \gamma_y\left(\frac{\pi n}{2b}\right)^2}\right]. \qquad (24.51)$$

Разумеется, эта формула применима как при вещественных μ и γ, так и при комплексных, и дает возможность судить о дисперсии магнитной проницаемости.

Несколько сложнее выполнить расчет средней магнитной проницаемости при микроструктурной анизотропии, когда стальной сердечник набран

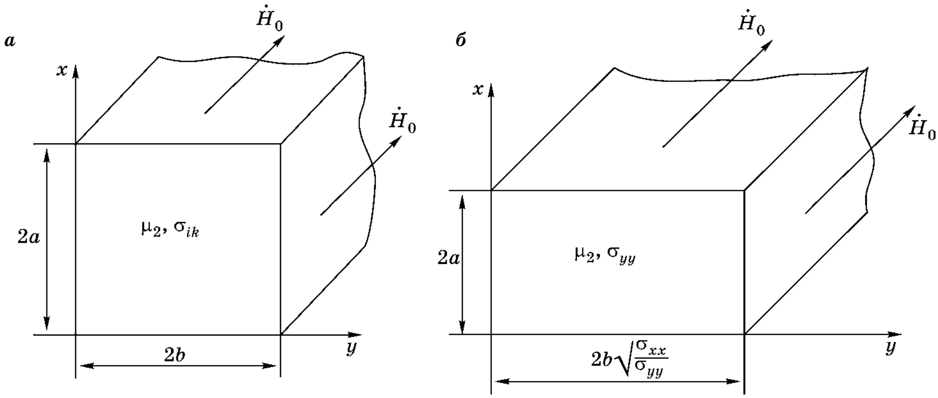


Рис. 24.8
К расчету электромагнитного поля в анизотропном стержне:
а — анизотропная исходная задача; *б* — преобразованная анизотропная задача.

из изолированных одна от другой стальных пластин и необходимо учесть волновой характер распределения поля в пределах каждой пластины и вдоль слоя электрической изоляции. Этот вопрос исследован как для установившегося процесса в линейной среде [24.18, 24.19], так и для неустановившегося процесса в нелинейной среде [24.18].

24.5. РАСЧЕТ АНИЗОТРОПНЫХ ЭКРАНОВ

24.5.1. СФЕРИЧЕСКИЕ ЭКРАНЫ

П р и м е р 24.4. **Многослойный магнитостатический сферический экран.** Для диполя при отсутствии экрана имеем

$$U(r)=\sum_{n=0}^{\infty}[U_n(\vec r)]_{\text{В}}+\sum_{n=0}^{\infty}[U_n(\vec r)]_{\Gamma}, \qquad (24.52)$$

где индекс «В» означает вертикальный, «Г» — горизонтальный.

Составляющие правой части уравнения (24.52) могут быть записаны в виде

$$[U_n(\vec r)]\Big|_{\text{В}}=-m_{\text{В}}(n+1)\frac{r^n}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta),\ \ (a>r), \qquad (24.53)$$

$$[U_n(\vec r)]\Big|_{\Gamma}=-m_{\Gamma}\sin\varphi\frac{r^n}{a^{n+2}}P_n^1(\cos\theta),\ \ (a>r),\ \ n=1.2,\ldots, \qquad (24.54)$$

$$\vec m=m_{\text{В}}\cdot\vec n_{0Z}+m_{\Gamma}\cdot\vec n_{0Y},$$

где $(r,\ \theta,\ \varphi)$ — сферические координаты; $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра; $P_n^1(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

В результате решения задачи для скалярного магнитного потенциала поля в полости экрана ($r < R_0$, R_0 — радиус внутренней полости экрана) получаем формулу

$$U_i(\vec r)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n\left\{[U_n(\vec r)]_{\text{В}}+[U_n(\vec r)]_{\Gamma}\right\}=S_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{S_1}\left\{[U_n(\vec r)]\Big|_{\text{В}}+[U_n(\vec r)]\Big|_{\Gamma}\right\}, \qquad (24.55)$$

где S_0, S_n — коэффициенты экранирования n-й моды (гармоники) поля; термин ставится в кавычки, так как он имеет буквальный смысл лишь по отношению к первой ($n = 1$) моде поля, соответствующей здесь однородному полю внешней помехи.

Поскольку скалярный магнитный потенциал определяется с точностью до постоянного (не зависящего от координат) слагаемого, коэффициент S_0 можно положить равным нулю. Соотношения для величин S_n ($n = 1,\ 2,\ \ldots$) являются обобщением известных соотношений Г. Кадена [24.1] для коэффициентов экранирования и реакций обратного действия трехслойного экрана в случае, когда источник смещен из центра экрана, скалярный магнитный потенциал которого описывается формулами (24.52)–(24.54):

$$S_n=\frac{(S_1)_n(S_3)_n}{1-l_2^{2n+1}(W_1^{(a)})_n(W_3^{(i)})_n}, \qquad (24.56)$$

$$W_n^{(a)} = (W_3^{(a)})_n + \frac{S_n (S_3)_n}{(S_1)_n} (W_1^{(a)})_n \left(\frac{R_{a_1}}{R_{a_3}} \right)^{2n+1}, \qquad (24.57)$$

$$W_n^{(i)} = (W_1^{(i)})_n + \frac{S_n (S_1)_n}{(S_3)_n} (W_3^{(i)})_n \left(\frac{R_{i_1}}{R_{i_3}} \right)^{2n+1}. \qquad (24.58)$$

Индексы «i» и «a» указывают на внутреннюю и внешнюю реакции; $W_n^{(i)}$ и $W_n^{(a)}$ — коэффициенты обратного действия трехслойного экрана; $(S_1)_n$, $(S_3)_n$ — коэффициенты экранирования первого и третьего (с $\mu_r \neq 1$) слоев.

Выражения $(S_1)_n$ и $(S_3)_n$, используемые в формулах (24.56)–(24.58), могут быть получены из следующих формул:

$$(S_1)_n = [1 + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} (\mu_r - 1)(1 - \mu_r^{-1})(1 - l_1^{2n+1})]^{-1}, \qquad (24.59)$$

$$(S_3)_n = [1 + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} (\mu_r - 1)(1 - \mu_r^{-1})(1 - l_3^{2n+1})]^{-1}, \qquad (24.60)$$

где $(W_1^{(i)})_n$, $(W_1^{(a)})_n$, $(W_3^{(i)})_n$, $(W_3^{(a)})_n$ — коэффициенты обратного действия (внутренний и внешний) первого и третьего слоев.

$$\left\{ \begin{matrix} (W_1^{(i)})_n \\ (W_1^{(a)})_n \end{matrix} \right\} = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} (S_1)_n (\mu_r - 1)(1 - l_1^{2n+1}) \left\{ \begin{matrix} \left(1 + \dfrac{n+1}{n\mu_r}\right) \\ \left(!+ \dfrac{n}{(n+1)\mu_r}\right) \end{matrix} \right\} \qquad (24.61)$$

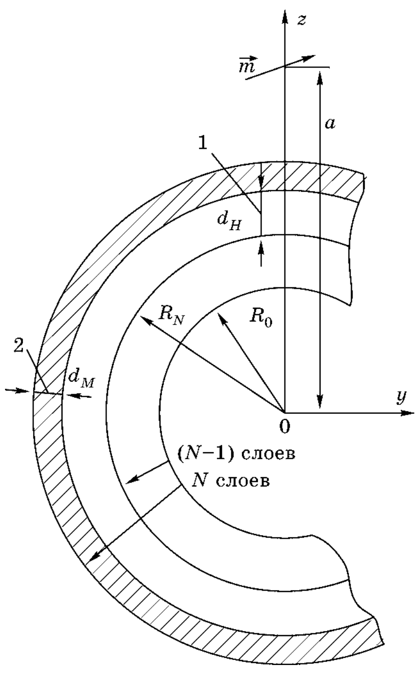


Рис. 24.9
Многослойный сферический экран

(чтобы получить формулы для $(W_3^{(i)})_n$ и $(W_3^{(a)})_n$, нужно в (24.61) заменить $(S_1)_n$ на $(S_3)_n$ и l_1 на l_3),

$$l_1 = R_0/R_{a1}, l_2 = R_{i2}/R_{a2}, l_3 = R_{i3}/R_{a3}.$$

Взяв за основу формулы (24.56)–(24.58) для коэффициента экранирования и реакций обратного действия трехслойного экрана, рассматриваем оболочку, содержащую N ферромагнитных слоев, разделенных немагнитными промежутками, как трехслойную (первый слой — подсистема, состоящая из $(N - 1)$ слоев, второй слой — немагнитный материал толщиной $d_{\text{Н}}$, а третий — магнитный материал тощиной $d_{\text{М}}$ (рис. 24.9)). Получаем следующие рекуррентные соотношения, позволяющие найти коэффициент экранирования n-й моды поля и реакции обратного действия N-слойного экрана через коэффициент экранирования и реакции обратного действия $(N - 1)$-слойного экрана:

$$S_{n,N} = \frac{S_{n,N-1}S_{n,\text{М}}}{1-\left(\dfrac{R_N}{R_N+d_\text{Н}}\right)^{2n+1} W_{n,N-1}^{(a)}W_{n,\text{М}}^{(i)}}, \qquad (26.62)$$

$$W_{n,N}^{(a)} = W_{n,\text{М}}^{(a)} + W_{n,N-1}^{(a)} \frac{S_{n,N}S_{n,\text{М}}}{S_{n,N-1}} \left(\frac{R_N}{R_N+d_\text{Н}+d_\text{М}}\right)^{2n+1}. \qquad (24.63)$$

Выражения для Sn, М и $W_{n,\text{М}}^{(i)}$, $W_{n,\text{М}}^{(a)}$ можно получить из формул (24.59)–(24.61), если заменить в них l_1 на $\left(\dfrac{R_N+d_H}{R_N+d_\text{Н}+d_\text{М}}\right)$ и, кроме того, в (24.62) заменить $(S_1)_n$ на $S_{n,\text{М}}$. Индекс «М» в (24.62), (24.63) обозначает принадлежность к магнитному слою; $d_\text{М}$ и $d_\text{Н}$ — толщины магнитного и немагнитного слоев экрана; R_N — внешний радиус внутренней оболочки, содержащей $(N-1)$ слоев ферромагнетика:

$$R_N = R_0 + d_\text{М} + (N-2)(d_\text{Н} + d_\text{М}).$$

Соотношение (24.55) показывает, каким образом проявляется влияние экрана на амплитуду n-й пространственной моды поля в полости экрана. Существенно, что для полей с малой относительной неоднородностью, когда можно ограничиться несколькими первыми пространственными гармониками («модами») потенциала ($n \le n_\text{max}$, где $n_\text{max} \approx 3 \div 10$), отношение S_n/S_1 быстро убывает с ростом номера n.

Для составляющих напряженности МП в полости экрана $H_{\alpha_j}^{(i)}$ можно записать

$$H_{\alpha_j}^{(i)} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \alpha_j} = S_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{S_1}\frac{1}{h_j}\frac{\partial U_n}{\partial \alpha_j} = S_1\left[\frac{\partial U_1}{h_j \partial \alpha_j} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{S_n}{S_1}\frac{1}{h_j}\frac{\partial U_n}{\partial \alpha_j}\right], \qquad (24.64)$$

где индекс (24.52) указывает на внутреннюю полость экрана; $j = 1, 2, 3$; $\alpha_1 = r$; $\alpha_2 = \theta$; $\alpha_3 = \varphi$; $h_1 = 1$; $h_2 = r$; $h_3 = r\sin\theta$. Первая мода ($n = 1$), выделенная в (24.64) в отдельное слагаемое, при этом соответствует однородному полю, вторая ($n = 2$) — дипольному и т. д.

Пример 24.5. **Подавление высших пространственных мод поля внешней помехи анизотропным сферическим экраном.** Для рассматриваемого магнитостатического режима экранирования многослойная оболочка (рис. 24.9) может рассматриваться как сплошная анизотропная среда с тензором относительной магнитной проницаемости. Ведь она состоит из чередующихся весьма тонких ферромагнитных и немагнитных слоев. При этом толщина отдельного слоя стремится к нулю при сохранении общей толщины оболочки фиксированной (T — const, $d_\text{М} + d_\text{Н} \to 0$, $d_\text{М}/d_\text{Н}$ — const).

$$\mu_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial H_j} = \begin{bmatrix} \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_t \end{bmatrix}. \qquad (24.65)$$

Здесь i, $j = 1$ соответствует радиальной координате; i, $j = 2$ и i, $j = 3$ — полярной и азимутальной угловым координатам соответственно (n и t —

индексы нормального и тангенциального направлений к поверхности сферического слоя).

Исходя из «микроструктуры» рассматриваемого экрана, имеем

$$\mu_t \approx \mu_0 \mu_r \frac{d_{\text{М}}}{d_{\text{Н}} + d_{\text{М}}}, \;\; \mu_n \approx \mu_0. \tag{24.66}$$

Рассмотрение такой модели «предельно тонкостенного» экрана позволяет довести до конца аналитическое решение задачи о подавлении высших пространственных мод поля внешнего дипольного источника помехи экраном и получить предельные характеристики подавления высших мод поля многослойным сферическим экраном в режиме магнитостатики.

В качестве источника МП выступает электрический диполь, ориентированный в радиальном направлении.

Гармоники S_n находятся из решения уравнений Максвелла в режиме магнитостатики при отсутствии токов в магнитной среде:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{24.67}$$

в области $R_0 < r < R_a$, занятой анизотропным ферромагнетиком. Здесь $R_a = R_0 + T$ — внешний радиус экрана, T — толщина многослойной экранирующей среды.

Решение уравнений Максвелла должно удовлетворять граничным условиям на всех поверхностях многослойной экранирующей оболочки (непрерывность скалярных магнитных потенциалов и нормальных составляющих векторов магнитной индукции).

Вводя в (24.67) скалярный магнитный потенциал $\vec{H} = \operatorname{grad} U$, получаем

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} U) = 0, \tag{24.68}$$

где скалярный магнитный потенциал первичного поля магнитного диполя определяется по формуле

$$U = -\frac{1}{4\pi\mu_r} \vec{M} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right), \;\; \mu_r = \mu/\mu_0, \tag{24.69}$$

где r — расстояние от центра диполя до точки наблюдения.

Уравнение (24.68) для областей внутри сферы и вне сферы:

$$\Delta U = 0. \tag{24.70}$$

Решение (24.70) для областей внутри и вне сферы имеет вид

$$U_i = -\frac{m}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) S_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \;\; r < R_0, \tag{24.71}$$

$$U_a = -\frac{m}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) - \frac{m}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R_a}{a}\right)^n \left(\frac{R_a}{r}\right)^{n+1} W_n P_n(\cos\theta), \;\; r > R_a,$$

где S_n, W_n — неизвестные коэффициенты.

24.5.2. КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЭКРАНЫ

Пример 24.6. **Расчет эффективности экранирования однородного гармонического магнитного поля анизотропным круговым цилиндрическим экраном.** Поперечное сечение цилиндра, используемого в качестве экрана, представлено на рис. 24.10*а*. Экран изготовлен из материала с анизотропной магнитной проницаемостью.

Считается, что цилиндр бесконечно длинный, внешнее МП с напряженностью $\vec{H}_0$ (здесь и в дальнейшем используется символическая форма записи величин МП) приложено перпендикулярно к образующей цилиндра. Поэтому задачу достаточно рассмотреть в поперечном сечении в полярной системе координат (r, α). Магнитная проницаемость $\hat{\mu}$ материала экрана (область III) меняется по двум координатам (r, α) — $\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_r \\ \mu_\alpha \end{vmatrix}$.

Электрический потенциал $\dot{\phi}_0$ внешнего поля может быть выражен в виде (рис. 24.10*б*)

$$\dot{\phi}_0 = -\dot{\vec{H}}_0 r\cos\alpha = \dot{f}_0(r)\cos\alpha,$$

откуда

$$\dot{\vec{H}}_{or} = \dot{\vec{H}}_0\cos\alpha = -\frac{\partial\dot{\phi}_0}{\partial r};\quad \dot{\vec{H}}_{o\alpha} = -\dot{\vec{H}}_0\sin\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\phi}_0}{\partial\alpha}.$$

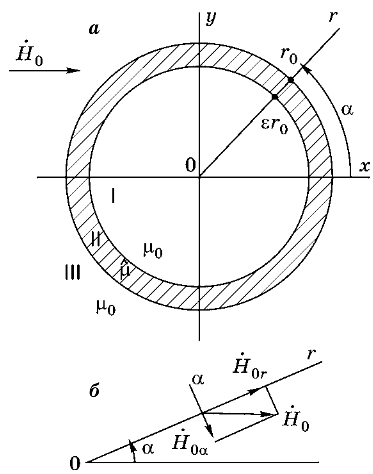


Рис. 24.10
Однослойный круговой цилиндрический экран с диагональной анизотропией материала

Свяжем с центром цилиндра декартову систему координат (x, y, z) (рис. 24.10*а*). Ось z направлена по оси цилиндра. При расчете учитываются три области: I — в полости цилиндра, в воздушной среде с магнитной проницаемостью μ_0 — const; II — в материале цилиндрического экрана с магнитной напряженностью $\hat{\mu}$; III — область вне экрана, среда воздушная с магнитной проницаемостью μ_0 — const.

Решению подлежат следующие уравнения:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}}, \tag{24.72}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}}, \tag{24.73}$$

где $\dot{\vec{B}}$ — индукция МП.

Ротор напряженности $\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}$ расписывается в виде

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = \vec{e}_r\operatorname{rot}_r\dot{\vec{E}} + \vec{e}_\alpha\operatorname{rot}_\alpha\dot{\vec{E}} + \vec{e}_z\operatorname{rot}_z\dot{\vec{E}},$$

а вектор индукции $\dot{\vec{B}}$ — в виде

$$\dot{\vec{B}} = \vec{e}_r\vec{B}_r + \vec{e}_\alpha\vec{B}_\alpha + \vec{e}_z\vec{B}_z. \tag{24.74}$$

В областях распространения переменное МП имеет следующие составляющие:

$$\left\{0, \dot{\vec{B}}_I\right\} = \left\{\dot{\vec{B}}_{rI}, \dot{\vec{B}}_{\alpha I}\right\}; \tag{I}$$

$$\left\{\dot{\vec{E}}_{II}, \dot{\vec{B}}_{II}\right\} = \left\{\dot{\vec{E}}_{zII} \equiv \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{B}}_r, \dot{\vec{B}}_\alpha\right\}; \tag{II}$$

$$\left\{0, \dot{\vec{B}}_{III}\right\} = \left\{\dot{\vec{B}}_{rIII}, \dot{\vec{B}}_{\alpha III}\right\}. \tag{III}$$

Из уравнения (24.73) имеем

$$\mathrm{rot}_r\, \dot{\vec{E}} = \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \dot{\vec{E}}_\alpha}{\partial z} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial \alpha};\ \ \mathrm{rot}_\alpha\, \dot{\vec{E}} = \frac{\partial \dot{\vec{E}}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial r} \equiv -\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial r};$$

$$\mathrm{rot}_z\, \dot{\vec{E}} = \frac{1}{r}\dot{\vec{E}} + \frac{\partial \dot{\vec{E}}_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{E}}_r}{\partial \alpha} \equiv 0.$$

Из уравнений (24.72), (24.73) получим

$$-j\omega \dot{\vec{B}}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial \alpha};\ \ \dot{\vec{H}}_r = -\frac{1}{j\omega\mu_r}\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial \alpha}; \tag{24.75}$$

$$-j\omega \dot{\vec{B}}_\alpha = -\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial r};\ \ \dot{\vec{H}}_\alpha = \frac{1}{j\omega\mu_\alpha}\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial r}. \tag{24.76}$$

Ротор напряженности переменного МП $(\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}})$ может быть представлен в виде

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{H}}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \dot{\vec{H}}_\alpha}{\partial z}\right) + \vec{e}_\alpha\left(\frac{\partial \dot{\vec{H}}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\vec{H}}_z}{\partial r}\right) +$$

$$+\vec{e}_z\left(\frac{1}{r}\dot{\vec{H}}_\alpha + \frac{\partial \dot{\vec{H}}_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{H}}_r}{\partial \alpha}\right) = \gamma\vec{e}_r\dot{\vec{E}}_r + \gamma\vec{e}_\alpha\dot{\vec{E}}_\alpha + \gamma\vec{e}_z\dot{\vec{E}}_z;$$

$$\dot{\vec{E}}_z = \dot{\vec{E}} \neq 0;\ \ \dot{\vec{E}}_\alpha, \dot{\vec{E}}_r \equiv 0.$$

Учитывая (24.74)–(24.76), для уравнения (24.72) получим

$$\frac{1}{r}\dot{\vec{H}}_\alpha + \frac{\partial \dot{\vec{H}}_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\vec{H}}_r}{\partial \alpha} = \gamma\dot{\vec{E}}. \tag{24.77}$$

Подставляем (24.72), (24.73) в (24.77):

$$r^2\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial r^2} + r\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial r} + M^2\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial \alpha^2} - r^2 k_\alpha^2 \dot{\vec{E}} = 0,$$

где $M = \sqrt{\mu_\alpha / \mu_r}$; $k_\alpha = \sqrt{j\gamma\omega\mu_\alpha}$.

Если учесть, что $\dot{\vec{E}}_{II} = f(r)\cos\alpha$, то

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - (M^2 + r^2 k_\alpha^2) f(r) = 0. \tag{24.78}$$

Если считать, что оболочка тонкая, т. е. $r \cong r_0$, то [24.20, с. 398]

$$\beta^2 = M^2 + r_0^2 k_\alpha^2,\ \ \beta^2 > 0,$$

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - \beta^2 f(r) = 0,$$

$$f(r)=\dot C_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta}+\dot G_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta}. \qquad (24.79)$$

$$\dot{\vec E}_{II}=\left[\dot C_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta}+\dot G_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta}\right]\cos\alpha,$$

$$\dot{\vec H}_{rII}=\frac{1}{j\omega\mu_r}\frac{1}{r}\left[\dot C_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta}+\dot G_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta}\right]\sin\alpha,$$

$$\dot{\vec H}_{\alpha II}=\frac{1}{j\omega\mu_\alpha}\frac{1}{r}\left[\frac{\beta}{r_0}\dot C_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\beta-1}-\frac{\beta}{r_0}\dot G_{II}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta-1}\right]\cos\alpha,$$

$$\dot\phi_I=\dot C_I\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\alpha,\ \ \dot\phi_{III}=\left[\dot G_{III}\left(\frac{r_0}{r}\right)-\dot H_0 r\right]\cos\alpha,$$

$$\dot H_{rI}=-\frac{1}{r_0}\dot C_1\cos\alpha,\ \ \dot H_{\alpha I}=\frac{1}{r}\dot C_I\left(\frac{r}{r_0}\right)\sin\alpha,$$

$$\dot H_{rIII}=\left[\dot G_{III}\left(\frac{1}{r_0}\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2}+\dot H_0\right]\cos\alpha,$$

$$\dot H_{\alpha III}=\frac{1}{r}\left[\dot G_{III}\left(\frac{r_0}{r}\right)-\dot H_0 r\right]\sin\alpha.$$

Сопряжение решений между областями осуществляется при $r=r_0$ и $r=\varepsilon r_0$:

$$\dot H_{rIII}\Big|_{r=r_0}=\mu_r^*\dot H_{rII}\Big|_{r=r_0},\ \ \mu_r^*\dot H_{rII}\Big|_{r=\varepsilon r_0}=\dot H_{rI}\Big|_{r=\varepsilon r_0},$$

$$\dot H_{\alpha III}\Big|_{r=r_0}=\dot H_{\alpha II}\Big|_{r=r_0},\ \ \dot H_{\alpha II}\Big|_{r=\varepsilon r_0}=\dot H_{\alpha I}\Big|_{r=\varepsilon r_0}, \qquad (24.80)$$

где $\mu_r^*=\mu_r/\mu_0$.

Подстановка (24.79) в (24.80) приводит к системе уравнений для определения $\dot C_I$, $\dot C_{II}$, $\dot G_{II}$, $\dot G_{III}$:

$$-\frac{1}{r_0}(\dot G_{III}-\dot H_0 r_0)=\frac{1}{j\omega\mu_0 r_0}(\dot C_{II}+\dot G_{II}), \qquad (24.81)$$

$$\frac{1}{r_0}(\dot G_{III}-\dot H_0 r_0)=\frac{1}{j\omega\mu_\alpha}\left(\frac{\beta}{r_0}\dot C_{II}-\frac{\beta}{r_0}\dot G_{II}\right), \qquad (24.82)$$

$$\frac{1}{r_0\varepsilon}\dot C_1\varepsilon=\frac{1}{j\omega\mu_\alpha}\left[\frac{\beta}{r_0}\dot C_{II}\varepsilon^{\beta-1}-\frac{\beta}{r_0}\dot G_{II}\varepsilon^{-\beta-1}\right], \qquad (24.83)$$

$$\frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon}(\dot C_{II}\varepsilon^{\beta}+\dot G_{II}\varepsilon^{-\beta})=\dot C_I.$$

Коэффициент экранирования K^Hполучается в виде

$$K^H = \frac{\dot{H}_I}{\dot{H}_0} = \frac{4\beta * \varepsilon^{\beta-1}}{(\beta^* + 1)^2 - (\beta^* - 1)^2 \varepsilon^{2\beta}}, \tag{24.84}$$

а эффективность экранирования S^H:

$$S^H = \frac{(\beta^* + 1)^2 - (\beta^* - 1)^2 \varepsilon^{2\beta}}{4\beta^* \varepsilon^{\beta-1}}. \tag{24.85}$$

При снижении частоты переменного МП (ω — const):

$$\beta = \sqrt{M^2 + r_0^2 k_\alpha^2} \to M, \;\; \beta^* = \frac{\beta}{\mu_\alpha^*} \to \frac{M}{\mu_\alpha^*} \to \sqrt{\mu_r^* \mu_\alpha^*} \to Q,$$

$$K^H \to \frac{4Q\varepsilon^{M-1}}{(Q+1)^2 - (Q-1)^2 \varepsilon^{2M}}, \tag{24.86}$$

что соответствует выражению для K^H, полученному в [24.21, 24.22].

При решении уравнения (24.78) было сделано допущение, связанное с толщиной оболочки Δ ($\Delta \to 0$). Это позволило получить решение задачи в обыкновенных функциях. Как показали выполненные расчеты, такой подход допустим при не слишком малых частотах внешнего МП ($f > (10^3/10^4)$ Гц). При более низких частотах погрешности в определении величины эффективности экранирования увеличиваются и целесообразно решение уравнения (24.78) находить через функции Бесселя (например, [24.23, с. 404]):

$$\dot{E} = [\dot{C}_{II} J_M (r\sqrt{-k_\alpha^2}) + \dot{B}_{II} Y_M (r\sqrt{-k_\alpha^2})]\cos\alpha, \tag{24.87}$$

где $J_M(r\sqrt{-k_\alpha^2})$ — модифицированная цилиндрическая функция Бесселя первого рода; $Y_M(r\sqrt{-k_\alpha^2})$ — модифицированная цилиндрическая функция Бесселя второго рода, порядка M.

Для упрощения можно аргумент функций $r\sqrt{-k_\alpha^2} = r\sqrt{-j\omega\gamma\mu_\alpha}$ обозначить через x:

$$x = r\sqrt{-j\omega\mu_\alpha\gamma} = r\sqrt{\omega\mu_\alpha\gamma}\exp\left(\pm j\frac{3\pi}{4}\right) = |x|\exp\left(\pm j\frac{3\pi}{4}\right).$$

При целом положительном числе M функции Бесселя от аргумента

$$x = |x|\exp\left(\pm j\frac{3\pi}{4}\right)$$

называются функциями Кельвина, которые табулированы [24.24].

С учетом (24.87)

$$\dot{H}_{rII} = \frac{1}{j\omega\mu_r r}[\dot{C}_{II} J_M(x) + \dot{B}_{II} Y_M(x)]\sin\alpha, \tag{24.88}$$

$$\dot{H}_{\alpha II} = \frac{1}{j\omega\mu_\alpha}[\dot{C}_{II} J'_M(x) + \dot{B}_{II} Y'_M(x)]\cos\alpha. \tag{24.89}$$

24.5.3.
ПЛОСКИЕ ЭКРАНЫ

П р и м е р 24.7. **Метод расчета плоского анизотропного электромагнитного экрана.** Рассматривается экранирование монохроматического ЭМП плоской ферромагнитной пластиной конечной толщины с анизотропными свойствами в системе координат x, y, z. Для исключения необходимости учета краевых эффектов пластина считается бесконечной в направлении осей x и y. Материал пластины обладает одноосной анизотропией параметров, которые можно представить в виде симметричных тензоров:

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}, \tag{24.90}$$

где $\hat{\gamma}$, $\hat{\mu}$ — электрическая проводимость и магнитная проницаемость материала экрана соответственно.

ЭМП возбуждается электрическим диполем $D^{(e)}$ с моментом $\vec{I}dl$. В уравнениях Максвелла обозначим диполь через $\vec{j}^{\,(cm)}$. Напряженности ЭМП — $\{\vec{E}, \vec{H}\}$. Уравнения Максвелла при гармонической зависимости поля от времени $\exp\{jwt\}$ записываются в виде (точки над комплексными величинами опускаем):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \hat{\gamma}\vec{E} + \vec{j}^{\,(cm)}, \tag{24.91}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\mu_0\hat{\mu}\vec{H}. \tag{24.92}$$

В качестве условий на поверхностях пластины (при $z = 0, -\Delta$) используем фундаментальные граничные условия [24.20]:

$$[\vec{e}_z \times (\vec{E}_{i+1} - \vec{E}_i)]\big|_S = 0; \; [\vec{e}_z \times (\vec{H}_{i+1} - \vec{H}_i)]\big|_S = 0, \tag{24.93}$$

где i — индекс среды; S — поверхность пластины ($S[z = 0, -\Delta]$).

В ходе решения задачи (24.91)–(24.92) с параметрами среды за пределами экрана μ_0, ε_0, $\gamma_0 = 0$ и параметрами экрана $\hat{\gamma}$, $\hat{\mu}$ требуется найти функции экранирования ЭМП плоской оболочкой в виде

$$K = \frac{\Phi^{(j)}}{\Phi^{(e)}}, \tag{24.94}$$

где $\Phi^{(j)}$ — одна из функций поля в области за экраном; $\Phi^{(0)}$ — одна из функций исходного поля. В связи с тем что функции поля в системе координат x, y, z описываются двойными бесконечными интегралами, в функциях (24.94) будем использовать их изображения.

При решении в уравнения (24.91)–(24.92) вводятся векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы выражениями

$$\hat{\mu}_i\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad i = 1, 2, 3; \tag{24.95}$$

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \operatorname{grad}\varphi. \tag{24.96}$$

В областях 1 и 3, которые являются изотропными: $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_3 = \mu_0$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$; $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, потенциалы $\vec{A}$ и φ связаны соотношением Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} - (ik^2/\omega)\varphi = 0, \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Упрощение уравнений для потенциалов поля в анизотропной среде во многом зависит от выбора связи между $\vec{A}$ и φ. В среде с одноосной анизотропией максимального упрощения уравнений для $\vec{A}$ удается достигнуть, если эту связь задать выражением вида

$$\nu_1^2\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \gamma_2\mu_2\varphi = 0, \tag{24.97}$$

где $\nu_1^2 = \mu_2/\mu_{z_2} \equiv \mu/\mu_z$.

С учетом соотношения (24.97) уравнение (24.91) запишется в виде

$$\operatorname{rot}(\hat{\mu}_2^{-1}\operatorname{rot}\vec{A}) = \hat{\gamma}_2\left\{-j\omega\mu_0\vec{A} + \frac{1}{\gamma_2\mu}\operatorname{grad}\left[\nu_1^2\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\right\} + \mu_0\vec{j}^{(cm)}. \tag{24.98}$$

Раскрывая в декартовых координатах левую и правую части уравнения (24.98) и приравнивая выражения при соответствующих ортах $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, получаем уравнения для составляющих векторного потенциала в виде [24.25]

$$\nu_1^2\left(\frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 A_{x,y}}{\partial z^2} + k^2 A_{x,y} = -\mu_2 j_{x,y}^{(cm)}; \tag{24.99}$$

$$\nu_2^2\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z + \left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) = -\mu_2\nu_2^2 j_z^{(cm)}, \tag{24.100}$$

где обозначено:

$$k^2 = \omega^2\mu_2\varepsilon_2'; \;\; \varepsilon_2' = \varepsilon_0 + j(\gamma_2/\omega); \;\; \nu_2^2 = [1 + j(\gamma_2/\omega\varepsilon_0)]/[1 + j(\gamma_{z_2}/\omega\varepsilon_0)].$$

Для определенности ориентируем ось диполя параллельно оси Ox. В областях 1 и 2 векторный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\vec{A}_1 + k_1^2\vec{A}_1 = -\mu_0\vec{j}^{(cm)}, \quad k_1^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0. \tag{24.101}$$

В материале пластины составляющие векторного потенциала описываются системой уравнений (24.99)–(24.100), но с нулевой правой частью (источник отсутствует). Векторный потенциал поля неоднозначен, он определяется с точностью до градиента произвольной функции [24.25]. Это свойство калибровки потенциалов позволяет сделать равной нулю одну из составляющих векторного потенциала. В нашей задаче удобно представить $A_{y1} = A_y = 0$.

Граничные условия для $\vec{A}$ получаются из (24.97) при использовании (24.98)–(24.99):

$$\left[\vec{n}, \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A} - \hat{\mu}_2^{-1}\operatorname{rot}\vec{A}\right]\Big|_{z=0} = 0; \tag{24.102}$$

$$\left[\vec{n},\left\{\vec{A}_1+\frac{1}{k_1^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}_1\right\}-\left\{\vec{A}+\frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\left(\nu_1^2\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right\}\right]\Big|_{z=0}=0;$$

$$\left[\vec{n},\hat{\mu}_2^{-1}\operatorname{rot}\vec{A}-\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A}\right]\Big|_{z=-\Delta}=0; \qquad (24.103)$$

$$\left[\vec{n},\left\{\vec{A}+\frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\left(\nu_1^2\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right\}-\left\{\vec{A}_1+\frac{1}{k_1^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}_1\right\}\right]\Big|_{z=-\Delta}=0.$$

Краевая задача (24.102)–(24.103) решается методом двукратного преобразования Фурье по координатам x и y.

Контрольные вопросы

1. Что такое анизотропия материалов, используемых при экранировании?
2. Чем вызвана анизотропия материалов?
3. Какие виды анизотропии вы знаете?
4. Назовите несколько характерных анизотропных материалов.
5. В чем заключается сложность при расчете экранов с анизотропными свойствами материалов?
6. При каких условиях анизотропные экраны поддаются аналитическому расчету?
7. Расскажите о порядке расчета сферического экрана.
8. Расскажите о порядке расчета кругового цилиндрического экрана.
9. В чем заключается основная трудность при расчете плоского анизотропного экрана?

25

ГЛАВА 25

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЭКОЛОГИЯ

25.1. ПРЕДМЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭКОЛОГИИ

Жизнедеятельность человека зависит от условий его обитания и взаимодействия с окружающей средой, пронизанной тремя группами электромагнитных полей (ЭМП): полями естественного происхождения; полями биологических объектов (в том числе и человека) и техногенными полями, созданными деятельностью людей. Каждый из этих видов ЭМП характеризуется электрической и магнитной напряженностями.

ЭМП естественного происхождения рассмотрены в опубликованной литературе [25.1], к ним человек, как правило, адаптирован. Неприятности с его здоровьем возникают лишь при неожиданных пертурбациях в космическом пространстве (магнитные бури и т. д.), но они носят эпизодический характер. ЭМП биологических объектов изучены в меньшей степени, однако предельные величины их уровней известны. Эти поля имеют долговременный характер воздействия и не вызывают, как правило, глобальных изменений в здоровье.

Самые опасные — поля, созданные практической деятельностью человека. Последние десятилетия ознаменовались бурным развитием радиоэлектроники, систем беспроводной связи, электроэнергетики. Создаются мощные радиопередающие устройства, системы радиосвязи и телевидения, антенны которых излучают в пространство электромагнитную энергию. Их частотный спектр, уровни напряженностей, переменность во времени и в пространстве чрезвычайно разнообразны. Величины электрической и магнитной напряженностей ЭМП в окружающем пространстве возросли во много раз. Возникли глобальные проблемы электромагнитной безопасности человека в ЭМП, в частности проблемы электромагнитной экологии (ЭМЭ) человека [25.2, 25.3].

В настоящее время локальным и фоновым электромагнитным нагрузкам подвергаются люди всех возрастов. Места отдыха детей оснащены электрическими и электронными играми, компьютерами. Компьютеризуется учебный процесс в начальных, средних и высших учебных заведениях. Рабочие места работников промышленности, науки и вооружения, специалистов управленческих и диспетчерских служб, служб испытаний и спасения, летчиков и водителей электротранспорта насыщены электрическими приборами, электрокабелями, электронными средствами оргтехники, пультами управления и средствами связи. Все эти источники ЭМП расположены в местах нахождения человека.

Значительная часть населения планеты систематически облучается ЭМП от сотовых телефонов, излучающих электромагнитную энергию в области головы. Человека «подстерегают» заряды статического электричества, скапливающиеся на поверхностях мебели, половых покрытий и трущихся деталей, на экранах видеодисплейных терминалов. При этом особенную неприятность причиняют положительные электрические заряды, нейтрализующие отрицательные ионы воздуха и тем самым нарушающие аэроионный режим воздушной среды.

Действие на человека техногенных ЭМП не проходит бесследно. В медицине имеются неоспоримые доказательства негативных последствий (включая отдаленные последствия), вызванных длительными воздействиями как мощных, так и малоинтенсивных ЭМП.

Один из действенных способов защиты — установление предельно допустимых уровней (ПДУ) и контроль за уровнем ЭМП в окружающем пространстве [25.3, 25.4]. Однако разработанные и используемые в настоящее время как отечественные, так и зарубежные нормативы далеко не совершенны. Требуется дальнейшее уточнение регламентов по отдельным компонентам ЭМП, а также при их сочетанном воздействии. Отсутствуют нормативы для ЭМП крайне низких частот.

С момента обнаружения негативного влияния ЭМП техногенного происхождения на человека в нашей стране и за рубежом опубликовано значительное количество монографий и статей по этой тематике. Большой вклад в разработку проблем электромагнитной экологии (ЭМЭ) внесли отечественные коллективы авторов во главе с З. В. Гордон, Ю. А. Осиповым, В. П. Казначеевым, Т. В. Каляда, И. Р. Петровым, Ю. Д. Думанским, Г. И. Евтушенко, М. Г. Шандалой, Ю. Г. Григорьевым (см., например, [25.3]).

25.2. ЧЕЛОВЕК И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СРЕДА

В процессе эволюции и жизнедеятельности человек испытывает влияние естественного ЭМП, которое можно считать фоновым. Характеристики этого ЭМП используются как источник информации, обеспечивающий непрерывное взаимодействие с изменяющимися условиями внешней среды.

Давно установлено, что метрика пространства испытывает квантовые колебания широкого частотного спектра. Так что в любом случае зарождение жизни происходило при воздействии естественных МП Земли, галактик и планет [25.15].

Результаты современных исследований свидетельствуют, что все биологические объекты, от одноклеточных до высших животных и человека, очень чувствительны к ЭП и МП. Многочисленными статистическими данными показано, что ЭМП естественных источников (геомагнитные поля, атмосферные разряды, излучения звезд и галактик) существенно влияют на формирование биоритмов. Выявлены достоверные взаимосвязи между солнечной и геомагнитной активностью и ростом числа гипертонических кризов, инфарктов миокарда, психопатологических расстройств.

В последнее время проблема взаимодействия человека с ЭМП становится весьма актуальной в связи с интенсивным развитием радиосвязи и радиолокации, расширением сферы применения электромагнитной энергии для выполнения технологических операций, массовым распространением бытовых электрических и радиоэлектронных устройств.

Если еще 25–30 лет назад проблемы защиты от электромагнитного облучения относились в основном к производственным условиям (персонал радиолокационных станций, операторы технологических установок), то на сегодняшний день большинство людей на планете фактически живет в ЭМП искусственной (антропогенной) природы, обладающем весьма сложной пространственной, временно́й и частотной структурой.

Искусственные источники создают ЭМП значительно бо́льших интенсивностей, чем естественные. Клинико-физиологическими исследованиями установлено, что такие ЭМП играют определенную роль в развитии сердечно-сосудистых, онкологических, аллергических заболеваний, болезней крови, а также могут оказывать влияние на генетические структуры. Систематически воздействующие ЭМП могут вызвать выраженные изменения в состоянии здоровья человека, в том числе у лиц, чья работа не связана с источниками ЭМП. Причем эффекты воздействия слабоинтенсивных полей могут носить отдаленный характер. Отмечена высокая чувствительность и поражаемость нервной системы, хрусталика глаза, семенных желез у мужчин, выявлены нарушения функциональной регуляции всех звеньев эндокринного аппарата, нарушение липидного обмена и ряд других отклонений. В значительном числе работ указано на отрицательное воздействие ЭМП на генетические структуры, клеточные мембраны, иммунную систему, гормональный статус. В публикациях последних лет активно обсуждается вопрос о канцерогенной опасности ЭМП так называемой «промышленной» частоты (50 Гц в России и Европе, 60 Гц в Америке).

Электромагнитные излучения антропогенных источников («электромагнитное загрязнение») представляют большую сложность как для анализа, так и для ограничения интенсивности его облучения. Это обусловлено следующим:

- в большинстве случаев невозможно ограничить выброс загрязняющего фактора в окружающую среду;
- невозможна замена данного фактора на другой, менее токсичный;
- невозможна «очистка» эфира от нежелательных излучений;

- неприемлем методический подход, состоящий в ограничении ЭМП до природного фона;
- вероятно долговременное воздействие ЭМП (круглосуточно и даже на протяжении ряда лет);
- возможно воздействие на большие контингенты людей;
- трудно статистически описать параметры излучений многих источников, распределенных в пространстве и имеющих различные режимы работы.

В последнее время проблема электромагнитной безопасности приобретает социальное значение. Ситуация осложняется тем, что органы чувств человека, за редчайшими исключениями, не воспринимают ЭМП до частот видимого диапазона, в связи с чем без соответствующей аппаратуры оценить степень опасности облучения практически невозможно.

25.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Среди них: статические МП, ЭП, квазистатические МП, ЭП широкого частотного спектра и импульсные. Наиболее существенный вклад вносит Главное МП Земли, образованное несколькими внешними и внутренними источниками: однородной намагниченностью Земли, полем мировых аномалий (намагниченностью глубинных слоев Земли), намагниченностью верхней части земной коры, намагниченностью внешними силами (в том числе и космосом), полями вариаций [25.3]. По структуре Главное МП Земли можно разделить на постоянное (период изменения составляет многие сотни лет) и переменное (период изменения не превышает года).

Таблица 25.1

Спектр естественных (фоновых) ЭМП в магнитосфере и их параметры

Виды естественных ЭМП		Частота f, Гц	Амплитуда		
			E	H	$B \times 10^5$
			В/м	А/м	Тл
Магнитное поле Земли	вертикальная составляющая в средних широтах	0	—	55	5,0
	горизонтальная составляющая в средних широтах	0	—	32	2,5
	вариации поля	—	—	3,0	3,2
Электрическое поле Земли	вертикальная составляющая в средних широтах	0	130	—	—
	горизонтальная составляющая в средних широтах	—	—	—	—
	низкочастотные вариации поля	—	—	—	—
Электромагнитные и корпускулярные излучения Солнца	электромагнитные и корпускулярные излучения Солнца	0,1–3000	—	—	0,01
	вариации при пертурбациях на Солнце	—	—	10	1,0
Переменное магнитное поле космического происхождения		0,005–0,1	—	—	10^{-9}

Электромагнитные и корпускулярные излучения Солнца находятся в диапазоне частот $f \in [0,1 \div 3000]$, Гц. Плотность потока естественного переменного МП составляет $\approx 10^{-7}$ Тл. Эта величина претерпевает существенные изменения при пертурбациях на Солнце: $\approx[10^{-7} - 10^{-5}]$, Тл. Переменное МП космического происхождения оценивается плотностью $\approx 10^{-14}$, Тл при $f = 0{,}005$–$0{,}1$, Гц [25.4]. Более подробный анализ волновых излучений в магнитосфере дан в [25.5]. Величины функций наиболее существенных ЭМП представлены в табл. 25.1.

25.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ИСКУССТВЕННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Техническая деятельность насытила окружающее человека пространство ЭМП широкого частотного спектра — $f \in [0 \div 10^{17}]$, Гц, и с высокой интенсивностью ($|\vec{B}| \geq 10^{-4}$, Тл; $|\vec{E}| \geq 10^{4}$, В/м). Плотность электромагнитной энергии зачастую $P > 0{,}01$ мВт/см^2. Виной тому — электрифицированный железнодорожный и трамвайный транспорт с системами управления и контроля; электростанции с разветвленными системами распределения электроэнергии (в особенности высоковольтные ЛЭП); энергетические комплексы при мощных технических производствах; многочисленные электрические устройства, окружающие человека как на производстве, так и в быту. Последние оказывают наиболее сильное воздействие из-за их постоянной близости к человеку (размещаются, как правило, в ограниченных по объему помещениях с существенной плотностью), многочисленности и непредсказуемости порядка включения.

Наиболее существенными представляются градиентные поля. Такие поля даже при незначительных интенсивностях, но имеющие тенденцию к резким их изменениям, могут иметь существенные воздействия на человеческий организм. К градиентным полям необходимо прежде всего отнести импульсные поля с крутыми фронтами. Краткий обзор уровней техногенных полей приведен в табл. 25.2.

Таблица 25.2

Спектр техногенных ЭМП в окружающей среде

Виды техногенных ЭМП	Частота f, Гц	Параметры поля			
		E	H	B	P
		В/м	А/м	Тл	Вт/м^2
Электростатическое поле	0	$\geq 10^4$	—	—	—
Электрическое поле	0	$\leq 10^4$	—	—	—
Магнитостатическое поле	0	—	$\leq 10^4$	$\geq 10^{-2}$	—
ЭМП сверхнизких частот	0–1	—	$\leq 10^2$	—	—
ЭМП промышленных частот	$\leq 10^3$	$\geq 10^4$	—	$\geq 10^{-4}$	0,1
ЭМП сверхвысоких частот	$\geq 10^9$	—	—	—	0,5
Импульсное ЭМП низкой частоты	$\leq 10^2$	—	$\geq 10^4$	—	0,1
Импульсное ЭМП высокой частоты	$\geq 10^9$	—	$\geq 10^3$	—	0,5
Модулированное ЭМП	$\approx 2 \cdot 10^3$	—	—	—	0,05

25.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЧЕЛОВЕКА

25.5.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ЧЕЛОВЕКА

Живой организм создает в окружающем его пространстве сложное и тонко организованное ЭМП, которое является суммарным полем от всех органов. ЭМП человека проявляется в широком частотном диапазоне и может проявляться в виде как ЭП, так и МП.

Токи заряженных частиц и неравновесная электрическая поляризация организма создают внутри и вне его постоянные, квазипостоянные и переменные ЭП. В последнее время получило признание мнение о том, что внутриклеточные микрополя молекулярных и подмолекулярных масштабов непосредственно участвуют в процессах, происходящих в живой клетке. Большая часть свободной энергии метаболизма превращается в мембранах митохондрий в энергию ЭП. Источником постоянного ЭП клетки принято считать определенную разность концентраций различных ионов, поддерживаемую с помощью активного их переноса через мембрану. Первые эксперименты по регистрации в воздухе инфранизкочастотных ЭП ($f \in [0{,}001 - 10]$, Тл) были проведены методом накопления. Анализ результатов этих экспериментов свидетельствует о наличии вблизи человека ЭП, амплитуда которых убывает по мере увеличения частоты. Эти ЭП имеют несколько составляющих: постоянную и переменные. Разность потенциалов ЭП относительно земли на расстоянии 5 см от поверхности тела испытуемого достигает 1 В. По-видимому, справедлива гипотеза формирования ЭП тела человека нетрибоэлектрической природы. ЭП связано с функциональным состоянием организма. Инфранизкочастотные колебания потенциала ЭП могут быть следствием изменения электрического сопротивления кожных покровов и емкости тела и имеют примерно ту же величину по амплитуде, что и квазиэлектростатическое ЭП.

Импульсные ЭП возникают в результате изменения проницаемости мембраны и перераспределения ионов в соответствии с электрохимическим градиентом под действием внешнего или внутреннего стимула. Поскольку любая клетка окружена биоэлектрическим полем, то происходит их суммирование по мощности, энергии, амплитудам и частотам с учетом фазовых соотношений. Биоэлектрические поля на уровне ткани участвуют в межклеточных взаимодействиях двумя способами: силовым (перемещением заряженных частиц) и информационным. Прямым доказательством участия биоэлектрических полей в морфогенных процессах служит влияние на морфогенез и регенерацию внешних искусственных очень слабых постоянных ЭП. С их помощью можно управлять морфологической полярностью. Кроме того, в пространстве вокруг живых организмов имеется биоэлектрическое поле, природа которого еще не изучена в достаточной мере. Некоторые его называют биополем.

В настоящее время теоретически обоснованы и экспериментально проверены следующие поля человека: электрическое методом газоразрядной визуализации, излучение в видимой и ультрафиолетовой частях спектра, излучение ультразвука, биополе с помощью методов кирлиановской фотографии.

25.5.2. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЧЕЛОВЕКА

На тех же частотах (от 0 до 1 Гц) проявляются у человека и МП. Они связаны с токами в проводящих тканях, сопровождающими физиологические процессы. Для МП (в отличие от ЭП) ткани биологического объекта являются экраном, поэтому, регистрируя МП, можно с большой точностью локализовать их источники. Это, в частности, представляет большой интерес для исследования деятельности мозга.

В настоящее время регистрация МП биообъектов широко распространена. Это стало возможным в связи с созданием высокочувствительных к МП сверхпроводниковых квантовых интерференционных приборов, основанных на стационарном эффекте Джозефсона. Применение сверхчувствительных магнитометров в режиме градиентометров позволило получить установки, регистрирующие МП биообъектов, в первую очередь магнитокардиограмму, в отсутствие экранировки помещения.

25.5.3. ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЧЕЛОВЕКА

Низкочастотные ЭП с частотами от 0 до 1 кГц связаны, как правило, с электрохимическими трансмембранными потенциалами, которые отражают функционирование различных органов и систем биообъекта (сердца, желудка и т. д.). К сожалению, низкочастотные ЭП практически полностью экранируются высокопроводящими тканями. Это затрудняет решение обратных задач по восстановлению источников таких полей на основе измерений электрического потенциала вблизи поверхности тела.

Сторонние электромагнитные излучения могут возбуждать в организме когерентные колебания. Они могут имитировать сигналы, генерируемые в определенных условиях самими организмами. Длина волны в системе по порядку величины должна равняться отношению периметра клетки (микрон — десятки микрон) к величине

$$N = \lambda/|\Delta\lambda|,$$

где $\Delta\lambda$ — смещение между соседними резонансами, а λ — длина волны. В возбужденной системе λ в 10^6 раз короче длины волны в свободном пространстве.

Функции основных ЭМП человека представлены в табл. 25.3.

Таблица 25.3

Спектр электромагнитных полей человека

Виды ЭМП человека	Частота f, Гц	Амплитуда		
		E	H	$B \times 10^5$
		В/м	А/м	Тл
ЭСП	—	≤(2–7)	—	—
ЭП	$10^{-2}/10^4$	≤(5–10)	—	—
Постоянное МП	—	—	≤0,5	≤0,05
ЭМП	$10^{-2}/10^{12}$	≤10	≤1,0	≤0,15

25.6. О МЕХАНИЗМАХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ЧЕЛОВЕКА

Попытки изучения механизма воздействия ЭМП на организм человека предпринимаются постоянно. Однако до настоящего времени в этом плане единого мнения не сложилось. К тому же разные группы полей (по частоте, интенсивности, временному фактору) имеют разные механизмы воздействия на человеческий организм.

С технической точки зрения, применительно к проблемам электромагнитной экологии, человеческий организм представляет собой многоуровневую электроэнергетическую систему (в целом, организм), состоящую из взаимосвязанных подсистем (органов). Разбиение на подсистемы можно производить и дальше, вплоть до клетки, обладающей собственными источниками энергии (в том числе и электромагнитными) и разветвленной периферией, включающей элементы, подобные используемым в ЭЭС (электрические фильтры, резонансные контуры и т. д.). ЭМП человека является суммарным полем от всех органов, каждый из которых, в свою очередь, имеет поле гармонического типа со свойственными ему частотой и амплитудой. Если в организме появляется патология, то это равносильно появлению, как правило, гармонического поля помех с определенными частотой и амплитудой, свойственного источнику патологии.

Энергетические процессы в человеческом организме управляются информационной системой. Последняя распределена по организму, имеет ряд подсистем, управление которыми осуществляется из мозга человека. Первый уровень информационной системы находится в мозгу человека, второй — в органах, третий — в клетках. Таким образом, организм человека во взаимосвязи с окружающей средой может быть формализован моделью ЭЭС с системой управления. А само взаимодействие может быть проанализировано через кондукционные и индукционные связи либо методами электрических цепей, либо методами математической физики. Попытки такой формализации предпринимались давно, но, как правило, такие модели либо были очень сложны при анализе, либо не охватывали комплекса основных взаимосвязей человеческого организма с окружающей электромагнитной средой.

При построении моделей взаимосвязей важным представляется учесть факторы, приведенные ниже.

Протяженность поля в пространстве и во времени. Поля, участвующие во взаимодействии, имеют разную протяженность в пространстве. Так, поля естественного происхождения можно моделировать для каждой из сред как равномерно распределенные в пространстве с некими интегральными электрофизическими параметрами сред. Лишь в ограниченном количестве областей предстоит учитывать геомагнитные аномалии. В то же время поля искусственного происхождения располагаются в пространстве локально, в зонах наиболее интенсивной деятельности человека, а поэтому в ряде задач могут быть описаны с помощью моделей с сосредоточенными параметрами. Что касается энергетических полей самого человека, то они имеют лишь сугубо локальный характер. Зоны их распространения не превышают нескольких метров от объекта.

Не следует забывать, что полнота взаимодействий строго регламентируется временными рамками: работой на производстве, нахождением человека в обществе и т. д.

Линейность процессов в модельной задаче. В связи с тем, что во взаимодействии участвуют три системы ЭМП, нахождение результирующего поля потребует суммирования полей каждой из систем. Последнее сделать легко, если считать среды, в которых распределяются поля линейными, и использовать принцип наложения. Существенных нелинейностей электрофизических параметров сред в органах человека не наблюдается.

Однако при постановке модельных задач часто не хватает информации о некоторых процессах в организме человека и о параметрах его отдельных органов. В частности, необходимо: определить электрофизические параметры всех сред в органах человеческого организма; разработать как общие, так и частные модели человеческого организма с оценкой принятых допущений; учесть (при необходимости увязать состояние человека с изменением параметров среды) возможную нелинейность электрофизических параметров сред в органах человека и в окружающем его пространстве; разработать модели, связывающие изменение состояния человеческого организма с изменением параметров сред в его основных органах.

Получение дополнительной информация об изменении состояния человека и его отдельных органов при воздействии внешних ЭМП разной частоты и структуры позволит с большей вероятностью представить механизмы воздействия ЭМП на человека.

25.7. ГИГИЕНИЧЕСКОЕ НОРМИРОВАНИЕ ЭМП И НОРМАТИВНАЯ ДОКУМЕНТАЦИЯ ПО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭКОЛОГИИ ЧЕЛОВЕКА

25.7.1. ВВЕДЕНИЕ

Биоэлектромагнитная совместимость (БЭМС), как одна из важных областей электромагнитобиологии, допускает наличие в среде обитания биообъекта ЭМП широкого спектра частот, длительный контакт с которыми не наносит ущерба жизнедеятельности человека. Подобная совместимость в формировании и регуляции жизненно важных процессов доказана в ряде исследований. Нормальная жизнедеятельность человека в «зоне экологического комфорта» возможна в среде с относительно постоянными материальными константами и физическими полями, близкими к фоновым. Нарушение последних ухудшает среду обитания. Так, техногенные ЭМП, интенсивно загрязняющие окружающую среду, могут рассматриваться как эколого-гигиенический фактор риска, негативно влияющий на состояние среды и здоровья не только специалистов, работающих с источниками излучения, но и населения. Восстановление качества среды обитания в определенной степени обеспечивается регламентированием антропогенных ЭМП, создаваемых разнообразными по техническим характеристикам источниками. Вопросы обеспечения безопасности и защиты человека от воздействия ЭМП являются очень важными и решаются в различных направлениях. Основным фундаментальным профилактическим направлением по улучшению условий жизнедеятельности является гигиеническое нормирование воздействия ЭМП как для производственных условий, так и для окружающей среды. Практика показала, что разработка и реализация гигиенических нормативов ЭМП сыграла существенную роль в оздоровлении условий труда работающих и способствовала резкому снижению случаев профессиональных болезней.

Проблема гигиенического нормирования ЭМП решалась по трем направлениям: для условий обитания населения; для специалистов, работающих с источниками ЭМП, и для лиц, находящихся в зоне воздействия ЭМП в связи с производственной необходимостью, но не обслуживающих источники излучения. Пространственно-временная регламентация ЭМП разработана в различных странах. Однако анализ нормативных материалов свидетельствует о значительном расхождении стандартов. Объясняется это резко отличающимися принципиальными концепциями в методологическом подходе и критериями оценки биологического действия при разработке и научном обосновании эколого-гигиенических стандартов. Эволюция гигиенического регламентирования не завершена и будет продолжена до его совершенствования с корректировкой и разработкой отсутствующих нормативов в отдельных частотных диапазонах и компонентах ЭМП (электрического и магнитного), с учетом взаимодействия с другими факторами среды. Рассмотрим основные нормативные документы, регламентирующие жизнедеятельность человека в электромагнитной среде.

25.7.2. ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ НОРМАТИВЫ

Отечественные гигиенические нормативные документы (см. Приложение) классифицируются по частотным диапазонам: ЭМИ радиочастотного диапазона (от 30 кГц до 300 ГГц), для отдельных участков спектра электромагнитных колебаний (от 10 до 60 кГц), ЭП и МП частотой 50 Гц, ЭСП, постоянных МП, а также при использовании отдельных радиоэлектронных средств (персональные компьютеры, системы сотовой радиосвязи, при эксплуатации бытовой электротехники). Для охраны окружающей среды в настоящее время нормативы отсутствуют. Для обеспечения безопасности населения ЭМИ регламентируются как для жилых помещений, так и для селитебных и других территорий (сельскохозяйственные земли, дороги, труднодоступная местность).

Разработанные межгосударственные правила и нормативы допустимых уровней ЭМП при применении товаров народного потребления (ТНП) в бытовых условиях введены в действие с 1 июля 1996 г. Законодательный документ устанавливает допустимые уровни ЭМП, которые обеспечивают безопасное и безвредное использование в бытовых условиях электротоваров различного назначения. Гигиенические требования распространяются на все

Таблица 25.4

Допустимые уровни напряженности и плотности потока энергии электромагнитного поля

Диапазон частот	0,3–300 кГц	0,3–3 МГц	3–30 МГц	30–300 МГц	0,3–300 ГГц
Допустимые уровни	25 В/м	15 В/м	10 В/м	3 В/м	10 мкВт/см^2

Таблица 25.5

Допустимые уровни плотности потока энергии электромагнитных излучений

Диапазон частот	400–1200 МГц	
Категория облучения	Облучение населения, проживающего на прилегающей территории от антенн базовых станций	Облучение пользователей радиотелефонов
Допустимые уровни	10 мкВт/см^2	100 мкВт/см^2

ТНП как отечественного производства, так и на ввозимые и являются обязательными при разработке нормативной документации на ТНП (стандарты, технические условия, технологические инструкции и др.) при производстве и эксплуатации ТНП. Основные регламентируемые параметры ЭМП, излучаемые ТНП, приведены в табл. 25.4.

Допустимый уровень напряженности ЭП тока частотой 50 Гц, создаваемого ТНП, не должен превышать 0,5 кВ/м. Допустимый уровень напряженности ЭСП при использовании ТНП (например, бытовые электрические приборы, радиоэлектронная аппаратура, ткани, обувь, одежда, мебель, игрушки, ковровые покрытия, отделочные и строительные материалы и т. п.) как в жилых, так и в нежилых помещениях не должен превышать 15 кВ/м. Этот документ содержит перечень групп ТНП, которые рассматриваются как источники ЭМП, ЭП промышленной частоты и ЭСП. В быту используются индукционные и микроволновые печи. Для индукционных печей, работающих на частоте 20–22 кГц, рекомендуются следующие безопасные уровни напряженности ЭМП: по $\left|\bar{E}\right|$ — 0,5 кВ/м, по $\left|\bar{H}\right|$ — 4 А/м. Уровень плотности потока излучаемой энергии микроволновых печей не должен превышать 10 мкВт/см^2 на расстоянии 50 см в окружности микроволновой печи. Предусмотрен контроль ЭМИ заводом-изготовителем при проверке качества готовой продукции и мастерскими, осуществляющими ремонт этих изделий.

Гигиенические регламенты по плотности потока энергии (ППЭ). ЭМП, создаваемые системами сотовой радиосвязи, распространяются по территории населенных мест, где размещаются базовые станции, а также ограничивают уровни воздействия ЭМИ на человека при одновременном включении радиотелефонов несколькими пользователями. В соответствии с этими нормативами уровни ЭМИ не должны превышать значений, приведенных в табл. 25.5.

В области промышленных частот (50 Гц), источниками которых являются высоковольтные ЛЭП, действуют ограничения воздействия ЭП ЛЭП на население как для условий внутри жилищ, так и на территориях, где могут находиться люди. В санитарных нормах и правилах защиты населения от воздействия ЭП приводятся дифференцированные допустимые уровни ЭП частотой 50 Гц. Так, в помещениях жилых зданий, где население проводит значительное время в течение суток, напряженность ЭП не должна превышать 0,5 кВ/м. К этой категории относят детские, лечебно-оздоровительные учреждения, профилактории, дома для престарелых, дома отдыха и другие подобные учреждения. При этом на территориях таких учреждений, в зонах жилой застройки и в местах отдыха, величина напряженности ЭП не должна превышать 1 кВ/м. В местах непродолжительного пребывания людей (территории сельских населенных пунктов, пригородные зоны, садоводческие участки) уровни напряженности ЭП могут быть до 5 кВ/м. А в ненаселенной местности, на сельскохозяйственных землях величины напряженности ЭП допускаются до 15 кВ/м. В труднодоступных местах для транспорта и сельскохозяйственной техники и не предназначенных для доступа населения допускается уровень напряженности поля до 20 кВ/м. В системе передачи электрической энергии источниками ЭМП, кроме ЛЭП, могут быть трансформаторные подстанции, открытые распределительные устройства и др., вблизи которых могут формироваться зоны повышенных уровней ЭМП, которые также подлежат ограничению по тем же действующим санитарным нормам и правилам.

Защита населения от воздействия ЭМП, создаваемых радиотехническими объектами (РТО): радио- и телевизионными центрами, радиолокационными станциями, антенные системы которых излучают электромагнитную энергию в окружающую среду, обеспечивается ограничением уровней ЭМП, предусмотренным нормативным документом. В табл. 25.6 приводятся нормативы ЭМП диапазона от 30 кГц до 300 ГГц для населения.

Независимо от продолжительности воздействия интенсивности ЭМИ не должны превышать максимального значения. При эксплуатации РЛС специального назначения, используемых для контроля космического пространства и работающих в диапазоне частот 150–300 МГц в режиме электронного сканирования луча, на территории населенных мест, расположенных в ближней зоне диаграммы излучения, уровень ППЭ не должен превышать 10 мкВт/см^2 (6 В/м), а на территориях, расположенных в дальней зоне диаграммы излучения — 100 мкВт/см^2 (19 В/м).

Таблица 25.6

Предельно допустимые уровни электромагнитного поля спектра радиочастот для населения

Назначение помещений, территорий	Диапазон частот				
	30–300 кГц	0,3–3,0 МГц	3–30 МГц	30–300 МГц	0,3–300 ГГц
	Допустимые уровни ЭМП РЧ				
	В/м	В/м	В/м	В/м	мкВт/см^2
Территория жилой застройки и мест массового отдыха; помещения жилых, общественных и производственных зданий (внешнее ЭМП РЧ, включая вторичное излучение)	25,0	15,0	10,0	3,0*	10,0 100**

* Кроме телевизионных, а также радиолокационных станций, работающих в режиме кругового сканирования. ** Для случаев облучения от антенн, работающих в режиме кругового обзора или сканирования с частотой не более 1 Гц и скважностью не менее 20.

Таблица 25.7

Допустимые уровни ЭМП, создаваемые антенными системами телевизионных центров

Частота, МГц	ПДУ, В/м
48,4	5,0
88,4	4,0
192,0	3,0
300,0	2,5

ЭМП, излучаемые антенными системами телевизионных станций в зависимости от частотного диапазона, нормируются следующими уровнями (табл. 25.7).

Воздействие ЭМИ, используемое для лечения пациентов, санитарными правилами не регламентируется. Длительность процедур и интенсивность ЭМИ определяются соответствующими медицинскими рекомендациями. Вместе с тем на персонал, отпускающий процедуры, нормативы распространяются как на профессиональную категорию лиц, обслуживающих радиочастотные устройства.

Гигиенические нормативы ЭМП для условий производства являются основой профилактики профессиональной патологии. На протяжении более 40 лет разрабатываются гигиенические нормативы с периодическим их уточнением, корректировкой, дифференцированием и изучением надежности этих регламентов. В настоящее время действующие законодательные документы включают нормативы как по постоянным ЭП и МП, так и по переменным в широком спектре частот.

Допустимые уровни напряженности ЭСП в зависимости от экспозиции распространяются на ЭСП, создаваемые легко электризующимися материалами и изделиями, а также различными электроустановками постоянного тока, но без учета электрических разрядов, для предупреждения которых применяются соответствующие защитные меры. Согласно «Санитарно-гигиеническим нормативам» предельно допустимая величина напряженности ЭСП на рабочем месте не должна превышать 60 кВ/м при часовой экспозиции. При длительном воздействии (от 1 до 9 часов) допустимая величина ($|\bar{E}_{доп}|$) определяется по формуле

$$|\vec{E}_{\text{доп}}| = \frac{60}{\sqrt{T}}, \text{кВ/м},$$

где T — время в часах.

Нормативы свыше 20 кВ/м допускаются при условии, что в остальное время рабочего дня $|\vec{E}_{\text{доп}}|$ не превышает это число. В случаях превышения должны применяться средства защиты.

При эксплуатации подстанций, ЛЭП и других электроустановок ультравысокого напряжения на рабочих местах создаются не только ЭСП, но и аэроионы, возникающие вследствие коронирования токоведущих частей. Аэроионы в ЭСП создают ионный ток. Поэтому ионные токи наряду с ЭСП также подлежат гигиенической регламентации. Персонал при обслуживании высоковольтных установок постоянного тока сверхвысоких напряжений подвергается воздействию двух электрических факторов. Допустимые уровни напряженности ЭСП и плотности ионного тока устанавливаются в зависимости от времени пребывания персонала на рабочих местах. При напряженности ЭСП менее 15 кВ/м и плотности ионного тока, не превышающей 20 нА/м^2, допускается время пребывания в течение всего рабочего дня.

Предельно допустимый уровень напряженности ЭСП ($|\vec{E}_{\text{доп}}|$) устанавливается в 60 кВ/м в течение часа. При превышении этого параметра пребывание в ЭСП без средств защиты не допускается (ГОСТ 12.1.045-84). При напряженности ЭСП от 15 до 20 кВ/м и плотности ионного тока не более 25 нА/м^2 допустимое время пребывания персонала не должно превышать 5 часов. Если напряженность ЭСП выше, то расчет времени пребывания человека в поле производится по формуле

$$t_{\text{доп}} = \frac{(|\vec{E}_{\text{пр}}|)^2 \cdot t_1}{(|\bar{E}_{\text{ф}}| + \beta |\bar{j}_{\text{ф}}|)^2},$$

где $t_{\text{доп}}$ — допустимое время, ч; $|\bar{E}_{\text{пр}}|$ — предельно допустимое значение напряженности ЭСП по модулю, равное 60 кВ/м; t_1 — время, равное 1 ч, в течение которого допустимы $|\bar{E}_{\text{пр}}|$; $|\bar{E}_{\text{ф}}|$ и $|\bar{j}_{\text{ф}}|$ — фактические значения напряженности ЭСП (кВ/м) и плотности ионного тока (нА/м^2), взятые по модулю, β — эмпирический коэффициент, равный $0{,}25\frac{\text{кВ} \cdot \text{м}}{\text{нА}}$. ПМП регламентируются законодательным актом — ПДУ № 1792-77. В нем установлены допустимые уровни напряженности ПМП для специалистов, работающих с различными магнитными устройствами: электромагнитами, соленоидами, импульсными установками различного типа, металлокерамическими и литыми магнитами, электромагнитными устройствами разнообразных технологических процессов. Специалисты, работающие с магнитными устройствами, подвергаются воздействию ПМП различной интенсивности при общем и локальном облучении. Действие предельно допустимых уровней (ПДУ) распространяется на проектирование, монтаж и эксплуатацию магнитных установок и магнитных материалов всех отраслей промышленности. Предельно допустимый уровень напряженности ПМП на рабочем месте не должен превышать 8 кА/м.

Ограничение воздействия ЭП промышленной частоты (50 Гц) как по уровню напряженности, так и по временному параметру предусмотрено ГОСТ 12.1.002-84, а также нормами и правилами. Требования и гигиенические нормативы по ЭП частотой 50 Гц распространяются на персонал, профессионально связанный с эксплуатацией открытых распределительных устройств и ЛЭП сверх- и ультравысокого напряжения, а также других электроустановок, при эксплуатации которых создаются ЭП, регламентируемые этими документами. Установлен предельно допустимый уровень поля, равный 25 кВ/м. Работа в условиях воздействия ЭП выше этого уровня без применения средств защиты не допускается. Разрешается работа в течение смены при напряженности ЭП до 5 кВ/м включительно. При напряженности ЭП от 20 до 25 кВ/м время пребывания в зонах повышенных уровней поля не должно превышать 10 мин.

Допустимое время пребывания в ЭП напряженностью от 5 до 20 кВ/м включительно определяется по формуле

$$T = \frac{50}{E} - 2,$$

где T — допустимое время пребывания в ЭП при соответствующем уровне напряженности, ч; E — напряженность воздействующего ЭП в контролируемой зоне, кВ/м.

Расчет допустимой напряженности в зависимости от времени пребывания в ЭП производится по следующей формуле:

$$E = \frac{50}{T+2},$$

где T — время пребывания в ЭП, ч (в пределах от 0,5 до 8 ч).

Для удобства пользования нормами допустимого времени рекомендуется табл. 25.8 с дифференцированными значениями напряженности ЭП.

Если персонал в течение рабочего дня находится в зонах с различным уровнем напряженности ЭП, то время пребывания определяется по формуле

$$T_{nm} = 8\left(\frac{t_{E_1}}{T_{E_1}} + \frac{t_{E_2}}{T_{E_{21}}} + \cdots + \frac{t_{En}}{T_{En}}\right),$$

где T_{nm} — приведенное время, эквивалентно биологическому эффекту пребывания в ЭП нижней границы нормируемой напряженности, ч; $t_{E_1}, t_{E_2} \ldots t_{E_n}$ — время пребывания в контролируемых зонах с напряженностью $E_1, E_2 \ldots E_n$, ч; $T_{E_1}, T_{E_2} \ldots T_{E_n}$ — допустимое время пребывания в ЭП для соответствующих контролируемых зон. Приведенное время не должно превышать 8 ч.

По ограничению влияния на персонал МП частотой 50 Гц разработаны ориентировочные безопасные уровни воздействия при производстве работ под напряжением на ЛЭП напряжением 220–1150 кВ. Уровень для условий общего воздействия МП устанавливается в 3,2 кА/м, а для условий локального воздействия — 5,2 кА/м. Допустимые уровни распространяются на все виды работ на неотключенных линиях под напряжением с непосредственным касанием токоведущих частей. На условия работы с энергетическими

Таблица 25.8

Допустимое время пребывания персонала в электрическом поле частотой 50 Гц

Напряженность ЭП, кВ/м	Допустимое время пребывания в ЭП в течение сут, мин	Напряженность ЭП, кВ/м	Допустимое время пребывания в ЭП в течение сут, мин
До 5 включительно	480 (8 ч)	14	94 (1 ч 34 мин)
6	378 (6 ч 18 мин)	15	80 (1 ч 20 мин)
7	308 (5 ч 15 мин)	16	68 (1 ч 8 мин)
8	255 (4 ч 15 мин)	17	56
9	213 (3 ч 33 мин)	18	46
10	180 (3 ч)	19	38
11	152 (2 ч 32 мин)	20	36
12	130 (2 ч 10 мин)	Свыше 20 до 25 (вкл.)	10
13	110 (1 ч 50 мин)	Свыше 25	Не допускается

Примечание. Нормативы действительны при условии исключения возможных электрических разрядов и тока стекания. Пребывание сверх указанного времени без средств защиты не допускается, но возможно при напряженности поля не более 5 кВ/м.

Таблица 25.9

Допустимые уровни магнитного поля

Время воздействия, ч	Уровни воздействия МП, Н (А/м)/В (мкТл).	
	Общее	Локальное
≤1	1600/2000	6400/8000
2	800/1000	3200/4000
4	400/500	1600/2000
8	80/100	800/1000

Таблица 25.10

Допустимые величины напряженности магнитного поля частотой 50 Гц (амплитудное значение)

Время пребывания, ч	Напряженность магнитного поля, А/м		
	Прерывистые МП с $\tau_u \geq 0{,}02$ с; $t_n \leq 2$ с	Прерывистые МП с 60 с $\geq \tau_u \geq 1$ с;$t_n > 2$ с	Прерывистые МП с 0,02 с $\leq \tau_u < 1$ с; $t_n > 2$ с
До 1,0 (вкл.)	6,000	8000	10,000
1,5	5,500	7,500	9,500
2,0	4,900	6,900	8,900
2,5	4,500	6,500	8,500
3,0	4,000	6,000	8,000
3,5	3,600	5,600	7,600
4,0	3,200	5,200	7,200
4,5	2900	4900	6900
5,0	2,500	4,500	6500
5,5	2300	4300	6,300
6,0	2000	4000	6000
6,5	1,800	3800	5,800
7,0	1600	3600	5600
7,5	1500	3500	5500
8,0	1400	3400	5400

установками промышленного, научного, сельскохозяйственного, медицинского и других назначений распространяются приведенные ниже нормативы по ограничению воздействия МП промышленной частоты.

Допустимые уровни МП и время контакта при условиях общего и локального воздействия приведены в табл. 25.9.

Если же работа сменная, то ПДУ МП не должен превышать установленное значение в 100 мкТл для полного рабочего дня (8 ч).

Другим документом регламентируются МП частотой 50 Гц с учетом прерывистого (импульсного) воздействия с определенной длительностью импульса и пауз между импульсами для условий производства, где изготовляется и эксплуатируется соответствующее электрооборудование. Допустимые уровни напряженности поля в зависимости от времени воздействия приведены в табл. 25.10.

Для предупреждения неблагоприятного действия ЭМП на состояние здоровья специалистов, работающих с установками промышленного, научного и медицинского назначения, использующих электромагнитную энергию в диапазоне частот 10–60 кГц, установлены следующие гигиенические нормативы. В диапазоне частот 10–30 кГц напряженности ЭП и МП на рабочих местах персонала на должны превышать следующих ПДУ: 500 В/м и 50 А/м — при воздействии в течение полного рабочего дня; 1000 В/м и 100 А/м при 2-часовой экспозиции за рабочий день. А в диапазонах радиочастот от 30 кГц до

Таблица 25.11

Предельно допустимые значения энергетической экспозиции

Диапазон частот	Предельно допустимая ЭЭ		
	ЭП, $(В/м)^2 \cdot ч$	МП, $(А/м)^2 \cdot ч$	ППЭ, $(мкВт/см^2) \cdot ч$
30 кГц–3 МГЦ	20.000.0	200	—
3–30 МГц	7.000.0	Не разработана	—
30–50 МГц	800.0	0.72	—
50–300 МГц	800.0	Не разработана	—
300 МГц–300 ГГц	—	—	200.0

Таблица 25.12

Предельно допустимые уровни напряженности электрической и магнитной составляющих в диапазоне частот 30 кГц — 300 МГц (в зависимости от продолжительности воздействия)

Продолжительность воздействия, T, ч	E пд, В/м			H пд, А/м	
	0,03–3 МГц	3–30 МГц	30–300 МГц	0,03–3 МГц	30–50 МГц
8,0 и более	50	30	10	5,0	0,30
7,5	52	31	10	5,0	0,31
7,0	53	32	11	5,3	0,32
6,5	55	33	11	5,5	0,33
6,0	58	34	12	5,8	0,34
5,5	60	36	12	6,0	0,36
5,0	63	37	13	6,3	0,38
4,5	67	39	13	6,7	0,40
4,0	71	42	14	7,1	0,42
3,5	76	45	15	7,6	0,45
3,0	82	48	16	8,2	0,49
2,5	89	52	18	8,9	0,54
2,0	100	59	20	10,0	0,60
1,5	115	68	23	11,5	0,69
1,0	141	84	28	14,2	0,85
0,5	200	118	40	20,0	1,20
0,25	283	168	57	28,3	1,70
0,125	400	236	80	40,0	2,40
0,08 и менее	500	296	80	50,0	3,00

300 МГц в соответствии с санитарными правилами и нормами ЭМП регламентируются по параметру энергетической экспозиции, которая определяется уровнем напряженности ЭМП (по электрической и магнитной составляющим) и временем его воздействия на человека. Энергетическая экспозиция (ЭЭ) ЭМП в этом диапазоне определяется как произведение квадрата напряженности ЭП и МП на время воздействия на человека. Энергетическая экспозиция к ЭП равна $ЭЭ_E = E^2 \cdot T$ и выражается в $(В/м)^2 \cdot ч$; к МП — $ЭЭ_H = H^2 \cdot T$ в $(А/м)^2 \cdot ч$ соответственно (T — время). В диапазоне частот 300 МГц до 300 ГГц интенсивность ЭМП оценивается величиной плотности потока энергии (ППЭ, измеряется в Вт/м^2, мкВт/см^2) и энергетическая экспозиция соответствует произведению значения ППЭ на время воздействия — ППЭ·Т, измеряется в (мкВт/см^2) · ч. В табл. 25.11 даны допустимые уровни ЭЭ в диапазоне частот от 30 кГц до 300 ГГц.

Расчетные допустимые уровни воздействия ЭМП по электрической и магнитной составляющим и по ППЭ в зависимости от времени даны в табл. 25.12 и табл. 25.13.

Необходимо отметить, что при продолжительности воздействия менее 0,08 ч дальнейшее повышение интенсивности воздействия не допускается.

На рабочих местах, попадающих в зону воздействия ЭМИ от антенн, работающих в режиме кругового обзора или сканирования с частотой не более 1 Гц и скважностью не менее 20, допустимая интенсивность воздействия определяется по формуле

$$ППЭ_{ПДУ} = K\frac{ЭЭ_{ППЭ_{ПДУ}}}{T},$$

где K — коэффициент ослабления биологической активности прерывистых воздействий, равный 10, однако интенсивность воздействия независимо от продолжительности не должна превышать максимального допустимого значения — 1000 мкВт/см^2. В случаях, когда рабочие места находятся в зонах, одновременно облучаемых от нескольких источников ЭМИ РЧ, для которых установлены единые ПДУ, определяется суммарное значение величин напряженности ЭМП, умноженное на время воздействия. Это произведение не

Таблица 25.13

Предельно допустимые уровни плотности потока энергии в диапазоне частот 300 МГц — 300 ГГц в зависимости от продолжительности воздействия*

Продолжительность воздействия, Т, ч	ППЭпду, мкВт/см^2	Продолжительность воздействия, Т, ч	ППЭпду, мкВт/см^2	Продолжительность воздействия, Т, ч	ППЭпду, мкВт/см^2
8,0 и более	25	5,0	40	2,0	100
7,5	27	4,5	44	1,5	133
7,0	29	4,0	50	1,0	200
6,5	31	3,5	57	0,5	400
6,0	33	3,0	67	0,25	800
5,5	36	2,5	80	0,20 и менее	1000

* При продолжительности воздействия менее 0,2 ч дальнейшее повышение интенсивности воздействия не допускается.

должно быть более допустимой энергетической экспозиции или соответствующей допустимой величины напряженности поля или ППЭ. При облучении от нескольких источников ЭМИ РЧ, для которых установлены разные нормативы, должны соблюдаться следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(ЭЭ_i / ЭЭ_{ПДУ}\right) < 1;\ \sum_{i=1}^{n}\left(E_i / E_{ПДУ_I}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(H_i / H_{ПДУ_I}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(ППЭ_i / ППЭ_{ПДУ_I}\right) < 1,$$

где $ЭЭ_i$ — энергетическая экспозиция i-нормируемого диапазона; $ЭЭ_{ПДУ}$ — предельно допустимый уровень энергетической экспозиции i-нормируемого диапазона; $E_{ПДУ_i}$ — предельно допустимый уровень напряженности ЭП i-нормируемого диапазона; $H_{ПДУ_i}$ — предельно допустимый уровень напряженности МП i-нормируемого диапазона $ППЭ_{ПДУ_i}$ — предельно допустимый уровень ППЭ нормируемого диапазона; n — число нормируемых диапазонов.

В связи с массовым использованием видеодисплейных терминалов (ВДТ), персональных электронно-вычислительных машин не только в условиях различных отраслей производства, но и в учебном процессе, а также в бытовых условиях, для ограничения неблагоприятного воздействия комплекса факторов, в том числе и ЭМП, в 1996 г. введены в действие санитарные нормы и правила организации работы с этими устройствами. Для ЭМП определены следующие допустимые уровни воздействия для всех категорий населения — пользователей ВДТ. Ограничения по уровню напряженности ЭП на расстоянии 50 см в радиусе монитора составляют:

- в диапазоне частот от 5 Гц до 2 кГц — 25 В/м;
- в диапазоне частот от 2 до 400 кГц — 2,5 В/м.

Магнитная составляющая поля регламентируется по плотности магнитного потока:

- для диапазона частот от 5 Гц до 2 кГц — 250 нТл;
- для диапазона частот от 2 до 400 кГц — 25 нТл.

Ограничивается и величина поверхностного электростатического потенциала до 500 В. Вместе с тем в документе излагаются гигиенические требования к организации режима работы и отдыха для профессиональных пользователей, студентов, детей дошкольного и школьного возраста и учащихся специальных учебных заведений, с различным ограничением времени работы с ВДТ (регламентация временного параметра). В настоящее время в РФ одновременно действуют 12 законодательных документов службы Госсанэпиднадзора и государственного комитета стандартизации (ГОСТ), регламентирующие параметры ЭМП и экспозицию в широком диапазоне: от статических электрических и магнитных полей до переменных 300 ГГц как для профессиональных категорий, так и для населения. Сравнительный анализ гигиенических нормативов действующих документов показывает некоторую несогласованность ПДУ в определенных частотных диапазонах. Так, в диапазоне 0,3–300 кГц при использовании населением бытовых электроприборов ПДУ по ЭП составляет 25 В/м. Аналогичный норматив для населения, но в диапазоне 30–300 кГц дан в СанПин 2.2.4/2.1.8.055-96. В диапазоне 5 Гц–2 кГц (нормативы для дисплеев, широко используемых населением) составляет также 25 В/м, а в диапазоне от 2 до 400 кГц — 2,5 В/м. Вместе с тем для электротоваров народного потребления (50 Гц) ЭМП регламентируются величиной в 500 В/м, т. е. в 20 раз выше. Один документ допускает в диапазоне частот от 30 до 300 Мгц — 3 В/м, и для этих же частот — три ПДУ — 2,5 В/м, 5 В/м и т. д. Подобное расхождение нормативных материалов создает условия для их разночтения и усложняет контроль электромагнитной безопасности. К сожалению, корректировка гигиенических регламентов осуществляется через 10–15 лет, между тем в зарубежных странах стандарты по ЭМП пересматривают каждые 5 лет, с учетом новых научных данных по биологическому действию электромагнитных факторов.

25.7.3. МЕЖДУНАРОДНЫЕ СТАНДАРТЫ

Зарубежные стандарты, чаще в виде рекомендаций по ограничению воздействия ЭМП, начали разрабатывать значительно позднее (см. Приложение), и предельно допустимые уровни, регламентируемые в них, были на два-три порядка выше допустимых уровней, действующих в нашей стране. На сегодняшний день большинство стран имеют национальные стандарты, наряду с которыми разработаны и международные допустимые уровни ЭМП по линии ВОЗ (Всемирная организация здравоохранения), IRPA (Международная ассоциация по радиационной защите), INIRC (Международный комитет по защите от неионизирующих излучений) и CENELEC (Европейский комитет по электротехнической стандартизации). Отмечаются существенные различия национальных стандартов стран, а также предлагаемых ограничений воздействия ЭМП международными рекомендациями.

Применительно к ПМП регламентированы ограничения контакта по времени в зависимости от величины их индукции и локализации воздействующего фактора. В табл. 25.14 приводятся допустимые величины ПМП.

Таблица 25.14

Рекомендации допустимых уровней постоянного магнитного поля для профессионалов

Стандарты	Допустимый уровень (Тл)	Облучаемая часть тела	Продолжительность воздействия
США	До 1	Все тело	Не более 1 ч
	2	Руки	Кратковременный контакт
Комитет временных стандартов (1979 — справочник)	2	Конечности	<10 мин
	0,5	Все тело	<10 мин
	1,0	Конечности	<60 мин
	0,1	Все тело	<60 мин
	0,1	Конечности	8 ч
	0,01	Все тело	8 ч
Стенфорд (линейные ускорители)	2,0	Руки	1 мин
	0,2	Все тело или голова	1 мин
	0,2	Руки	Периодически
	0,02	Все тело или голова	Периодически
Национальная лаборатория ускорителей	0,01–0,5	Все тело	Периодически
	0,5–1,0		Менее 60 мин

Таблица 25.15

Допустимые значения электрической и магнитной составляющих ЭМП промышленной частоты

Страна	Облучаемая категория людей		Электрическое поле (*E*), кВ/м	Магнитная индукция (*H*), мТл
США (ACGIH) Штат, Нью-Йорк	Профессионалы		макс. 25	1,0
	Население	внутри полосы отчуждения	11,8	0,02
		частные дороги	11,0	
		общественные дороги	7,0	
		граница полосы отчуждения	1,6	
Штат Нью-Джерси	Граница полосы отчуждения		3,0	
Штат Флорида	Под линиями электропередачи	500 к/В	10,0	
		230 к/В	8,0	
	Граница полосы отчуждения		2,0	
В других штатах США	В зоне полосы отчуждения		от 7,0 до 9,0	
Англия, NRPB	Профессионалы		макс. 30,0	макс. 1,8
	Население	круглосуточно	2,6	0,18
		случайно	12,0	1,1
Япония	Под линиями электропередачи 275 кВ		7,0	
ФРГ	Профессионалы		среднее 20,0	сред. 5,0
	Население		макс. 30,0	макс. 8,0
Чехия	Профессионалы		макс. 15,0	
	Население	на пересечении линий ЛЭП с дорогами	10,0	
		постоянное пребывание	1,0	
Польша	Профессионалы		макс. 15,0	0,002
	Население	максимально	10,0	
		временно	от 1,0 до 10,0	
Болгария	Профессионалы	менее 180 мин	от 5,0 до 10,0	
		менее 10 мин	10,0–15,0	
		менее 5 мин	20,0–25,0	
Австралия	ЛЭП 500 кВ	внутри полосы отчуждения	10,0	
		граница полосы	5,0	
	ЛЭП 200 кВ	внутри полосы отчуждения	5,0	
		граница полосы отчуждения (исключительные условия)	2,0	
	ЛЭП 500 кВ	внутри полосы отчуждения	5,0	
		граница полосы отчуждения	2,0	
	ЛЭП 200 кВ	внутри полосы отчуждения	2,5	
		граница полосы отчуждения (обычные условия)	1,0	

Продолжение табл. 25.15

Страна	Облучаемая категория людей		Электрическое поле (*E*), кВ/м	Магнитная индукция (*H*), мТл
Международные (INIRC/IRPA)	Профессионалы	в течение рабочего дня	10,0	0,5
		кратковременно на конечности	30,0	5,0
				25,0
	Население	круглосуточно	5,0	0,1
		до нескольких часов в сут.	10,0	1,0
Международные (CENELEC)	Профессионалы	среднее	20,7	5,0
		максимально	31,0	8,0
	Население	круглосуточно	7,0	0,350
		до 6 ч в сут.	10,0	1,0

Особое внимание было уделено изучению биологического действия ЭМП диапазона 50 (60) Гц в связи с интенсивной электрификацией и широкомасштабными контактами не только профессионалов, но и населения с целью разработки стандартов по обеим компонентам (E, H) ЭМП промышленной частоты. В табл. 25.15 приведены национальные и международные стандарты по электрическому и магнитному полям 50 (60) Гц.

Следует отметить, что зарубежные специалисты продолжают активно работать над проблемой защиты населения от вредного воздействия ЭМП промышленной частоты, в связи с выявленным их патогенным действием, в частности магнитной составляющей ЭМП невысоких уровней. Эпидемиологическими исследованиями (США, ФРГ, Швеции, Финляндии) подтверждается связь некоторых форм онкологических заболеваний с воздействием ЭМП, создаваемых линиями электропередачи. Проанализировав результаты этих исследований, Шведское управление по технико-экологическому развитию (NUTEK) разработало ПДУ ЭМП для специалистов с рекомендациями при решении вопросов строительства, размещения детских учреждений или мест постоянного пребывания людей там, где магнитная индукция превышает 0,2–0,3 мкТл. Эти величины значительно ниже принятых Международных стандартов для населения (100 мкТл).

Регламентирование уровней и экспозиции ЭМП диапазона радиочастот в зарубежной практике основывается на тепловой концепции механизма действия физических полей. На ее основе были установлены гигиенические критерии на допустимые уровни воздействия, исходившие из определения порога теплового действия. Уровень этого порога рассчитывался на базе величины теплообразования в процессе метаболизма, с которым эффективно справляется система терморегуляции человека. Рассчитанный безопасный уровень ЭМП, воздействие которого сопровождается поглощением энергии тканями, при переходе в тепло, величина которого меньше колебаний собственной теплопродукции, составляет порядка 10 мВт/см^2. Этот порог теплового воздействия получил, хотя и неправомерно, широкое распространение при определении регламентов в зарубежных странах. Вместе с тем экспериментально и теоретически была установлена зависимость степени поглощения энергии от частотного диапазона. Пики абсорбции электромагнитной энергии для любого размера человеческого тела лежат в диапазоне частот от 30 до 300 МГц. Для условий наибольшего поглощения энергии рекомендован сниженный уровень экспозиции в 1 мВт/см^2.

Для ЭМП удельная поглощенная мощность (УПМ-SAR) в области этих частот всегда меньше или равна 0,42 Вт/кг. Допустимая напряженность поля или ППЭ рассчитывается так, чтобы обеспечить среднюю SAR, меньшую или равную 0,42 Вт/кг, для всего частотного диапазона от 3 МГц до 100 ГГц. Однако локальные показатели SAR могут быть выше, чем средняя величина для всего тела. В табл. 25.16 приведены международные и национальные регламенты ЭМП радиочастотного диапазона и рекомендации по ограничению электромагнитного воздействия для профессионалов и населения.

Таблица 25.16

Международные и национальные стандарты и рекомендации по допустимым уровням напряженностей и ППЭ ЭМП

Международные организации и страны	Область распространения	Диапазон частот (f, МГц)	ПДУ воздействия	Время воздействия
США ANSI C95.1-91	Контролируемые условия (персонал)		E, В/м; H, А/м	6 мин
		0,003–0,1	614; 163	
		0,1–3,0	614; 16,3/f	
		3–30	1842/f; 16,3/f	
		30–100	61,4; 16,3/f	
		100–300	61,4; 0,163	
			ППЭ, Вт/см^2	
		300–3000	f/300	
		3000–15000	10	
		15000–300000	10	
	Неконтролируемые условия (население)	0,03–0,1	614; 163	6 мин
		0,1–1,34	614; 16,3/f	
		1,34–3,0	823,8/f; 16,3/f	
		3,0–30	823,8/f; 16,3/f	
		30–100	27,5; 158,3/f	
		100–300	27,5; 0,0729	30 мин
		300–3000	f/1500 мВт/см^2	
		3000–15000	f/1500 мВт/см^2	90/f
		15000–300000	10 мВт/см^2	616/f
США FSS	Контролируемые условия (персонал)		E, В/м; H, А/м	Неограниченно
		0,3–3,0	614; 1,63	
		3–30	1842/f; 4,89/f	
		30–300	61,4; 0,163	
			ППЭ, Вт/см^2	
		300–1500	f/300	
		1500–100000	5,0	

Международные организации и страны	Область распространения	Диапазон частот (f, МГц)	ПДУ воздействия	Время воздействия
США FSS	Неконтролируемые условия (население)		E, В/м; H, А/м	Неограниченно
		0,3–1,34	614; 1,63	
		1,34–30	$824/f$; $2{,}19/f$	
			ППЭ, Вт/см^2	
		30–300	$f/1500$	
		300–1500	10	
		1500–100000	1,0	
Канада HWC Pub. 77 EHD-13 Pub. 78 EHD-22	Персонал		E, В/м; H, А/м	8 ч
		0,01–1,2	600; 4,0	
		1,2–3,0	600; $4{,}8/f$	
		3,0–30	$1800/f$; $4{,}8/f$	
		30–300	60; 0,16	
			ППЭ, Вт/см^2	
		300–1500	1,0–5,0 ($f/300$)	
		1500–300000	5,0	
	Население		E, В/м; H, А/м	Неограниченно
		0,01–1,2	280; 1,8	
		1,2–3,0	280; $2{,}1/f$	
		3,0–30	$840/f$; $2{,}1/f$	
		30–300	2,8; 0,07	
			ППЭ, Вт/см^2	
		300–1500	$6{,}44 \cdot 10^{-4}/f$	
		1500–300000	1,0	
Англия	Персонал		E, В/м; H, А/м	2 ч
		0,05–0,3	2000; $5/f$	
		0,3–10	$600/f$; $5/f$	
		10–30	60; $5/f$	
			ППЭ, Вт/см^2	
		100–500	$f/100$	
		>500	5,0	
Университет Дж. Хопкинса для физических лабораторий	Персонал		E, В/м; H, А/м	8 ч
		0,3–3,0	200; 0,5	
		3,0–30	$600/f^2$; $1{,}3/f^2$	
		30–100000	20; 0,05	
			1,0 мВт/см^2	
Италия	Персонал		E, В/м — H, А/м	8 ч
		0,3–3,0	140; 0,36	
		3,0–300000	60; 0,17	
			1,0 мВт/см^2	

Международные организации и страны	Область распространения	Диапазон частот (f, МГц)	ПДУ воздействия	Время воздействия
Италия	Население	0,3–3,0	45; 0,11	Неограниченно
		3,0–300000	20; 0,05	
Австралия	Персонал	0,3–3,0	377; 2,65	8 ч
		3,0–9,5	$390000/f^2$; $23{,}9/f^2$	
		9,5–30,0	$390000/f^2$; $23{,}9/f^2$	
	Население	0,3–300000	Действующие значения E и H не должны превышать 0,2 от промышленного уровня	
Болгария BNS 14525-90 BNS 17137-90	Персонал	0,06–3,0	500; 50	Рабочий день
		3,0–30	200 В/м; 50	
		30–50	$1800/f$; $4{,}8/f$	
		50–300	$1800/f$; $4{,}8/f$	
		300–300000	1,0 мВт/м^2	
Ordinance N 41/1995 N9/1991	Население	0,0001	25000 В/м; $60/f$ мТ	
		0,0001–0,004	$2{,}5 \cdot 10^6/f$ В/м; $60/f$ мТ	
		0,004–0,06	625 В/м; $60/f$ мТ	
		0,03–0,3	25 В/м	
		0,3–3,0	15 В/м	
		3,0–30	10 В/м	
		30–300	3 В/м	
		300–300000	0,01 мВт/см^2	
Венгрия	Персонал	0,03–30	$1200/t$ В/м	Рабочий день
		30–300	$480/t$ В/м	
		0,3–300000	$24/t$ В/м^2	
	Население	0,03–30	$480/t$ В/м	
		30–300	$240/t$ В/м	
		0,3–300000	$24/t$ В/м^2	
Польша	Персонал	0,1–10	<20 В/м; <2 А/м	Рабочий день
			20–70 В/м; 2–10 А/м	Требуется медицинский контроль
		10–30	<7 В/м	Рабочий день
		0,3–300000	7–20 В/м	Скан. возд.
		0,3–300000	<0,1 Вт/м^2	Рабочий день
			1–10 Вт/м^2	Треб. мед. обсл.
Германия	Персонал и население	0,01–0,03	1500 В/м; 250 А/м	Неограниченно
		0,03–2,0	1500 В/м; $7{,}5/f$ А/м	

Международные организации и страны	Область распространения	Диапазон частот (f, МГц)	ПДУ воздействия	Время воздействия
Германия	Персонал и население	2,0–30	3000/f В/м; 7,5/f А/м	
		30–3000	100 В/м; 0,25 А/м	
		3000–12000	2,5–1,0 мВт/см^2	
		12000–300000	1,0 мВт/см^2	
Швеция	Персонал	0–300	137 В/м	8 ч
		0,3–300000	1,0 мВт/см^2	
Франция	Население	300–300000	1,0 мВт/см^2	>1 ч
	Военные	300–300000	10 мВт/см^2	
Финляндия	Персонал	0,3–3,0	200 В/м; 0,5 А/м	Рабочий день
		3,0–10	110 В/м; 0,3 А/м	
		30–5000	43 В/м; 0,12 А/м	
			0,5 мВт/см^2	
		5000–300000	10 мВт/см^2	
ICNIRP/ IRPA ВОЗ	Персонал	0,1–1,0	614 В/м; 1,6/f А/м	6 мин
		1–10	614/f В/м; 1,6/f А/м	
		10–400	61 В/м; 0,16 А/м	
		400–2000	1–5 мВт/см^2 (f/400)	
		2000–300000	5 мВт/см^2	
	Население	0,1–1,0	87 В/м; 0,23/$f^{0,5}$ А/м	
		1–10	87/$f^{0,5}$; 0,23/$f^{0,5}$	
		10–400	27,5; 0,073	
		400–2000	0,2–1,0 мВт/см^2	
		2000–300000	1,0 мВт/см^2	
CENELEC 50166-2	Контролируемые условия	0,03–0,1	1500; 158/$f^{1,355}$	30 мин
		0,1–0,4	1500; 4,89/f	
		0,4–10	614/f; 4,89/f	
		10–30	61,4; 4,89/f	
		30–400	61,4–0,16	
		400–2000	f/400 мВт/см^2	
		2000–300000	5 мВт/см^2	
	Неконтролируемые условия	0,03–0,14	300 В/м; 16 А/м	
		0,14–0,92	300; 2,19/f	
		0,92–10	275/f; 2,19/f	
		10–30	27,5; 2,19/f	
		30–400	27,5; 0,07	
		400–2000	f/2000 мВт/см^2	
		2000–300000	1 мВт/см^2	

Как видно из приведенных данных, нормируемые уровни ЭМП и экспозиции к ним значительно различаются, что и подтверждает факт отсутствия достаточного научного обоснования регламентации этих факторов. Объем нормативных документов, используемых на территории РФ, по предельно допустимым уровням ЭМП, воздействующих на человека, не охватывает всех важных частотных диапазонов. Особенно слабо разработан низкочастотный диапазон: от 0 до 31 Гц. ЭМП этого частотного диапазона существенно влияет на работу органов человека, которые формируют при своей работе поля такого же частотного диапазона: головной мозг (5–30 Гц), сердечные сокращения (1,0–1,2 Гц), дыхательные движения (0,3 Гц), сокращения желудка (2,5–3,5 Гц) и др.

Суммируя сказанное, отметим, что, по нашему мнению, проблемам электромагнитной экологии, и в частности воздействию ЭМП на человека, в Российской Федерации уделяется недостаточно внимания как со стороны органов здравоохранения, так и со стороны законодательных органов Российской Федерации, призванных приводить нормативную (в том числе и юридическую) документацию в соответствие с задачами личной безопасности человека. Нормативные акты, разработанные в России, не охватывают необходимые частотные диапазоны ЭМП, а их предельные концентрации и продолжительность адаптивного воздействия на человека завышены.

25.8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЛИЩА

25.8.1. ВВЕДЕНИЕ

Жизнедеятельность человека зависит от условий его обитания и взаимодействия с окружающей электромагнитной средой, в которой человека можно рассматривать как элемент системы. С одной стороны, эта система воздействует на человека через солнечно-земные связи, космические и земные ритмы, через колебания метрики пространства, через экстремальные условия (например, стихийные бедствия), через природно-очаговые и природно-эпидемические заболевания, а также антропогенные факторы среды: химические, физические и биологические. С другой стороны, человек сам оказывает воздействие на окружающую электромагнитную среду, элементом которой является и относительно которой выступает как автономная система.

Нормирование с точки зрения экологических проблем — это установление предельно допустимых уровней воздействующего фактора. По определению предельно допустимый уровень (ПДУ) — это уровень вредного фактора, который не должен вызывать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья, обнаруживаемых современными методами исследований, в отдаленные сроки жизни настоящего и последующих поколений.

Электромагнитное поле (ЭМП) характеризуется частотой, напряженностью электрического поля (ЭП) и магнитного поля (МП), фазой, поляризацией, видом модуляции, структурой и др. Биологическая активность почти всех перечисленных параметров уже доказана и степень их воздействия стараются учесть в разрабатываемых нормативных документах.

Измерениями ЭМП в жилых помещениях домов различных типов (панельные, кирпичные и др.), находящихся на границе охранных и санитарно-защитных зон жилой застройки (вблизи от воздушных линий электропередачи), установлены различные уровни напряженностей ЭП и МП. Флюктуации значений поля внутри зданий зависят от множества причин, которые следует учитывать при мониторинге. Это расстояние от ЛЭП, особенности конструкции и строительных материалов (немагнитные, железобетонные),

Таблица 25.17

Параметры ЭМП, подлежащие контролю в жилом помещении, и их предельно допустимые уровни*

Наименование поля	Диапазон частот	Контролируемый параметр	Обозначение	Единица измерения, ПДУ*
ЭСП	0 Гц	Напряженность ЭП	E	15 кВ/м
ПМП	0 Гц	Напряженность МП	H	5000 А/м
		Индукция МП	B	$6{,}3\cdot10^{-3}$ Тл
ЭМП	50 Гц	Напряженность ЭП	E	0,5 кВ/м
		Напряженность МП	H	8,0 А/м
		Индукция МП	B	10 мкТл
ЭМП	0,1–300 Гц	Напряженность ЭП	E	0,5 кВ/м
		Напряженность МП	H	8,0 А/м
		Индукция МП	B	10 мкТл
ЭМП	0,3–300 кГц	Напряженность ЭП	E	25,0 В/м
		Напряженность МП	H	5,0 А/м
		Индукция МП	B	6,0 мкТл
ЭМП	0,3–3,0 МГц	Напряженность ЭП	E	15,0 В/м
		Напряженность МП	H	5,0 А/м
		Индукция МП	B	6,0 мкТл
ЭМП	3,0–30 МГц	Напряженность ЭП	E	10,0 В/м
		Напряженность МП	H	—
		Индукция МП	B	—
		Энергетическая экспозиция по ЭП	$ЭЭ_E$	800 (В/м)^2·ч
		Энергетическая экспозиция по МП	$ЭЭ_H$	0,72 (А/м)^2·ч
ЭМП	30 кГц – 300 МГц	Напряженность ЭП	E	3,0 В/м
		Напряженность МП	H	0,30 А/м
		Индукция МП	B	Данных нет
		Энергетическая экспозиция по ЭП	$ЭЭ_E$	800 (В/м)^2·ч
		Энергетическая экспозиция по МП	$ЭЭ_H$	Данных нет
ЭМП	0,3–300 ГГц	Плотность потока энергии	ППЭ	10 мкВт/см^2
		Энергетическая экспозиция плотности потока энергии	$ЭЭ_{ППЭ}$	200 (мкВт/см^2)·ч

* Отсутствие нормируемых параметров свидетельствует о том, что они еще не установлены.
** ПДУ выбраны из санитарно-гигиенических нормативных документов.

размеры, ориентирование и этажность зданий, расположение и различное исполнение воздушных и кабельных линий, класс напряжения, величина тока, измерение в вертикальной и горизонтальной плоскостях и др.

Научно-технический прогресс способствовал интенсивному внедрению в быт огромного количества электротехнических приборов и оборудования, радио- и телевизионных приемников, электронно-вычислительной техники. В их числе: мобильные радиотелефоны и компьютеры, кондиционеры, миксеры и тостеры, грили и микроволновые печи и многое другое. Использование этой техники привело к значительному росту потребляемой электроэнергии. Так, в странах ЕЭС около 25% потребляемой энергии приходится на бытовые нужды. По опубликованным данным, на каждого жителя потребление электроэнергии в год составляет: в Англии — 1600 кВт·ч, в ФРГ — 1370 кВт·ч, во Франции — 1030 кВт·ч, в Италии — 640 кВт·ч, в странах СНГ в пределах до 1000 кВт·ч. Рост потребления электрической энергии населением за счет оснащенности квартир электробытовыми техническими средствами, осветительными устройствами, телевизионной, компьютерной техникой является не только положительным показателем благосостояния человека, но и указывает на возможность изменения среды внутри жилища по электромагнитному фактору.

Оценка ЭМП должна проводиться по фактическим уровням измеренных ЭМП, а результаты измерений сопоставляться с гигиеническими нормативами, гарантирующими безопасность человека и обеспечивающими благоприятные условия его жизнедеятельности.

Параметры ЭМП, подлежащие контролю в жилом помещении при санитарно-гигиеническом контроле, и их предельно допустимые уровни представлены в табл. 25.17.

25.8.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ЖИЛОМ ПОМЕЩЕНИИ

ЭМП, воздействующие на человека в жилом помещении, можно разделить на две группы. К первой группе отнесем поля естественного происхождения. Среди них: статические и квазистатические (поля Солнца, планет и Земли); поля динамические (в первую очередь, это поля, связанные с аномальными явлениями в земных условиях: землетрясениями, извержениями вулканов, магнитными аномалиями). Ко второй группе отнесем поля, порождаемые технической деятельностью человека (антропогенные поля).

Ниже мы подробнее расскажем о следующих видах воздействий, существенно влияющих на человека в жилище: антропогенные ЭМП; ЭП и МП Земли; МП от теллурических токов и геопатогенные поля.

Антропогенные поля. Окружающее пространство, особенно урбанизированных территорий, в настоящее время перенасыщено ЭМП широкого частотного диапазона, создаваемыми разнообразными силовыми источниками. Среди них проложенные под землей телефонные, телевизионные и электрические кабельные сети, силовые подстанции, энергоемкие промышленные предприятия и т. д. В городе возникают зоны с блуждающими кольцевыми токами и полями. Так, МП от токов фаз ЛЭП беспрепятственно проникают в жилые помещения близкорасположенных зданий. Блуждающие токи, протекающие в домовых системах водо- и теплоснабжения и канализации в среднем создают индукции 0,1–0,3 мкТл. При одновременном действии нескольких источников МП (токи фаз ЛЭП и блуждающие токи) индукция может возрастать до 1 мкТл и выше.

Напряженности ($\vec{E}, \vec{H}$) ЭМП, создаваемые всеми этими источниками, в десятки и сотни раз превышают естественный электромагнитный фон данной территории. Кроме того, напряженности антропогенных ЭМП существенно меняются в течение суток из-за разного потребления электроэнергии. Эти суточные колебания ЭМП существенно изменяют электромагнитную среду, окружающую человека.

ЭМП беспрепятственно проникают в жилые и служебные помещения. Суммарное их воздействие на человека зачастую превышает предельно допустимые концентрации, декларируемые нормативными документами.

Жилые помещения, в свою очередь, оснащены разнообразным электротехническим оборудованием (например, электрическими бытовыми приборами). К зданиям подведены кабельные линии, распределяющие электроэнергию по квартирам и системам электроснабжения лифтов. В стенах жилых помещений замурованы электрокабели. Все отмеченные устройства являются источниками внешних ЭМП и участвуют в формировании электромагнитной среды.

В России не установлены ПДУ переменного МП частотой 50 Гц для населения, поэтому этот вид излучения не контролируется органами санэпиднадзора в бытовых приборах и жилищах. В Швеции такой норматив установлен для вновь строящихся зданий, и он составляет 0,2 мкТл.

Исследования специалистов Центра электромагнитной безопасности показали, что в обычных бытовых условиях существуют источники переменного МП, которые в несколько (а то и в десятки) раз превышают условный предел безопасности ЭМИ — 0,2 мкТл.

Измерения, проведенные этим же Центром в России в домах «сталинской постройки», показали, что в некоторых комнатах от 60 до 90% площади имеют уровень МП, превышающий 0,2 мкТл. В одном из случаев источником ЭМП была кабельная линия, проходящая в подъезде и лифте. Причем у стены дома значения МП превышали 1 мкТл. В доме современной постройки источником ЭМП оказался распределительный щит электропитания, находящийся в смежном нежилом помещении. В этом случае индукция МП в жилой комнате равнялась 2,2 мкТл. Эти источники ЭМП действуют круглосуточно независимо от воли жильцов. Практически в каждой квартире имеются сегодня электробытовые приборы: телевизоры, холодильники, электроутюги и стиральные машины. Немало домов оборудовано уже и электроплитами, а во многих семьях появились компьютеры и микроволновые печи. Помимо этого — кофемолки, кофеварки, миксеры, электрочайники, электросоковыжималки, кухонные комбайны и т. д. Наиболее опасные источники ЭМП: микроволновые печи (ППЭ $>$ 0,1 Вт/м^2), пылесосы (100 мкТл), электробритвы (сотни мкТл), электроплиты (на расстоянии 20–30 см от передней панели 1–3 мкТл), стиральные машины (у пульта управления $>$ 60 мкТл), электрочайники.

Требуются меры для снижения антропогенных ЭМП в местах длительного пребывания человека.

ЭП и МП Земли. Принято считать, что в среднем по поверхности Земли напряженность ЭП $E_З = 130$ В/м. Источниками наиболее сильных ЭП в атмосфере являются грозовые облака. Напряженность ЭП под ними у поверхности Земли может достигать 10^4 В/м. Напряженности ЭП Земли имеют переменные составляющие с частотой 1–13,0 Гц. В период геомагнитных возмущений в этой зоне частот регистрируются максимальные вариации напряженности ЭП, в сотню раз превышающие фоновые.

Естественное МП Земли состоит из основной составляющей, формируемой постоянным МП Земли, и из нескольких небольших переменных составляющих, отличающихся амплитудами и частотами. Последние вызваны влиянием солнечной активности и атмосферных бурь. На поверхности Земли вертикальная составляющая индукции МП достигает максимума на магнитных полюсах, составляя примерно $6{,}02 \cdot 10^{-5}$ Тл в районе северного магнитного полюса, $7{,}03 \cdot 10^{-5}$ Тл в районе южного магнитного полюса, и равна нулю на магнитном экваторе. Горизонтальная составляющая достигает максимума на магнитном экваторе, составляя около $4{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл, и равна нулю на магнитном полюсе. В центральных широтах (например, для Санкт-Петербурга) $|B_З| \approx 42 \cdot 10^{-6}$ Тл, стандартами не нормируется. В то же время установлено, что МП Земли оказывает особое влияние на человека, участвуя в синхронизации его биологических ритмов.

МП от теллурических токов. Следует особое внимание уделить МП, порождаемым теллурическими токами, протекающими в земле и вызванными вариациями МП Земли (наводящими токи согласно закону электромагнитной индукции), ЭП атмосферы, электрохимическими и термоэлектрическими процессами в пластах земной коры.

Основным источником появления теллурических токов в грунтах города является наземный и подземный электротранспорт. Эти источники создают теллурические поля напряженностью 300–1600 мВ/м, т. е. в сотни раз превышающие естественные. Другим важным источником блуждающих токов являются станции катодной противокоррозийной защиты, генерирующие поля напряженностью 60–280 мВ/м. Они же, как установлено косвенными измерениями, являются причиной достаточно мощных МП, создаваемых вокруг труб, защищаемых от коррозии, проходящих непосредственно в жилом секторе и даже в квартирах. Характерно, что загрязнение подземной геолого-геофизической среды блуждающими токами является весьма дальнодействующим. Изменения их величины фиксируются на расстоянии от 0,1 до 10 км от источников в зависимости от систем генерации токов, строения и свойств грунтов.

Исследование теллурических токов промышленного генезиса, создающих низкоинтенсивные МП, началось совсем недавно, и многие вопросы еще не изучены.

Особенно важен для больших городов вопрос так называемых связанных полей, проявление которых отмечается как результат совместного дрейфа промышленных и естественных блуждающих токов. Однако уже сейчас известно, что они существенно изменяют качество геолого-геофизической среды, влияя на электрозарядные атмосферные процессы, в том числе влияют и на генерацию плазмоидов в атмосфере.

Изучение низкоинтенсивных полей электромагнитного характера в городах важно и потому, что природный электромагнетизм в основном проявляется в низкоинтенсивных вариациях полей. Именно в зоне низкоинтенсивных полей идет суммирование техногенных и природных воздействий, которые «путают» организмы живых существ. Дело в том, что высокоинтенсивные поля техногенных воздействий распознаются организмом и не воспринимаются «добровольно» (организм с ними борется). Конечно, техногенный электромагнетизм может «сломать» сопротивление организма, но это уже процесс, интересующий санитарные и медицинские службы. В случае же низкоинтенсивных полей организм может принимать вариацию за естественный фон и не борется с ним, допуская скрытое накопление дефектов.

Кроме того, надо иметь в виду, что слабоинтенсивные поля проникают в каждую квартиру и в каждое учреждение, т. е. эти поля придвинуты к каждому жителю города на протяжении всей его жизни.

Геопатогенное поле. Геопатогенное поле возникает над геопатогенной зоной. Под геопатогенной зоной понимается протяженная геофизическая аномалия, в которой наблюдаются различного рода реакции людей при действии на них земного излучения. В геопатогенных зонах имеются места (перекресты) с тонкой структурой, зависящей от различных геофизических причин: пересечений подземных водных потоков, линий глобальных сеток, геологических разломов либо от их совместного действия.

В условиях больших городов излучения геопатогенных зон, их интенсивность, направленность и соответственно патогенность зависят не только от гидрогеологических условий местности, но и от наличия в конкретном месте различных технических сооружений и коммуникаций, созданных человеком.

Таким образом, в жилом помещении человек подвергается воздействию ЭМП широкого частотного спектра как естественного, так и искусственного происхождения. Часть из них, относящихся к диапазону инфранизкочастотных ($f \in [0; 13]$ Гц), не экранируется известными защитными приспособлениями.

25.8.3. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭМП В ЖИЛОМ ПОМЕЩЕНИИ

Прогнозирование электромагнитной среды в жилом помещении должно проводиться на всех стадиях — от проектирования до введения в эксплуатацию. Оно позволяет оценить электромагнитную среду с точки зрения выполнения действующих нормативов, наметить комплекс мероприятий для снижения уровня электромагнитного «загрязнения» жилого помещения. Кроме того, правильный прогноз обосновывает ресурс используемого электрооборудования с точки зрения электромагнитной безопасности, позволяет производить оптимизацию размещения излучающих источников. Электромагнитное прогнозирование для целей электромагнитной экологии жилища определяется широким диапазоном подходов и характеристик.

При решении проблем электромагнитной экологии жилища необходимо провести комплексное исследование проблемы с учетом всех важнейших взаимосвязей. Так, анализируя характер и уровни распределения величин ЭМП вокруг источников излучения, можно сделать вывод, что параметры поля определяются напряжением сети электропитания, материалом и конструкцией изделия, расстоянием от источника, фазностью подключения к электросети, режимом работы изделия, заземлением и рядом других моментов. Анализ структуры полей возможен сочетанием теоретических и экспериментальных методов исследований.

Методы прогнозирования. Расчетное прогнозирование является весьма сложной задачей. Всегда встает вопрос о точности расчетов ЭМП, которая определяется степенью детализации как самих излучающих элементов, так и окружающей среды. Прогнозирование ЭМП в жилых помещениях может быть выполнено разными методами, но предпочтительны методы аналитического и физического моделирования.

Методы моделирования являются основными при проведении санитарной электромагнитной экспертизы излучающего оборудования. Применение этих методов заложено в основу составления санитарного паспорта излучающего объекта, в котором в обязательном порядке должны быть внесены материалы расчетов ЭМП и санитарных зон. Математические модели расчетного прогнозирования закладываются в нормативные методические документы. В качестве основного аналитического метода можно рекомендовать электродинамический метод при условии, что известны количество источников ЭМП, их размещение, методы расчета напряженности внешнего ЭМП каждого из источников. В этом случае можно поставить и решить задачу о расчете напряженностей $\vec{E}, \vec{H}$ результирующего ЭМП в заданной области, используя уравнения Максвелла.

Результирующие напряженности $\dot{\vec{E}}_p(\omega_i)$, получаемые в любой из точек P жилого помещения, должны рассчитываться по формулам

$$\left|\dot{\vec{E}}_P(\omega_i)\right| = \sum_{j=1}^{j=n}\left|\dot{\vec{E}}^{(j)}(\omega_i)\right|; \quad \left|\dot{\vec{H}}_P(\omega_i)\right| = \sum_{j=1}^{j=n}\left|\dot{\vec{H}}^{(j)}(\omega_i)\right|,$$

где суммируются напряженности всех значимых j ($j \in [1/n]$ источников для полей частоты ω_i (i — индекс для соответствующей частоты) по модулю.

При расчете статического МП в расчет необходимо принимать МП Земли в данной широтной зоне.

Методы физического моделирования. Методы физического моделирования дают возможность изучать уровни ЭМП в различных режимах работы источника как на стадии проектирования, так и при эксплуатации, когда необходимо оценить параметры электромагнитной среды как качественно, так и количественно. Особенно такой подход важен при прогнозировании среды в ограниченных по размерам жилых помещениях с размещенным оборудованием: исходная система (оригинальный объект) заменяется моделью (вспомогательный объект), находящейся в определенном соответствии с оригиналом. При таком подходе к исследованию напряженностей внешнего ЭМП в помещении необходимо обеспечить определенные условия подобия. Поскольку рассматриваемая система в отношении ЭМП дифракции представляется сложной, но в первом приближении изотропной системой с распределенными параметрами, то теоремы подобия при переходе от оригинала к модели могут быть соблюдены. В качестве условий подобия можно выделить масштабные коэффициенты (геометрические и электромагнитные) и критерии подобия (энергетические, релаксационные и др.). При рассмотрении статических и квазистатических ЭМП могут быть учтены лишь масштабные коэффициенты [25.14].

25.8.4. СРЕДСТВА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЛИЩА

В связи с отмеченным необходимо осуществлять защитные мероприятия еще на стадии проектирования и строительства жилых и производственных помещений, заботиться об электромагнитной экологии жилищ.

Для создания нормативных (другими словами, комфортных) условий в жилых помещениях нужно снижать напряженности антропогенных ЭМП, созданных технической деятельностью человека, ЭП и МП Земли и геопатогенных полей.

Главное значение имеет не столько величина МП бытового прибора, сколько расстояние до него (пропорционально квадрату этого расстояния падает интенсивность МП), а также время работы с ним. Например, к наиболее опасным домашним приборам можно отнести телевизор и электроплиту, поэтому защиту от них можно организовать лишь расстоянием (у телевизора $l_б = (3 \div 4)D_{ЭК}$, м) и временем ($t_б \le 4 \div 5$ ч на расстоянии $l_б$).

А чтобы до минимума снизить воздействие МП в доме, стоит воспользоваться табл. 25.18, а также некоторыми советами:

1) необходимо следить за тем, чтобы дети находились на достаточном расстоянии от работающих электробытовых приборов;

2) не следует включать одновременно несколько мощных источников;

3) нельзя делать из проводов «кольца» и «петли»;

Таблица 25.18

Таблица зоны риска некоторых электробытовых приборов (по данным Центра электромагнитной безопасности)

№ п/п	Электробытовые приборы	Минимальное безопасное расстояние, м
1	Аэрогриль	1,4
2	Телевизор	1,1 от экрана; 1,2 от боковой стенки
3	Торшер, 2 лампы по 75 Вт	0,03 от провода
4	Утюг	0,23 от ручки
5	Холодильник	1,2 от двери; 1,5 от задней стенки
6	Электронагреватель	0,30 от спирали
7	Электродуховка	0,04 от передней стенки

4) по возможности желательно использовать трехпроводную схему домашней проводки с заземленным кожухом вокруг проводов.

Для ограничения ЭМП, излучаемых электробытовыми приборами, рекомендуется переставить мебель так, чтобы места сна и отдыха и места постоянного пребывания детей не попадали в зону повышенного МП электроприборов, т. е. находились от них на расстоянии не менее 1,5 м. Нельзя не заметить, кстати, что ни внутриквартирные перегородки, ни даже несущие стены не служат надежной защитой от низкочастотного МП. Поэтому желательно учитывать и то, какие источники МП установлены у соседей за стеной.

Нередко источники могут располагаться и вне дома и притом действовать независимо от воли жильцов. Замеры, проведенные в ряде домов специалистами Центра электромагнитной безопасности, показали, что уровень МП в некоторых комнатах превышает допустимый в 1,2–2 раза. В одном из случаев источником вредного воздействия оказался проложенный в подъезде по внешней стене комнаты силовой кабель лифта, в другом — расположенный в смежном нежилом помещении распределительный щит.

Наибольшему влиянию «электросмога» человек, во-первых, подвергается в своей спальне, где он проводит около трети своей жизни. Более того, в непосредственной близости, как правило, располагается ночник, телевизор, радиотелефон, радиобудильник и пр. В стене комнаты может быть замурован кабель электропитания, а под кроватью удлинитель или выпрямитель для питания какого-либо устройства. Таким образом, спальня со всеми отмеченными устройствами является источником ЭМП («электросмога»). Во-вторых же, это места нашего отдыха в квартире. Здесь могут присутствовать телевизор, видеомагнитофон, музыкальный центр, различного типа современные светильники, радио- и сотовые телефоны и др. И наконец, это может быть рабочее место. Монитор, принтер, сканер, системный блок, даже мышь и клавиатура являются источниками элетромагнитных излучений различных частот. Также следует учитывать электроборудование — различные кабели и удлинители, проходящие в непосредственной близости от вас, факс, копировальный аппарат и многое другое. Могут быть даны некоторые общие советы.

Во-первых, необходимо уделить внимание снижению уровня воздействующего «электросмога». Основное правило здесь: защищать, выключать и соблюдать дистанцию. Опытный специалист, например электрик или строительный биолог, может провести измерения и дать указания по поводу того, необходимо ли что-то изменить. От стены, возле которой находится кабель (даже скрытый) или же розетки, тоже исходят ЭП, даже если не работают никакие приборы. По возможности не кладите подушку вблизи теплопроводных и водопроводных труб.

Во-вторых, телевизоры, ресиверы, видеоаппаратура и компьютер не должны находиться в спальне. Если же вы не можете без них обойтись, то расстояние до телевизора или компьютера должно составлять не менее $l_б = (3 \div 4)D_{ЭК}$. Не находитесь вблизи электроприборов. Вынимайте штекер из розетки, если прибор не используется.

В-третьих, используйте как можно меньше электроприборов и кабелей в спальне. Не располагайте спальную комнату рядом со стояками проводки и защитными щитами. Возле стены, у которой расположена кровать, не должны проходить провода с переменным напряжением, а также их не должно быть на другой стороне в соседней комнате. Откажитесь от удлинителя или в случае необходимости используйте с как можно более коротким шнуром. Не располагайте шнур удлинителя вдоль изголовья. Не ставьте электроприборы возле стены, если с другой стороны этой же стены находится кровать. Обращайте внимание на кабели, состоящие из 3 жгутов, и штекеры с защитным контактом; используйте их вместо электрических штекеров с двумя контактами. Для всех электроприборов существует правило: после их использования штекер нужно извлекать из розетки, т. к. только таким образом прекращается проход тока. Используйте только обычные телефоны с присоединенным кабелем. Радиотелефоны могут вызывать сильные высокочастотные поля. Сотовые телефоны не должны находиться в спальне.

В-четвертых, в процесс планирования помещений и контроля за строительством должны быть вовлечены электрики, владеющие знаниями в области биологии строительства, т. к. у них помимо всего имеются необходимые измерительные приборы и опыт для осуществления контроля. Спальни и жилые комнаты должны находиться как можно дальше от кухни, прачечной и котельной. Стояки проводки и распределительные устройства не должны находиться на стенах жилых комнат или спальни. При проведении кабеля оставьте свободными места там, где вы спите или сидите. Не размещайте бойлер, стиральную машину, электроплиту, телевизор и другие подобные электроприборы в непосредственной близости к кровати.

В-пятых, при покупке электроприборов обращайте внимание на штекеры с защитным контактом и заземлением провода. Перед сном убирайте с кровати электрогрелки. Откажитесь по возможности от электрического подогрева пола [25.3].

25.8.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ЭКРАНОВ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Необходимо отметить, что перфорированные экраны [25.3] при надлежащем исполнении могут использоваться для снижения напряженностей антропогенных ЭМП, ЭП и МП Земли и патогенных полей. Необходимо лишь использовать нужные металлические соединения и выдерживать размеры ячеек перфорации.

Для снижения антропогенных ЭМП необходимо выбирать хорошо проводящие электрический ток материалы, а размеры ячеек перфорации согласовывать с частотным диапазоном полей, от которых необходимо обеспечить защиту жилого помещения.

Для снижения ЭП и МП Земли можно использовать такие же экраны, но в качестве экранирующего материала выбрать электрически проводящие магнитные материалы: мягкую сталь, техническое железо, пермаллой и др.

Для снижения геопатогенных полей в помещении рекомендуется использовать те же экранирующие сетки в виде дифракционных решеток в местах геопатогенных зон, если они будут обнаружены в помещении.

Рекомендуемые для использования при строительстве перфорированные экраны могут оказаться эффективным средством защиты жилых и служебных помещений от воздействия антропогенных ЭМП, ЭП и МП Земли и патогенных полей. Их использование ненамного удорожит строительство, но сделает пребывание человека в экранированных помещениях более комфортным.

25.9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение проблем электромагнитной экологии человека в значительной мере будет определяться точностью построения механизмов взаимосвязей полей в ГС, техногенных и человека. Только в этом случае модели, построенные с учетом механизмов взаимосвязей, окажутся полезными при решении задач диагностики, профилактики и лечения. Решение многосвязных задач электромагнитной экологии человека потребует объединенных усилий квалифицированных специалистов различных отраслей знаний.

Контрольные вопросы

1. Какие поля участвуют во взаимодействии с человеческим организмом?
2. Как осуществляется связь человеческого организма с внешними электромагнитными полями?
3. ЭМП каких частот больше всего влияют на организм человека?
4. Назовите средства защиты человеческого организма от внешних ЭМП.
5. Какие виды экранов можно использовать при защите человеческого организма от воздействия ЭМП?
6. Можете ли вы назвать нормативные документы по электромагнитной экологии?
7. Каковы ПДУ для ЭМП в жилых помещениях?

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ МАТЕМАТИКИ

НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

h_{q1}, h_{q2}, h_{q3} — коэффициенты Ламе.

№ п/п	Системы ортогональных криволинейных координат	h_{q1}	h_{q2}	h_{q3}
1	Сферические — $\{r, \theta, \varphi\}$	1	r	$r\sin\theta$
2	Вытянутые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$a\sqrt{\dfrac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}}$	$a\sqrt{\dfrac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}}$	$a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$
3	Сжатые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$a\sqrt{\dfrac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2+1}}$	$a\sqrt{\dfrac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}}$	$a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}$
4	Параболические — $\{\mu, v, \phi\}$	μ^2+v^2	μ^2+v^2	$\mu^2 v^2$
5	Прямоугольные — $\{x, y, z\}$	1	1	1
6	Круговые цилиндрические — $\{r, \varphi, z\}$	1	r	1

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

$\vec{e}_{q_1}, \vec{e}_{q_2}, \vec{e}_{q_3}$ — единичные орты.

№ п/п	Системы ортогональных криволинейных координат	$\vec{e}_{q_1}$	$\vec{e}_{q_2}$	$\vec{e}_{q_3}$
1	Сферические — $\{r, \theta, \varphi\}$	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\theta$	$\vec{e}_\varphi$
2	Вытянутые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$\vec{e}_\xi$	$\vec{e}_\eta$	$\vec{e}_\varphi$
3	Сжатые сфероидальные — $\{\xi, \eta, \varphi\}$	$\vec{e}_\xi$	$\vec{e}_\eta$	$\vec{e}_\varphi$
4	Параболические — $\{\mu, v, \phi\}$	$\vec{e}_\mu$	$\vec{e}_\nu$	$\vec{e}_\phi$
5	Прямоугольные — $\{x, y, z\}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
6	Круговые цилиндрические — $\{r, \varphi, z\}$	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_z$

Используемые ниже произведения векторов инвариантны по отношению ко всем ортогональным криволинейным системам координат $\{q_1, q_2, q_3\}$, удовлетворяющих условиям

$$\vec{e}_{q_1} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\vec{e}_{q_2}}{\vec{e}_{q_3}}\right) = 0.$$

Такому условию удовлетворяют декартовые прямоугольные координаты $\{x, y, z\}$; цилиндрические круговые координаты $\{r, \varphi, z\}$; координаты эллиптического цилиндра $\{v, \mu, z\}$; координаты параболического цилиндра $\{p, q, z\}$; сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$ и конические координаты $\{r, \mu, v\}$.

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЕДИНИЧНЫХ ОРТОВ

$$\vec{e}_{q_1}\vec{e}_{q_2}=\vec{e}_{q_2}\vec{e}_{q_3}=\vec{e}_{q_3}\vec{e}_{q_1}=0,\ \vec{e}_{q_1}\vec{e}_{q_1}=\vec{e}_{q_2}\vec{e}_{q_2}=\vec{e}_{q_3}\vec{e}_{q_3}=1.$$

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}=\sum_{i=1}^{i=3}A_{q_i}B_{q_i},\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C},$$
$$\vec{A}\cdot\vec{e}_{q_i}=A_{q_i},\ i\in[1,3].$$

ВЕКТОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЕДИНИЧНЫХ ОРТОВ

$$\vec{e}_{q1}\cdot\vec{e}_{q2}=\vec{e}_{q3},\ \vec{e}_{q2}\cdot\vec{e}_{q3}=\vec{e}_{q1},\ \vec{e}_{q3}\cdot\vec{e}_{q1}=\vec{e}_{q2},\ \vec{e}_{q1}\cdot\vec{e}_{q3}=-e_{q2},$$
$$\vec{e}_{q2}\cdot\vec{e}_{q1}=-e_{q3},\ \vec{e}_{q3}\cdot\vec{e}_{q2}=-e_{q1},\ \vec{e}_{q1}\cdot\vec{e}_{q1}=\vec{e}_{q2}\cdot\vec{e}_{q2}=\vec{e}_{q3}\cdot\vec{e}_{q3}=0.$$

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B},\ m(\vec{A}\times\vec{B})=m\vec{A}\times\vec{B},\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C},$$
$$\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}(\vec{C}\times\vec{A}),$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\vec{B})\vec{C},$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{A}[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})],$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[(\vec{A}\times\vec{B})\vec{D}]\vec{C}-[(\vec{A}\times\vec{B})\vec{C}]\vec{D}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Оператор Гамильтона (набла) ∇ выражается в ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ формулой

$$\nabla=\vec{e}_{q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\vec{e}_{q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\vec{e}_{q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}.$$

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

Оператор Лапласа (лапласиан) $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \Delta$ выражается в ортогональной криволинейной системе координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ формулой

$$\Delta=\frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}h_{q_3}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_{q_2}h_{q_3}}{h_{q_1}}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_{q_3}h_{q_1}}{h_{q_2}}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_{q_1}h_{q_2}}{h_{q_3}}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right].$$

Заметим, что

$$\nabla^2(\alpha\Phi+\beta\Psi)=\alpha\nabla^2\Phi+\beta\nabla^2\Psi \text{ (линейность)},$$
$$\nabla^2(\Phi\Psi)=\Psi\nabla^2\Phi+2(\nabla\Phi)\cdot(\nabla\Psi)+\Phi\nabla^2\Psi.$$

ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Отметим следующие правила повторного применения оператора ∇:

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = \nabla^2\vec{A} + \nabla\times(\nabla\times\vec{A}),$$

$$\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{B}) = \vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B} + (A\,\mathrm{grad})\vec{B} + \vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{A} + (\vec{B}\,\mathrm{grad})\vec{A},$$

$$\mathrm{grad}(\varphi\phi) = \varphi\,\mathrm{grad}\,\phi + \phi\,\mathrm{grad}\,\varphi,$$

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + (\mathrm{grad}\,\varphi)\times\vec{A},$$

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = \vec{A}\,\mathrm{grad}\,\varphi + \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{A},$$

$$\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A},$$

$$\mathrm{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B},$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0,$$

$$\mathrm{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\,\mathrm{grad})\vec{A} - (\vec{A}\,\mathrm{grad})\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A},$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + (\mathrm{grad}\,\varphi)\times\vec{A}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ $\{q_1, q_2, q_3\}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{e}_{q_1}\,\mathrm{rot}_{q_1}\vec{A} + \vec{e}_{q_2}\,\mathrm{rot}_{q_2}\vec{A} + \vec{e}_{q_3}\,\mathrm{rot}_{q_3}\vec{A},$$

$$\mathrm{rot}_{q_1}\vec{A} = \frac{1}{h_{q_2}h_{q_3}}\Big[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_3}A_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_2}A_{q_2})\Big],$$

$$\mathrm{rot}_{q_2}\vec{A} = \frac{1}{h_{q_3}h_{q_1}}\Big[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_1}A_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_3}A_{q_3})\Big],$$

$$\mathrm{rot}_{q_3}\vec{A} = \frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}}\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_2}A_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_1}A_{q_1})\Big].$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}h_{q_3}}\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_2}h_{q_3}A_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_3}h_{q_1}A_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_1}h_{q_2}A_{q_3})\Big].$$

$$\mathrm{grad}\,\rho = \vec{e}_{q_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1} + \vec{e}_{q_2}\frac{\partial\rho}{\partial q_2} + \vec{e}_{q_3}\frac{\partial\rho}{\partial q_3} = \vec{e}_{q_1}\,\mathrm{grad}_{q_1}\rho + \vec{e}_{q_2}\,\mathrm{grad}_{q_2}\rho + \vec{e}_{q_3}\,\mathrm{grad}_{q_3}\rho,$$

$$\mathrm{grad}_{q_i}\rho = \frac{1}{h_{q_i}}\frac{\partial\rho}{\partial q_i},\ \ i\in[1,2,3].$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}h_{q_3}}\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_{q_2}h_{q_3}}{h_{q_1}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_{q_3}h_{q_1}}{h_{q_2}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_{q_1}h_{q_2}}{h_{q_3}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\Big].$$

ПРИНЯТЫЕ В ЛИТЕРАТУРЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Наименование единицы	Обозначение единицы			Величина, измеряемая единицей
	русское		между-народное	
	старое	новое		
Ампер	а	А	*A*	Электрический ток
Вар	вар	вар	*Var*	Реактивная мощность
Ватт	вт	Вт	*W*	Мощность
Вебер	вб	Вб	*Wb*	Магнитный поток
Вольт	в	В	*V*	Электрическое напряжение
Гаусс	гс	Гс	*Gs*	Магнитная индукция
Генри	гн	Г	*H*	Индуктивность
Герц	гц	Гц	*Hz*	Частота
Гильберт	гб	Гб	*Gb*	Магнитодвижущая сила
Градус Цельсия	°C	°C	°C	Температура
Грамм	г	Г	*G*	Масса
Грамм-сила*	гс	ГС	*Gf*	Сила
Джоуль	дж	Дж	*J*	Работа
Дина	дин	дин	*Dyn*	Сила
Калория*	кал	кал	*ca1*	Количество теплоты
Кандела	(св)	кд	*Cd*	Сила света
Кельвин	(°К)	К	*K*	Температура
Кулон	к	Кл	*C*	Количество электричества
Кюри*	—	Ки	*Ci*	Активность нуклида
Люкс	лк	лк	*1x*	Освещенность
Люмен	лм	лм	*Lm*	Световой поток
Максвелл	мкс	Мкс	*Mx*	Магнитный поток
Метр	м	м	*M*	Длина
Минута*	мин	мин	*Min*	Время
Ньютон	н	Н	*N*	Сила
Ом	ом	Ом	*Q*	Электрическое сопротивление
Паскаль	—	Па	*Pa*	Давление
Пуаз	пз	П	*P*	Динамическая вязкость
Рад*	рад	рад	*Rad*	Поглощенная доза излучения
Радиан	рад	рад	*Rad*	Плоский угол
Рентген*	р	Р	*R*	Экспозиционная доза излучения
Секунда	сек	с	*S*	Время
Сименс	сим	См	*S*	Электрическая проводимость
Стерадиан	стер	ср	*Sr*	Телесный угол
Стокс	ст	Ст	*St*	Кинематическая вязкость
Тесла	тл	Т	*T*	Магнитная индукция
Фарада	ф	Ф	*F*	Электрическая емкость
Час*	ч	ч	*H*	Время
Эрг	эрг	эрг	*Erg*	Работа
Эрстед	э	Э	*Oe*	Напряженность МП поля

* Приведены единицы (только с простыми наименованиями) международной системы (полужирный шрифт), системы СГС и наиболее распространенные внесистемные единицы, допускаемые к применению в РФ (отмечены звездочкой).

СВОДКА ПРИМЕНЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ∇

Вид операции	**Обозначение**	**Применяется к величине**	**Полученная величина**
Градиент	$\nabla\varphi$	Скалярной	Векторная
Дивергенция	$\nabla\vec{D}$	Векторной	Скалярная
Ротор	$[\nabla\vec{A}]$	Векторной	Векторная
Лапласиан (скалярный), дивергенция градиента	$\nabla^2\varphi$	Скалярной	Скалярная
Лапласиан (векторный)	$\nabla^2\vec{A}$	Векторной	Векторная
Градиент дивергенции	$\nabla(\nabla\vec{A})$	Векторной	Векторная
Ротор ротора	$[\nabla[\nabla\vec{A}]]$	Векторной	Векторная
Ротор градиента	$[\nabla(\nabla\varphi)]$	Скалярной	Нуль
Дивергенция ротора	$\nabla[\nabla\vec{A}]$	Векторной	Нуль

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ОБОБЩЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ $\{q_1, q_2, q_3\}$

Уравнения Максвелла в векторной форме удобны тем, что они характеризуют общие свойства электромагнитных полей безотносительно к системе координат. При решении инженерных задач всегда приходится прибегать к системе координат, соответствующей форме расчетной области. Чаще всего пользуются системами координат, в которых три семейства координатных поверхностей ортогональны друг другу.

Уравнения Максвелла в обобщенных криволинейных ортогональных координатах $\{q_1, q_2, q_3\}$ могут быть выражены в следующем виде:

$$\frac{1}{h_{q_1}h_{q_3}}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_3}H_{q_3})-\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_2}H_{q_2})\right]=\delta_{q_1}+\frac{\partial D_{q_1}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{h_{q_3}h_{q_1}}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_1}H_{q_1})-\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_3}H_{q_3})\right]=\delta_{q_2}+\frac{\partial D_{q2}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_2}H_{q_2})-\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_1}H_{q_1})\right]=\delta_{q_3}+\frac{\partial D_{q_3}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{h_{q_1}h_{q_3}}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_3}E_{q_3})-\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_2}E_{q_2})\right]=-\frac{\partial B_{q_1}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{h_{q_3}h_{q_1}}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_1}E_{q_1})-\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_3}E_{q_3})\right]=-\frac{\partial B_{q2}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_2}E_{q_2})-\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_1}E_{q_1})\right]=-\frac{\partial B_{q_3}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}h_{q_3}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_2}h_{q_3}B_{q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_3}h_{q_1}B_{q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_1}h_{q_2}B_{q_3})\right]=0,$$

$$\frac{1}{h_{q_1}h_{q_2}h_{q_3}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{q_2}h_{q_3}D_{q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{q_3}h_{q_1}D_{q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{q_1}h_{q_2}D_{q_3})\right]=\rho,$$

$$D_{q1}=\varepsilon E_{q1},\quad B_{q1}=\mu H_{q1},\quad \delta_{q1}=\gamma(E_{q1}+E_{e1}),$$
$$D_{q2}=\varepsilon E_{q2},\quad B_{q2}=\mu H_{q2},\quad \delta_{q2}=\gamma(E_{q2}+E_{e2}),$$
$$D_{q3}=\varepsilon E_{q3},\quad B_{q3}=\mu H_{q3},\quad \delta_{q3}=\gamma(E_{q3}+E_{e3}),$$
$$w=0{,}5\varepsilon(E_{q_1}^2+E_{q_2}^2+E_{q_3}^2)+0{,}5\mu(H_{q_1}^2+H_{q_2}^2+H_{q_3}^2).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

К ГЛАВЕ 1

1.1. *Аполлонский, С. М.* Безопасность человека в электромагнитных полях / С. М. Аполлонский, Каляда Т. В., Синдаловский Б. Е. — СПб. : Политехника, 2006. — 263 с.
1.2. Физические основы электротехники / под ред. К. М. Поливанова. — М., Л. : ГЭИ, 1950. — 556 с.
1.3. *Богословский, А. С.* Постоянные электрические поля. — Л. : ВВМИОЛУ, 1987. — 121 с.
1.4. *Богословский, А. С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. — Л. : ВВМИОЛУ, 1977. — 204 с.

К ГЛАВЕ 2

2.1. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 212 с.
2.2. *Бухгольц, Г.* Расчет электрических и магнитных полей. — М. : ИЛ, 1961. — 712 с.
2.3. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1968. — 487 с.
2.4. *Каплянский, А. Е.* Теоретические основы электротехники / Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. — М. : Высш. школа, 1972. — 447 с.
2.5. *Нейман, Л. Р.*, Теоретические основы электротехники / Нейман Л. Р., Демирчян К. С. — Л. : Энергия, 1967. Т. 2, ч. 4. — 234 с.
2.6. *Нетушил, А. В.* Основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля / Нетушил А. В., Поливанов К. М. — М., Л. : ГЭИ, 1956. — 191 с.
2.7. *Никольский, В. В.* Теория электромагнитного поля. — М. : Высш. школа, 1964. — 384 с.
2.8. *Шимони, К.* Теоретическая электротехника. — М. : Мир, 1964. — 773 с.

К ГЛАВЕ 3

3.1. *Аполлонский, С. М.* Внешние электромагнитные поля электрооборудования и средства их снижения. — СПб. : Безопасность, 2001. — С. 69.
3.2. *Каплянский, А. Е.* Теоретические основы электротехники / Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. — М. : Высш. школа, 1972. — С. 425–427.
3.3. *Никольский, В. В.* Теория электромагнитного поля. — М. : Высш. школа, 1964. — С. 30–35, 52–53, 95.
3.4. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 212 с.
3.5. *Богословский, А. С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. — Л. : ВВМИОЛУ, 1977. — 203 с.
3.6. *Богословский, А. С.* Постоянные электрические поля. — Л. : ВВМИОЛУ, 1987. — 121 с.
3.7. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1968. — 487 с.

3.8. *Нетушил, А. В.* Основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля / Нетушил А. В., Поливанов К. М. — М., Л. : ГЭИ, 1956. — 191 с.
3.9. *Шимони, К.* Теоретическая электротехника. — М. : МИР, 1964. — 773 с.

К ГЛАВЕ 4

4.1. *Аполлонский, С. М.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках / Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. — Минск : Университетское, 1988. — 246 с.
4.2. *Аполлонский, С. М.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике / Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. — СПб. : Безопасность, 1999. — 416 с.
4.3. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 212 с.
4.4. *Нейман, Л. Р.* Теоретические основы электротехники. Т. 2., ч. 4: Теория электромагнитного поля / Нейман Л. Р., Демирчян К. С. — Л. : Энергия, 1967. — 234 с.
4.5. *Нетушил, А. В.* Основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля / Нетушил А. В., Поливанов К. М. — М., Л. : ГЭИ, 1956. — 191 с.
4.6. *Шимони, К.* Теоретическая электротехника. — М. : Мир, 1964. — 773 с.

К ГЛАВЕ 5

5.1. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 212 с.
5.2. *Нейман, Л. Р.* Теоретические основы электротехники. Т. 2., ч. 4: Теория электромагнитного поля / Нейман Л. Р., Демирчян К. С. — Л. : Энергия, 1967. — 234 с.
5.3. *Калашников, С. Г.* Электричество. — М. : Наука, ГРФМЛ, 1970. — 666 с.

К ГЛАВЕ 6

6.1. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1986. — 488 с.
6.2. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — СПб. : Лань, 2003. — 576 с.
6.3. *Каплянский, А. Е.* Теоретические основы электротехники / Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. — М. : Высш. школа, 1972. — 448 с.
6.4. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. — М. : Наука, ГРФМЛ, 1973. — 736 с.
6.5. *Фильчаков, П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений. — Киев : Наукова думка, 1964. — 532 с.
6.6. *Шимони, К.* Теоретическая электротехника. — М. : МИР, 1964. — 773 с.

К ГЛАВЕ 7

7.1. *Аполлонский, С. М.* Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. — Л. : Энергоиздат, 1982. — 144 с.
7.2. *Аполлонский, С. М.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках / Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. — Минск : Изд-во белорусских университетов, 1988. — 220 с.
7.3. *Kaden, H.* Shielding Effect of Thin-Walled Metal Cylinders of Rectangular Cross Section // Siemens Forsch. And Entwicklung (Berlin), 1977. — V. 6, n. 12. — p. 103–109.
7.4. *Анго, А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М. : Наука, 1967. — 778 с.
7.5. *Аполлонский, С. М.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике / Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. — СПб. : Безопасность, 1999. — 415 с.
7.6. *Стрэттон, Д. А.* Теория электромагнетизма. — М. : Гостехиздат, 1948. — 520 с.

К ГЛАВЕ 8

8.1. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — С. 134–138.
8.2. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1968. — С. 277–279.
8.3. *Камке, Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — СПб. : Лань, 2003. — С. 278.
8.4. *Каплянский, А. Е.* Теоретические основы электротехники / Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. — М. : Высш. школа, 1972. — С. 397–400.

К ГЛАВЕ 9

9.1. *Аполлонский, С. М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах : учеб. пособие. — СПб. : СЗТУ, 2003. — 292 с.
9.2. *Нейман, Л. Р.* Теоретические основы электротехники в 2-х т. : учебник для электротехнических специальностей вузов / Нейман Л. Р., Демирчян К. С. — М. : Энергоиздат, 1981. (Т. 1 — 533 с., т. 2 — 415 с.)
9.3. Теоретические основы электротехники / под ред. К. М. Поливанова. Т. 3. Теория электромагнитного поля. — М. : Энергия, 1975. — 207 с.
9.4. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле : учебник для электротехн., энергетич. и приборостроит. спец. вузов. — М. : Высш. школа, 1986. — 263 с.
9.5. *Никольский, В. В.* Теория электромагнитного поля. — М. : Высшая школа, 1964. — 386 с.
9.6. *Никольский, В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн / Никольский В. В., Никольская Т. И. — М. : Наука, 1989. — 544 с.
9.7. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1968. — 487 с.
9.8. *Иродов, И. Е.* Волновые процессы. Основные законы : учеб. пособие для вузов. — М. : Лаборатория базовых знаний, 1999. — 256 с.
9.9. *Гроднев, И. И.* Линии связи : учебник для вузов / Гроднев И. И., Верник С. М., Кочановский Л. Н. — М. : Радио и связь, 1995. — 488 с.
9.10. *Демирчян, К. С.* и др. Теоретические основы электротехники : учебник для вузов / Демирчян К. С. и др. Т. 3. — М., 2003. — 376 с.
9.11. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1968. — 487 с.

К ГЛАВЕ 10

10.1. *Аполлонский, С. М.* Корабельные электрические измерения. — Л. : ВВМИОЛУ, 1974. — 284 с.
10.2. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 231 с.
10.3. *Богословский, А. С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. — Л. : ВВМИОЛУ, 1977. — 203 с.
10.4. *Богословский, А. С.* Постоянные электрические поля. — Л. : ВВМИОЛУ, 1987. — 121 с.

К ГЛАВЕ 11

11.1. Специальные электрические машины. Источники и преобразователи энергии / в двух книгах. Книга 1. — М. : Энергоатомиздат, 1993. — 320 с. Книга 2. — М. : Энергоатомиздат, 1993. — 368 с.
11.2. *Алябьев, М. И.* Математическая теория электрических машин. — Л. : ВМАКВ им. А. Н. Крылова, 1960. — 551 с.
11.3. *Суханов, Л. А.* Электрические униполярные машины / Суханов Л. А., Сафиуллина Р. Х., Бобков Ю. А. — М. : ВНИИЭМ, 1964. — 136 с.

11.4. *Бертинов, А. И.* Униполярные электрические машины / Бертинов А. И., Алиевский Б. Л., Троицкий С. Р. — М. : Энергия, 1966. — 320 с.
11.5. *Баранов, Г. А.* Жидкометаллические токосъемные устройства униполярных машин / Баранов Г. А., Ильин В. М. — Л. : НИИЭФА, 1979. — 35 с.
11.6. *Лившиц, П. С.* Скользящий контакт электрических машин. — М. : Энергия, 1974. — 128 с.
11.7. *Вольдек, А. И.* Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. — Л. : Энергия, 1970. — 272 с.

К ГЛАВЕ 12

12.1. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 212 с.
12.2. *Богословский, А. С.* Магнитные поля и цепи постоянного тока. — Л. : ВВМИОЛУ, 1977. — 162 с.
12.3. *Аполлонский, С. М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах. — СПб. : СЗТУ, 2006. — 540 с.
12.4. *Иоссель, Ю. Я.* Расчет электрической емкости / Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. — Л. : Энергия, 1969. — 240 с.

К ГЛАВЕ 13

13.1. *Горский, А. Н.* Электромагнитные силы : учеб. пособие. — СПб. : ПГУПС, 1997.
13.2. *Говорков, В. А.* Электрические и магнитные поля. — М. : Энергия, 1968.
13.3. *Грудинская, Г. П.* Распространение радиоволн. — М. : Высшая школа, 1975.

К ГЛАВЕ 14

14.1. *Аполлонский, С. М.* Расчеты электромагнитных полей / Аполлонский С. М., Горский А. Н. — М. : Маршрут, 2006. — 980 с.

К ГЛАВЕ 15

15.1. *Шимони, К.* Теоретическая электротехника. — М. : Мир, 1964. — 773 с.
15.2. *Иродов, И. Е.* Основные законы электромагнетизма. — М. : Высшая школа, 1991. — 288 с.
15.3. *Яновский, В. М.* Земной магнетизм. — М., 1953. — 688 с.
15.4. *Русин, Ю. С.* Электромагнитные элементы радиоэлектронной аппаратуры : справочник / Русин Ю. С., Гликман И. Я., Горский А. Н — М. : Радио и связь, 1991. — 244 с.
15.5. *Аполлонский, С. М.* Внешние электромагнитные поля электрооборудования и средства их снижения. — СПб. : Безопасность, 2001. — 620 с.

К ГЛАВЕ 16

16.1. *Калантаров, П. Л.* Расчет индуктивностей : справочная книга / Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. — Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1986. — 356 с.
16.2. *Михайлов, М. И.* Электромагнитные влияния на сооружения связи / Михайлов М. И., Разумов Л. Д., Соколов С. А. — М. : Связь, 1979. — 264 с.

К ГЛАВЕ 17

17.1. *Гроднев, И. И.* Теория направляющих систем связи / Гроднев И. И., Шварцман В. О. — М. : Связь, 1978.
17.2. *Грудинская, Г. П.* Распространение радиоволн. — М. : Высшая школа, 1975.

К ГЛАВЕ 18

18.1. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Изд. десятое. — М. : Изд-во «Гардарики», 2002. — 638 с.

К ГЛАВЕ 19

19.1. *Каплянский, А. Е.* Теоретические основы электротехники / Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. — М. : Высш. школа, 1972. — 448 с.

19.2. *Татур, Т. А.* Электромагнитное поле в реальных средах. — Киев : Наук. думка, 1976. — 38 с.

К ГЛАВЕ 20

20.1. *Аполлонский, С. М.* Электромагнитное поле в неоднородных средах : учеб. пособие. — СПб. : СЗТУ, 2003. — 292 с.

20.2. *Оллендорф, Ф.* Токи в Земле. Теория заземлений. — М., Л. : ГНТИ, 1932. — 215 с.

20.3. *Аполлонский, С. М.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике / Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. — СПб. : Безопасность, 1999. — 416 с.

20.4. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высшая школа, 1978. — 212 с.

20.5. *Нейман, Л. Р.* Теоретические основы электротехники. Т. 2., ч. 4: Теория электромагнитного поля / Нейман Л. Р., Демирчян К. С. — Л. : Энергия, 1967. — 234 с.

20.6. *Нетушил, А. В.* Основы электротехники: Ч. 3: Теория электромагнитного поля / Нетушил А. В., Поливанов К. М. — М., Л. : ГЭИ, 1956. — 191 с.

20.7. *Шимони, К.* Теоретическая электротехника. — М. : Мир, 1964. — 773 с.

20.8. *Марголин, Н. Ф.* Токи в земле: учеб. пособие. Ч. 2. — М., Л. : Госэнергоиздат, 1947.

20.9. *Исаев, Н. И.* Теория коррозионных процессов. — М. : Металлургия, 1997. — 362 с.

20.10. *Джус, И. Н.* Об отпускающем и допустимом электрическом токе воздействия на человека // Электричество, 2006, № 1. — С. 66.

К ГЛАВЕ 21

21.1. *Бессонов, Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. школа, 1978. — 231 с.

21.2. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — СПб. : Лань, 2003. — 576 с.

21.3. *Нейман, Л. Р.* Теоретические основы электротехники. Т. 2., ч. 4: Теория электромагнитного поля / Нейман Л. Р., Демирчян К. С. — Л. : Энергия, 1967. — 234 с.

21.4. *Нетушил, А. В.* Основы электротехники. Ч. 3: Теория электромагнитного поля / Нетушил А. В., Поливанов К. М. — М., Л. : ГЭИ, 1956. — 191 с.

К ГЛАВЕ 22

22.1. *Болдырев, В. Г.* Электротехническая совместимость электрооборудования автономных систем / Болдырев В. Г., Богаров В. В., Булеков В. П., Резников С. Б. — М. : Энергоатомиздат, 1995. — 352 с.

22.2. *White, D. R. J.* A Handbook series on electromagnetic interference and compatibility.1st ed. Germantown, Md., Don. White Consultants. 1968–1972. — V. 1–5.

22.3. *Аполлонский, С. М.* Человек как элемент электромагнитной системы и его безопасность // Вестник МАНЭБ, 1997. — № 6. — С. 72–79.

22.4. *Аполлонский, С. М.* Внешние электромагнитные поля электрооборудования и средства их снижения. — СПб. : Безопасность, 2001. — 620 с.

22.5. *Воршевский, А. А.* Новые стандарты и нормативные документы по электромагнитной совместимости // Вестник МАНЭБ, 2001. — № 3 (39). — С. 114–124.

К ГЛАВЕ 23

23.1. *Аполлонский, С. М.* Справочник по расчету электромагнитных экранов. — Л. : Энергоатомиздат, 1988. — 224 с.
23.2. *Аполлонский, С. М.* Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. — Л. : Энергоиздат, 1982. — 144 с.
23.3. *Цейтлин, Л. А.* Катушки с активными электромагнитными экранами // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1971. — № 4. — С. 51–55.
23.4. *Тамм, И. Е.* Основы теории электричества. — М. : ГИТТЛ , 1956. — 620 с.
23.5. *Яновский, Б. М.* Земной магнетизм. — М. : ГИТТЛ, 1953. — 592 с.
23.6. *Морс, Ф. М.* Методы теоретической физики. Т. 1 / Морс Ф. М., Фешбах Г. — М. : ИЛИ, 1958. — 930 с.
23.7. *Аполлонский, С. М.* Расчет векторного потенциала произвольно ориентированного и расположенного в пространстве магнитного диполя // Теоретическая электротехника (Львов), 1978. — № 26. — С. 103–108.

К ГЛАВЕ 24

24.1. *Бурсиан, В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. — М. : ГТТИ, 1933.
24.2. *Заборовский, А. И.* Электроразведка. — М. : Гостоптехиздат, 1943.
24.3. *Аравин, В. И.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / Аравин В. И., Нумеров С. Н. — М. : Гостехтеоретиздат, 1953.
24.4. *Нетушил, А. В.* Электрические поля в анизотропных средах // Электричество, 1950. — № 3.
24.5. *Нетушил, А. В.* Расчет и моделирование электрофильтрации в анизотропных средах // Труды МЭИ, 1953, вып. XIV. — С. 211.
24.6. *Ломидзе, Г. М.* Электрическое водопонижение / Ломидзе Г. М., Нетушил А. В. — М. : Госэнергоиздат, 1958.
24.7. *Ницецкий, В. В.* Расчет плоскомеридианных электрических полей в некоторых анизотропных средах // Труды МЭИ, 1956, вып. XVIII.
24.8. *Оллендорф, Ф.* Токи в Земле. Теория заземлений. — М., Л. : ГНТИ, 1932. — 215 с.
24.9. *Belluigi, A.* Sullanisotropia Elettrogeomotica, Bollotino di Geofisica teorica ed applicata, 1959 n. 1, marzo.
24.10. *Белявский, В. Ф.* Сердечник из ферромагнитной анизотропной ленты / Белявский В. Ф., Поливанов К. М. // Электромеханика, 1959. — № 10.
24.11. *Нетушил, А. В.* Влияние толщины изоляции на магнитные свойства слоистых сердечников // Труды МЭИ, 1958, вып. 30.
24.12. *Поливанов, К. М.* Поверхностный эффект в анизотропных листах / Поливанов К. М., Кутяшов В. А. // Электромеханика, 1958. — № 3.
24.13. *Нетушил, А. В.* Некоторые задачи теории электронагрева // Электричество, 1952. — № 8.
24.14. *Казанцева, И. А.* Метод измерения электрических параметров анизотропных материалов / Казанцева И. А., Нетушил А. В. // Труды МЭИ, 1956, вып. XVIII. — С. 158.
24.15. *Поливанов, К. М.* Ферромагнетики. — М. : Госэнергоиздат, 1957.
24.16. *Нетушил, А. В.* Высокочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников / Нетушил А. В., Жуховицкий Б. Я., Кудин В. Н., Парини Е. П. — М. : Госэнергоиздат, 1959.
24.17. *Катков, Н. Г.* Магнитные спектры материала, обусловленные микроскопической структурой / Катков Н. Г., Поливанов К. М. // Известия АН СССР, серия физическая, 1954. — Т. XVIII, № 4. — С. 419.
24.18. *Нетушил, А. В.* Влияние толщины изоляции на магнитные свойства слоистых сердечников // Труды МЭИ, 1958, вып. 30.
24.19. *Нетушил, А. В.* К расчету дросселей насыщения / Нетушил А. В., Бурлак Н. М., Жуховицкий Б. Я., Кудин В. Н. // Радиотехника, 1960. — № 2.

24.20. *Аполлонский, С. М.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках / Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. — Минск : Университетское, 1988. — 246 с.
24.21. *Аполлонский, С. М.* Анизотропия материалов — резерв для повышения эффективности электромагнитных экранов / Аполлонский С. М., Острейко В. Н. // Электротехника, 1994. — № 11. — С. 51–53.
24.22. *Apollonskii, S. M.* The anisotropy of materials — a method for rising electromagnetic shielding performance / Apollonskii S. M., Ostreiko V. N. // Physica Scripta, 1996. — V. 52, n. 1. — P. 665–667.
24.23. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — СПб. : Лань, 2003. — 576 с.
24.24. *Янке, Е.* Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. — М. : Наука, 1977. — 342 с.
24.25. *Apollonskii, S. M.* Improvement of Efficiency of Electromagnetic Screens by application of Anisotropic Materials // Proceedings 1994 Intern. Symposium on EMC, Sendai, Japan, (16–18) May, 1994. — P. 751–754.

К ГЛАВЕ 25

25.1. *Аполлонский, С. М.* Проблемы электромагнитной экологии / Аполлонский С. М., Острейко В. Н. // Вестник МАНЭБ, 1996. — № 3. — С. 11–15.
25.2. *Аполлонский, С. М.* Человек как элемент электромагнитной системы и его безопасность // Вестник МАНЭБ, 1997. — № 6. — С. 72–79.
25.3. *Аполлонский, С. М.* Безопасность жизнедеятельности человека в электромагнитных полях / Аполлонский С. М., Каляда Т. В., Синдаловский Б. Е. — СПб. : Политехника, 2006. — 263 с.
25.4. *Аполлонский, С. М.* Средства и методы измерения ЭМП в окружающей среде / Аполлонский С. М., Каляда Т. В., Синдаловский Б. Е. // Журнал «Жизнь и безопасность», 2002. — № 3. — С. 129–133.
25.5. *Аполлонский, С. М.* Особенности экранирования при решении задач электромагнитной экологии // Вестник МАНЭБ. 1999. — № 1(13). — С. 33–38.
25.6. *Гуляев, Ю. В.* Математическое моделирование природных объектов в глобальной космической системе экологического контроля за состоянием окружающей среды / Гуляев Ю. В. и др. — М. : Б. И., 1991. — 33 с. (Препр./ АН СССР, Институт радиотехники и электроники. — № 2 (553)).
25.7. ГОСТ 25645.119-84. Излучения в магнитосфере волновые. Пространственно-временные и спектральные характеристики. — М. : ГК СССР по стандартам, 1985.
25.8. *Дорфман, Я. Г.* О физическом механизме воздействия статических магнитных полей на живые системы. — М. : ВИНИТИ, 1966. — 40 с.
25.9. *Кац, Р. А.* Модель воздействия переменного электрического поля на человека // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. — № 5. — С. 159–162.
25.10. Магнитные поля. Программа ООН по окружающей среде. ВОЗ и Междунар. Ассоц. по радиац. защите. — М. : Женева : Медицина : ВОЗ, 1992. — 191 с.
25.11. Надежность и эффективность в технике : справ. в 10 т. — М. : Машиностроение, 1988. Т. 5. — С. 44.
25.12. Проблемы экологии человека / под ред. В. П. Казначеева. — М. : Наука,1986. — 142 с.
25.13. *Соловьев, Н. А.* К вопросу о механизме биологического действия импульсного магнитного поля // Докл. АН СССР, 1963. — Т. 149. — № 2. — С. 438–441.
25.14. *Аполлонский, С. М.* Моделирование основных источников ЭМП при решении проблем электромагнитной совместимости и экологии / Аполлонский С. М., Боганьков В. В. // Тез. докл. на 3-й НТК «ЭМС техн. средств», (8–10).09.94. — СПб., 1994. — С. 40–41.
25.15. *Jerman, I.* Electromagnetic origin of life // Electro- and Magnetobiology, 1998. — V. 17, n. 3. — P. 401–413.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

ПРИЛОЖЕНИЕ

Станислав Михайлович АПОЛЛОНСКИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Учебное пособие

Зав. редакцией
инженерно-технической литературы *Е. Л. Дубова*
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*
Редактор *А. С. Мишин*
Корректоры *Т. А. Кошелева, В. О. Логунова*
Подготовка иллюстраций *И. М. Леонтьева*
Выпускающие *М. В. Тучина, Л. В. Дорохина*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 21.02.12.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 48,10. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122